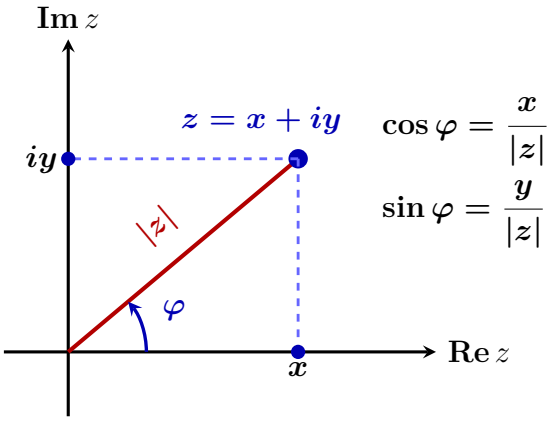
2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

argument liczby zespolonej

Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z.

KONWENCJA:
Ten z argumentów liczby zespolonej, **który leży w przedziale** $[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi})$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$.

Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest **nieokreślony**.

WNIOSEK: Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Gdy $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$z = 7$	$z = -i$	$z = -\sqrt{27} - 3i$
$z = 7(1 + 0i)$	$\lvert z\rvert = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$	$\lvert z\rvert = \sqrt{27 + 9} = 6$
	$z = 1\,(0 + (-1)\cdot i)$	$z = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$
	$\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$
$\varphi = 0 + 2k\pi$	$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$
$\arg z = 0$	$\arg z = \frac{3}{2}\pi$	$\arg z = \frac{7}{6}\pi$
$z = 7(\cos 0 + i\sin 0)$	$-i = 1(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$	$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Wówczas

i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$, [a]

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \big(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\big)$,

iii) $z^n = |z|^n \cdot \big(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\big)$ tzw. *wzór de Moivre'a*

[a] Mnożeniu liczb zespolonych można przypisać następującą interpretacje geometryczną, prowadzi ono do zmiany długości wektora i jego obrotu. Zobacz także tutaj.

Dowód. i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$
$= |z_1| \cdot |z_2|\Big(\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\Big)$

ii) analogicznie

iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.
Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. $\square$

Przykład 2.2.3. Przedstaw liczbę $z = -\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10}$ w postaci trygonometrycznej.

METODA I: Ponieważ $|z| = 1$, zatem $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ dla pewnego $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$\begin{cases} \cos\varphi = -\sin\frac{\pi}{10} < 0 \\ \sin\varphi = \cos\frac{\pi}{10} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ φ z II ćwiartki

Na mocy wzorów redukcyjnych $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ oraz $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

METODA II: $z = -\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10} = i^2\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10} = i\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) =$
$\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

Przykład 2.2.4. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ $\quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7}{12}\pi)+i\sin(\frac{7}{12}\pi)\right)$

$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10}\left(\cos(\frac{140}{12}\pi)+i\sin(\frac{140}{12}\pi)\right) = 2^{10}\left(\cos(\frac{35}{3}\pi)+i\sin(\frac{35}{3}\pi)\right) =$

$= 2^{10}\left(\cos(12\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(12\pi-\frac{\pi}{3})\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= 2^9(1-\sqrt{3}i)$

Twierdzenie 2.2.5 (Własności argumentu)**.** Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad (k=0 \text{ lub } k=-1)$

ii) $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad (k=0 \text{ lub } k=-1)$

iii) $\arg(z^n) = n\cdot\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg\bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$

Przykład 2.2.6. i) $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arg(-1) = \pi$ $\quad \arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$

$i = (-1)\cdot(-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$

ii) Niech $z = \frac{\sqrt{12}-2i}{-\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}}$. Wyznaczymy argument główny $\arg z$ liczby z.

$$\sqrt{12}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$-\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right) = 1\left(\cos\frac{7}{10}\pi+i\sin\frac{7}{10}\pi\right)$$

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{10}\right)\pi+i\sin\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{10}\right)\pi\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{13}{15}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{13}{15}\pi\right)\right]$$

Jednym z argumentów liczby z jest $\varphi = -\frac{13}{15}\pi$. Stąd dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\arg z + 2k\pi = -\frac{13}{15}\pi.$$

Biorąc $k=-1$, otrzymujemy $\arg z = \frac{17}{15}\pi \in [0, 2\pi)$.

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z.

Przykład 2.2.7. a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i = i$

b) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0\cdot i \;\Rightarrow\; \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$, $e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,

ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $|e^{i\alpha}| = 1$.

