Przykład 2.3.18. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$(z-2i)\Big(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i\Big) = 0$

$(z-2i)(z+1)\Big(z^2 + (1+3i)z + 3i\Big) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$

rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

2.4 Interpretacja geometryczna

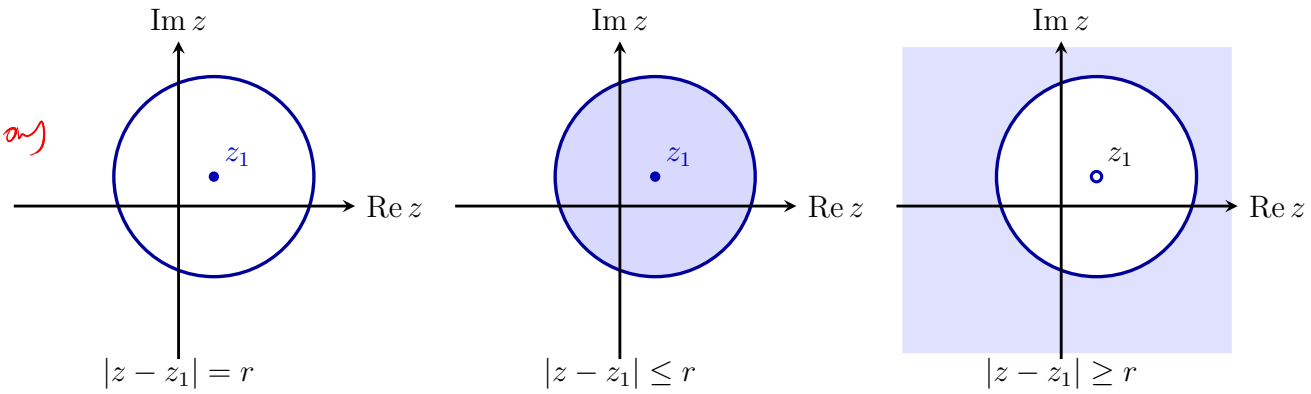
Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

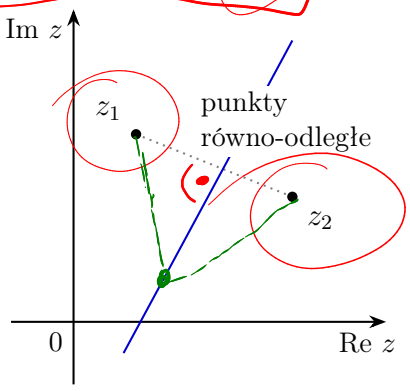
$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

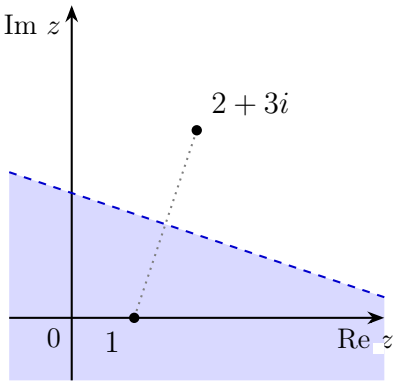
2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \;\Rightarrow\; r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$



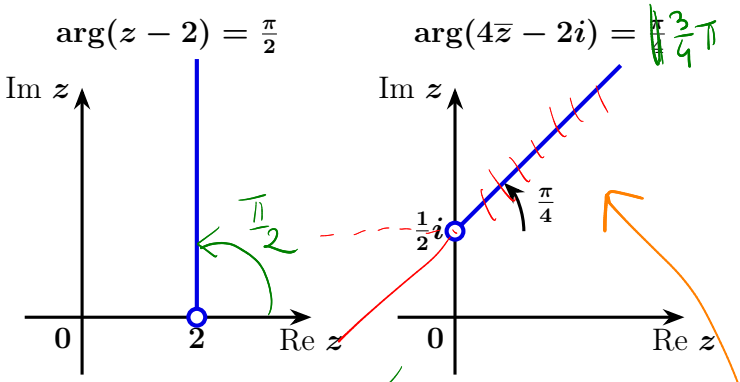
3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2

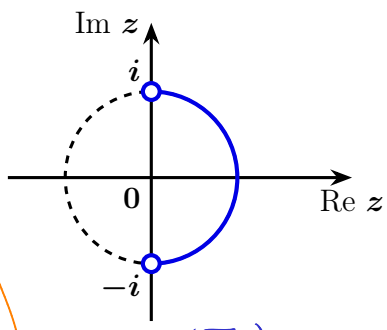




np. $|z - 1| < |z - 2 - 3i|$

4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.





