Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątna górną nieosobliwą. □

Przykład 4.3.8.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1 \\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4+w_2]{w_3+2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix},$$

$r(D) = 3$

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \in M_{m\times(n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego)**.** Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

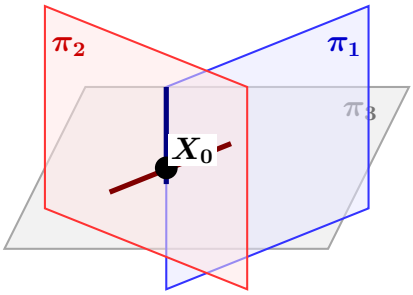
Wniosek 4.3.10.

i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

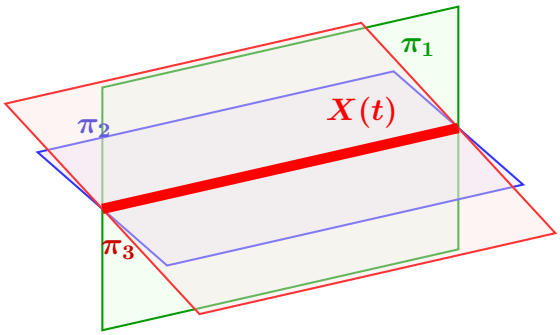
iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

$r(A) = r(U) = 3 = n$



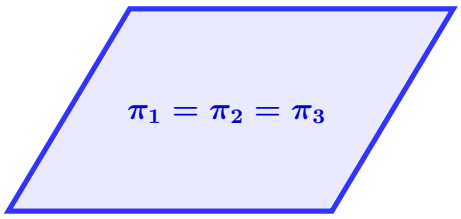
Rys. 1. Układ oznaczony:
Jedno rozwiązanie (punkt X_0).

$r(A) = r(U) = 2 < n$



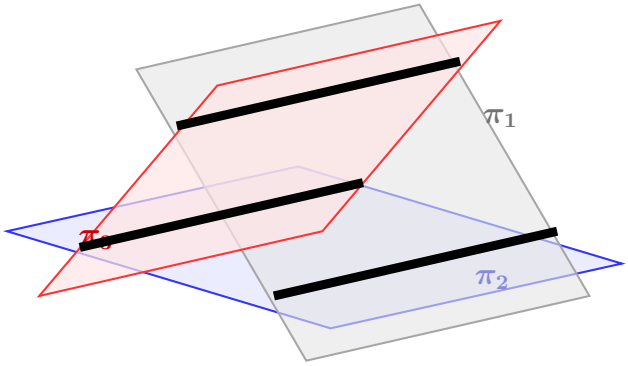
Rys. 2. Układ nieoznaczony (1 par.):
Rozwiązaniem jest wspólna prosta.

$r(A) = r(U) = 1 < n$



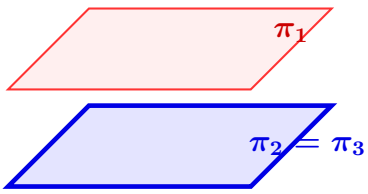
Rys. 3. Układ nieoznaczony (2 par.):
Płaszczyzny pokrywają się.

$r(A) = 2 \neq r(U) = 3$



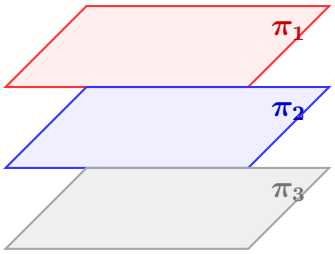
Rys. 4. Układ sprzeczny („Tunel”):
Przecięcia parami, brak punktu wspólnego.

$r(A) = 1 \neq r(U) = 2$



Rys. 5. Układ sprzeczny:
Dwie pokrywające się, trzecia równoległa.

$r(A) = 1 \neq r(U) = 2$



Rys. 6. Układ sprzeczny:
Trzy płaszczyzny równoległe rozłączne.

Uwaga 4.3.11. Dla n=3, przypadek $r(A) = 1$ oraz $r(U) = 3$ nie jest możliwy. Macierz uzupełniona $U = [A|B]$ powstaje poprzez dopisanie do macierzy A jednej kolumny (wyrazów wolnych), co może zwiększyć rząd macierzy *maksymalnie o 1.*
Rząd $r(A)$ określa liczbę niezależnych [a]

[a] Wielkość $r(A)$ określa wymiar przestrzeni rozpiętej przez wektory normalne płaszczyzn.

- $r(A) = 1$: Wszystkie wektory normalne są współliniowe. Oznacza to, że wszystkie trzy płaszczyzny są do siebie równoległe (mogą się rozłącznie mijać lub na siebie nakładać).
- $r(A) = 2$: Wektory normalne rozpinają przestrzeń dwuwymiarową (płaszczyznę). Trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż jednej prostej niczym skrzydła wiatraka (pęk płaszczyzn, jak na Rys. 2). W szczególności możliwe jest, że dwie płaszczyzny pokrywają się, a trzecia jest do nich nierównoległa i przecina je pod skosem.
- $r(A) = 3$: Wektory normalne są liniowo niezależne i rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie (jak narożnik pokoju, patrz Rys. 1).