Dowód. iv) Mamy $|e^{i\alpha}| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$, zatem $e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = 0$, co nie jest możliwe, gdyż gdy $\cos\alpha = 0$, to $\sin\alpha = \pm 1$. $\square$

Wniosek 2.2.9. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

i) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\alpha+\beta)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha-\beta)}$,

ii) $z^k = r^ke^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Dowód. iii) Jeśli $\arg z = \varphi$, to $\arg\bar{z} = 2\pi - \varphi$, skąd $e^{(2\pi i-\varphi)i} = e^{2\pi}e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}$. $\square$

Wzory Eulera

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$

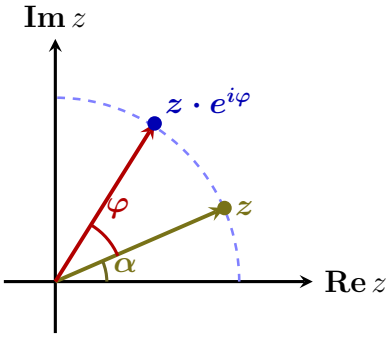
Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ

$z = re^{i\alpha}$

$z\cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$



obrót o kąt φ
w kierunku przeciwnym
do ruchu wskazówek zegara

Przykład 2.2.10. Rozwiążemy równanie $z^3 = (\bar{z})^3$.

Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.

Załóżmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$

oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^3 &= (\overline{z})^3 \\ r^3 e^{3i\varphi} &= r^3 e^{-3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 \\ 6\varphi &= 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \tfrac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.

2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie
Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n-tego stopnia* z liczby w.

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

I sposób:
postać algebraiczna

$z = x + iy$, $w = 8 + 6i$
$z^2 = w$
$(x + iy)^2 = 8 + 6i$
$x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$
$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$
$y \neq 0$ (gdy $y = 0$, to $z = x$, $x^2 \neq 8 + 6i$)
$x = \frac{3}{y}$, $\frac{9}{y^2} - y^2 = 8$
$y^4 + 8y^2 - 9 = 0$, $\Delta = 100$
$y^2 = 1$, $y = \pm 1$

$z = 3 + i \vee z = -3 - i$

II sposób:
postać wykładnicza

$z = |z|e^{i\varphi}$, $w = 8 + 6i$
$|z|^2 e^{2i\varphi} = w = |w|e^{i\alpha}$

$|w| = 10$

$w = 8 + 6i = 10(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5})$

$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$
$z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} = 10e^{i\alpha}$
$2\varphi = \alpha + 2k\pi$, $|z| = \sqrt{10}$
$\varphi_k = \frac{1}{2}\arcsin \frac{3}{5} + k\pi$

$z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k}$, $k \in \{0, 1\}$

III sposób:
postać algebraiczna

$8 + 6i = 9 + 6i - 1 =$
$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 =$
$= (3 + i)^2$

$z = 3 + i \vee z = -3 - i$

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wówczas

$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Otrzymujemy

$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, gdzie $\alpha_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. $\square$

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Niech $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

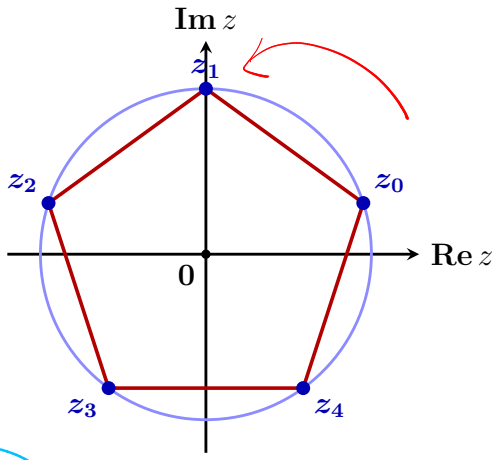
Obliczamy $|w| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Zatem

$$z^5 = w \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{3})) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}.$$

Stąd $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, gdzie $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n-kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

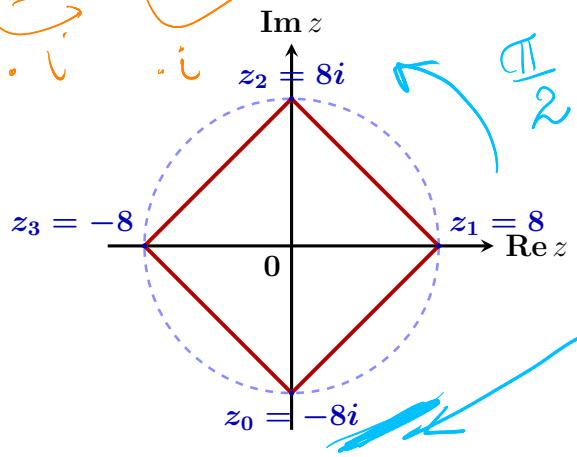
Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3. Będą one wierzchołkami kwadratu.

$z^4 = \left((\sqrt{3} - i)^3\right)^4$

Niech $z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$.