$$\frac{3}{4}\pi = \arg(4\bar{z}-2i) = \arg[4(\bar{z}-\frac{1}{2}i)] = \arg(\bar{z}-\frac{1}{2}i) = 2\pi - \arg\left(\overline{z-\frac{1}{2}i}\right) = 2\pi - \arg(z+\frac{1}{2}i)$$

$$\arg(z-(-\frac{1}{2}i)) = 2\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

METODA I:

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i]\cdot[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+xyi+xi+xyi+xi+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\mathrm{Re}w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}, \quad \mathrm{Im}w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}w = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \\ \mathrm{Im}w > 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

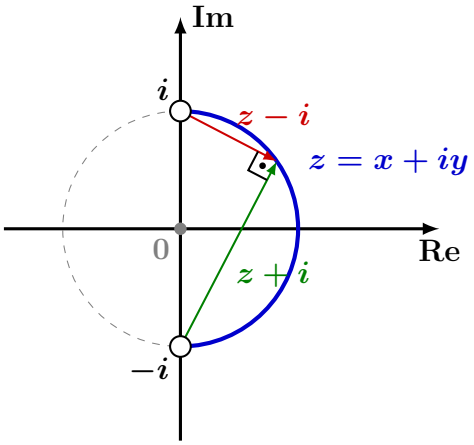
METODA II:

$$\frac{\pi}{2} = \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \arg(z+i) - \arg(z-i).$$

Zatem $\arg(z+i) = \frac{\pi}{2} + \arg(z-i)$, co oznacza, że kąt skierowany między wektorami $\boldsymbol{z-i}$ oraz $\boldsymbol{z+i}$ wynosi dokładnie $\frac{\pi}{2}$.

Na mocy twierdzenia Talesa o kącie wpisanym opartym na średnicy okręgu, zbiorem punktów $\boldsymbol{z}$ spełniających ten warunek jest łuk okręgu, którego średnicą jest odcinek łączący punkty $\boldsymbol{-i}$ oraz $\boldsymbol{i}$.

Ponieważ różnica argumentów musi być dodatnia i równa $\frac{\pi}{2}$, rozwiązanie stanowi wyłącznie prawy półokrąg (dla $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z} > \mathbf{0}$), z wyłączeniem punktów osobliwych $\boldsymbol{i}$ oraz $\boldsymbol{-i}$.



QUIZ

Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe?

1. $Re\Big[(\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{3})^{12}\Big] = 0$
2. Niech $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Wówczas $Re(z^2) > 0$ oraz $Im(z^2) > 0$.
3. $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
4. Argumentem głównym liczby $w = \frac{(1+i)^{17}}{i^9(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})}$ jest $\frac{\pi}{12}$.
5. Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w ciele $\mathbb{C}$.
6. Nie jest możliwe, by wielomian zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych stopnia 5 miał dwa pierwiastki rzeczywiste i trzy zespolone.
7. Nie jest możliwe, by wielomian $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ stopnia 5 miał dwa pierwiastki rzeczywiste i trzy zespolone.
8. Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = 1 \wedge |z + 2 + i| = |z + i|\}$ jest zbiorem dwuelementowym.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 3
Data: .....

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n*.

Dla $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$B \in M_3(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$ macierz zerowa wymiaru $m \times n$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

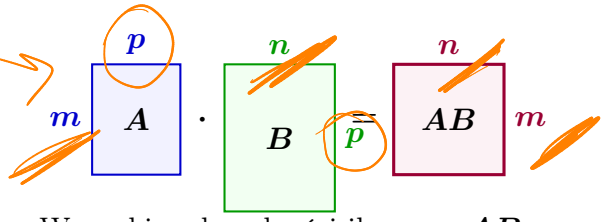
Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^G(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^D(K)$$

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
  $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$



Warunki wykonalności iloczynu $\boldsymbol{AB}$.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Transpozycja iloczynu. Odwrócenie kolejności mnożenia czynników.

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Transponowanie

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array}$$

$1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$

AB^2.

A B $\to \exists AB$

2×3 3×2

2×2

A

2×3

BA: 3×3

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

B 3×2

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$AB \neq BA$!