Jeśli układ jest sprzeczny, to $r(U) = r(A) + 1$.

Przykład 4.3.12.

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 5 \\ 4x + y + 7z &= 8 \\ 5x + 2y + 8z &= 4 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right], \; r(A) \le 3, \; r(U) \le 3$$

$$U \xrightarrow[w_3-5w_1]{w_2-4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$r(U) = 3 \neq r(A) = 2 \;\Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M. Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r < n$, to $n-r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M, przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładnej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \ldots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$.

Przykład 4.3.13.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 4x + 5y - 13z &= 1 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right], \; r(A) \leq 3, \; r(U) \leq 3$$

2 schodki

$$U \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{y}\ \mathbf{x}\ \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+5w_1]{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ 0 & 14 & 2 & 36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

y x z

$$\left|\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{array}\right| \neq 0 \text{ minor niezerowy}$$

$r(A) = r(U) = 2$

$n = 3$

x, y, z

Tw. K-C

nieoznaczony

$3 - 2 = 1$ parametr

$$\begin{cases} -y + 2x &= 7 - 3z \\ 7x &= 18 - z \end{cases} \text{ lub } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

4.4 Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań.

Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań.

Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.4.1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

Przykład 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u &= 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u &= 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u &= 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u &= 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u &= -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$U=\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2\leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-3w_1\\ w_4-4w_1\\ w_5-w_1}]{w_2-2w_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2 \text{ za } k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\,z\,u\,t\,y}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right]$$

x z u t y

równoważny układ $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ z - \frac{7}{3}t = -3 \\ u + \frac{8}{3}t = 3 \end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5 - 3 = 2$ parametrów

Uwaga 4.4.3. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.4.4. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad r := r(A) = r(U) = 2,\ n = 5,\ n - r = 3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.
Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
k_1, k_5	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

Uwaga 4.4.5. W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\textbf{na}]{\textit{operacje}} \xrightarrow[\textbf{wierszach}]{\textit{elementarne}} [I|X]$$

Przykład 4.4.6.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2x-y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

Przykład 4.4.7. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 &= p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 &= p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 &= 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x_2\, x_3\, x_1\, x_4}]{k_1 \text{ za } k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

QUIZ

Czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe?

1. Układ równań $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$ jest układem Cramera.

2. Dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$ układ równań $\begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest układem oznaczonym.

3. Dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$ układ równań $\begin{bmatrix} p & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}$ jest układem sprzecznym.

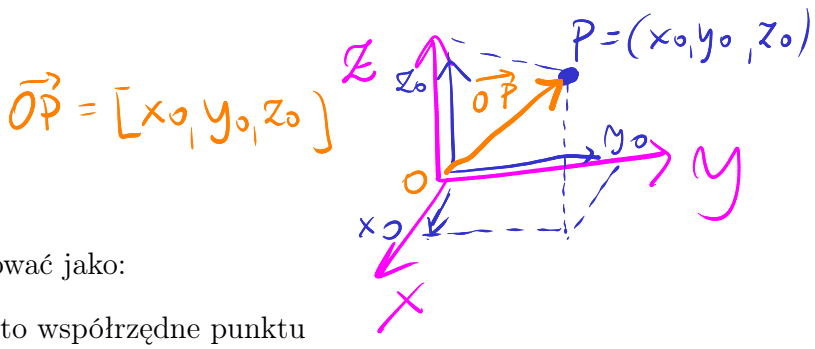
4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -p \\ 0 & p & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, gdzie $p \in \mathbb{R}$. Można tak dobrać $p \in \mathbb{R}$, by $r(A) = 3$.

5. Istnieje macierz $A \in M_5(\mathbb{R})$ taka, że $r(A) = 4$ oraz $\det A = 1$.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 5
Data: .....

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$



5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{\mathbf{0}} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

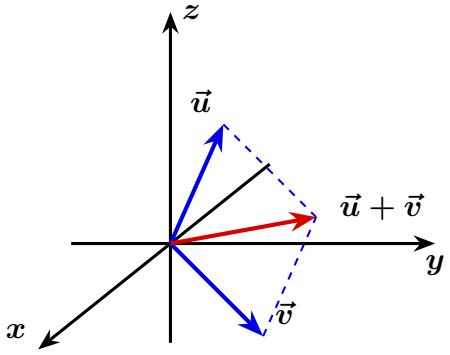
Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z] \quad \text{suma wektorów}$$