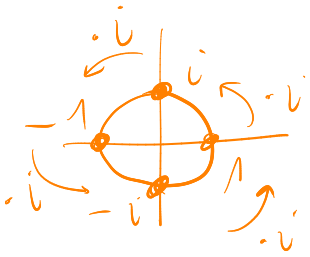
Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad x_3 = z_2 \cdot i = -8$



Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = \|x\|$	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$



Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n.
$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W, jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout)**.** Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k-krotnym wielomianu* W, jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z-1) - (z-1) = (z-1)(z^2-1) = (z-1)^2(z+1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2 \ldots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2 \ldots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 \ldots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \qquad \square$$

Trójmian kwadratowy $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.
Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2$, $\sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.
Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$0 = (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] =$
$= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$
rozwiązania $z_1 = 1, \quad z_2 = 1+\sqrt{3}i, \quad z_3 = 1-\sqrt{3}i, \quad \bar{z}_2 = z_3$

	1	-3	6	-4
1	1	-2	4	0

Przykład 2.3.17. Wskaż wszystkie pierwiastki wielomianu $W(z) = z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 22z - 15 = 0$, wiedząc, że $z_1 = -2 - i$ jest jednym z nich.

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = -2 + i$.
Na mocy twierdzenia Bézout, $W(z)$ dzieli się bez reszty przez $(z - z_1)(z - z_2)$.

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z + 2 + i)(z + 2 - i) = (z+2)^2 - i^2 = (z+2)^2 + 1 = z^2 + 4z + 5$$

Dzieląc wielomiany otrzymujemy

$$W(z) = (z^2 + 4z + 5)(z^2 - 2z - 3) = (z^2 + 4z + 5)(z - 3)(z + 1).$$

Pierwiastki wielomianu to $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -2 + i$, $z_2 = 3$, $z_4 = 1$.

Przykład 2.3.18. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$(z-2i)\Big(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i\Big) = 0$

$(z-2i)(z+1)\Big(z^2 + (1+3i)z + 3i\Big) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$

rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

2.4 Interpretacja geometryczna

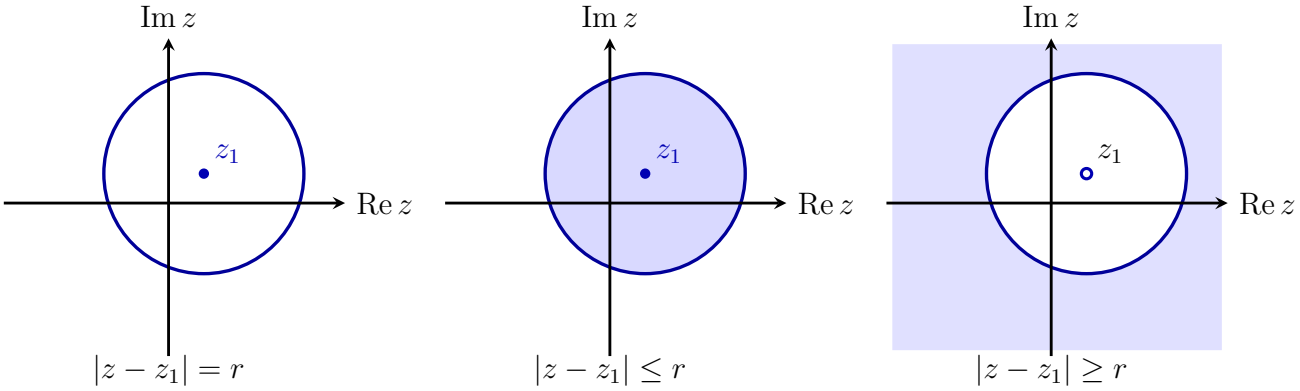
Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

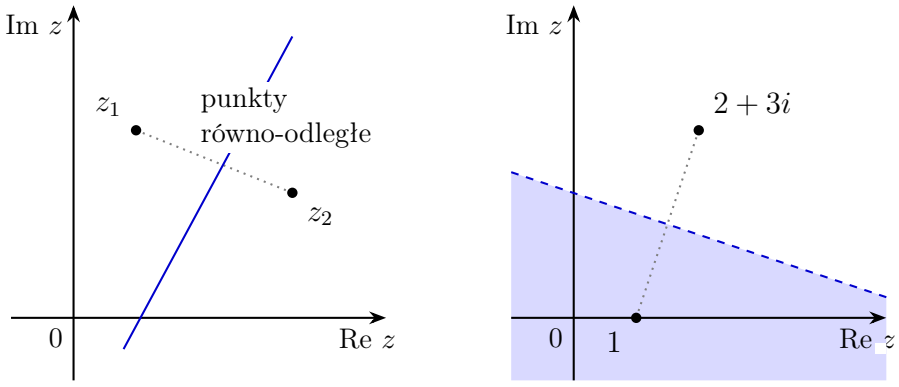
$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \;\Rightarrow\; r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2



np. $|z - 1| < |z - 2 - 3i|$