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 4$

$[0,1] \circ [1,4] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4$

il. skalarny

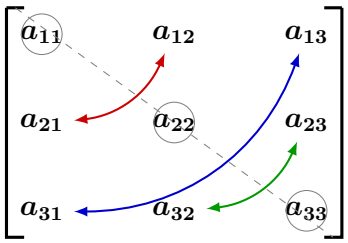
$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$CD \in M_2(\mathbb{R})$, $DC \in M_2(\mathbb{R})$, $CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$, $DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}$, $CD \neq CD$

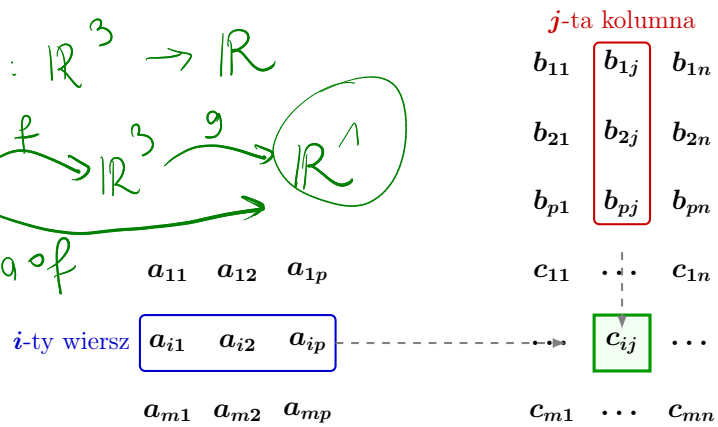
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^1 \end{tikzcd}$$



Interpretacja geometryczna transponowania $\boldsymbol{A^T}$ macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ jako odbicia zwierciadlanego elementów względem głównej przekątnej.



Monżenie macierzy za pomocą schematu Falka.

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $A + B = B + A$
ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$
iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$
ii) $(A + B)C = AC + BC$
iii) $A(B + C) = AB + AC$
iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
v) $AI = A$
vi) $IA = A$

Wniosek 3.1.9. i) $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

ii) $(M_n(K), +, \cdot)$ jest pierścieniem nieprzemiennym z jedynką.

Poniższy przykład pokazuje, że $(M_n(K), +, \cdot)$ nie jest ciałem, bowiem w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K istnieją *dzielniki zera*.

Przykład 3.1.10. Rozważmy macierze $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczamy $BA = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ oraz $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 3.1.11. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

macierz kwadratowa $n \times n$

Definicja 3.1.12. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\mathrm{tr}(A)$.

Przykład 3.1.13. $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

trace

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.14. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ ii) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

iii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$ iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.15. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.16. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$,

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$.

Twierdzenie 3.1.17. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A+A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A+A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T+(A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T+A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

Definicja 3.1.19. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij}, dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

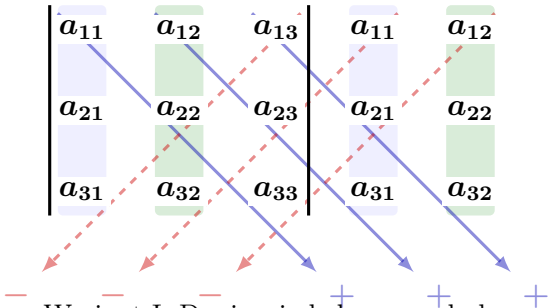
$$\det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

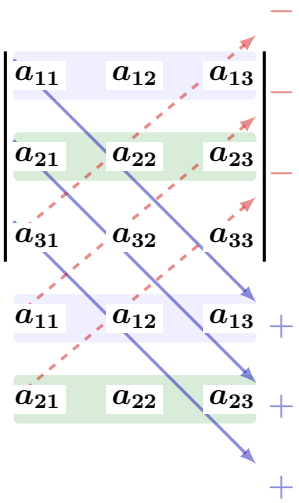
Metoda Sarrusa (**tylko dla wyznaczników stopnia 3!**)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$- \left[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2 \right] = -59$$



Wariant I: Dopisanie kolumn na boku



Wariant II: Dopisanie wierszy na dole

Metoda Sarrusa

$$\det A = \det (A^T)$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$

Minor $\boldsymbol{M_{ij}}$ wyznaczamy bezpośrednio jako wyznacznik macierzy stopnia $\boldsymbol{n-1}$, powstałej poprzez całkowite wykreślenie $\boldsymbol{i}$-tego wiersza oraz $\boldsymbol{j}$-tej kolumny wyjściowej macierzy $\boldsymbol{A}$.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{22}}\ \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{M_{22}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22}}$$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$,

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$$\det C = 4\cdot(-1)^9 M_{54} = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41}+2D_{42}) =$$

$$-12\cdot(-1)^5 M_{41} - 8\cdot(-1)^6 M_{42} = 12\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det A = 5\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot(-1)\cdot 2$$

$$\det B = 10\cdot 2\cdot 3\cdot(-1) = -60$$

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy stopnia 2

Rozważmy wektory na płaszczyźnie $\vec{u} = [a, b]$, $\vec{v} = [c, d]$. Niech D będzie równoległobokiem rozpiętym na tych wektorach. Wówczas pole $|D|$ tego równoległoboku jest równe $|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$.

Dowód można znaleźć w [3].