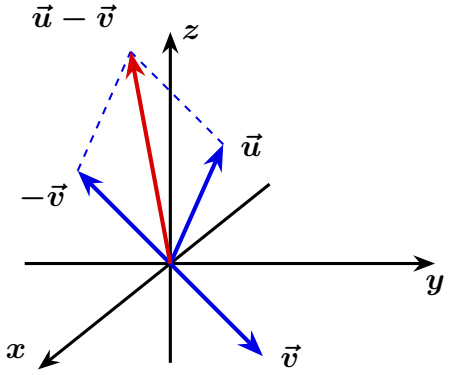
$$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z] \quad \text{iloczyn wektora przez skalar}$$

$$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z] \quad \text{wektor przeciwny do } \vec{u}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} \quad \text{różnica wektorów}$$



dodawanie wektorów



odejmowanie wektorów

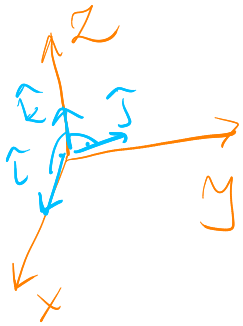
Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*.

Oznaczamy przez $\hat{i} = [1, 0, 0], \hat{j} = [0, 1, 0], \hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych.



$$\begin{aligned}\vec{u} &= [u_x, u_y, u_z] \\ &= [u_x, 0, 0] + [0, u_y, 0] + [0, 0, u_z] \\ &= u_x \cdot [1, 0, 0] + u_y \cdot [0, 1, 0] + u_z \cdot [0, 0, 1] \\ &= u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$



Uwaga 5.1.1 (Własności długości).

$|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ $\qquad$ $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$ $\qquad$ $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$.

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$$

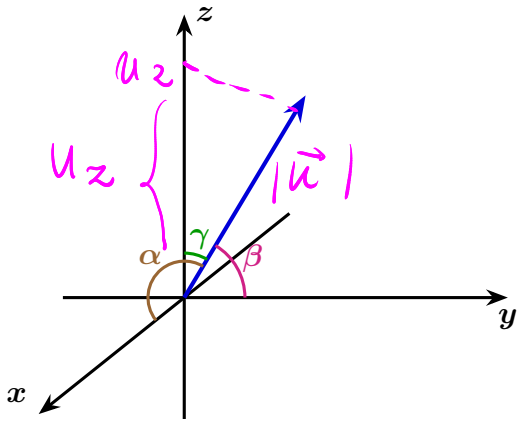
Istotnie, jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right]$ oraz

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby

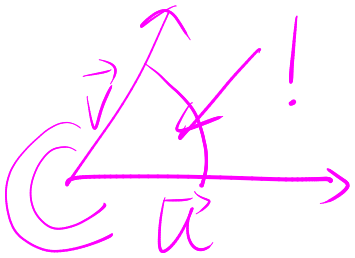
$$\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}, \quad \cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \quad \cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$$

nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.



kąty kierunkowe

Iloczyn skalarny

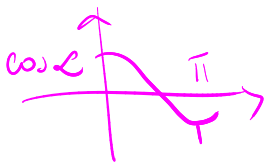


Oznaczamy przez $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u},\vec{v}$,.
Przyjmujemy, że jego miara należy do przedziału $[0,\pi]$.

Definicja 5.1.2. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u},\vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u}\circ\vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.3. Jeśli $\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]$, $\vec{v}=[v_x,v_y,v_z]$, to wówczas $\vec{u}\circ\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z$.

Przykład 5.1.4. $[1,4,0]\circ[2,-1,1]=1\cdot2+4\cdot(-1)+0\cdot1=-2<0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.



Twierdzenie 5.1.5 (Własności iloczynu skalarnego)**.** Dla dowolnego $\lambda\in\mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u}\circ\vec{v}=\vec{v}\circ\vec{u}$

ii) $\vec{u}\circ\vec{u}=|\vec{u}|^2$

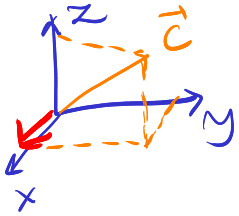
iii) $(\lambda\vec{u})\circ\vec{v}=\lambda(\vec{u}\circ\vec{v})$

iv) $(\vec{u}+\vec{v})\circ\vec{w}=(\vec{u}\circ\vec{w})+(\vec{v}\circ\vec{w})$

v) $|\vec{u}\circ\vec{v}|\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

vi) $\vec{u}\neq\vec{0},\vec{v}\neq\vec{0}$ $\quad\vec{u}\circ\vec{v}=0\ \Rightarrow\ \vec{u}\perp\vec{v}$

Przykład 5.1.6. Dane są wektory $\vec{a},\vec{b}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że $\vec{a}$ jest rzutem prostokątnym wektora $\vec{c}=[\frac{1}{\sqrt{2}},3,4]$ na oś Ox, zaś $\vec{b}$ wersorem takim, że $2\vec{a}-\vec{b}\perp\vec{b}$.
Wyznaczymy miarę kąta α pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



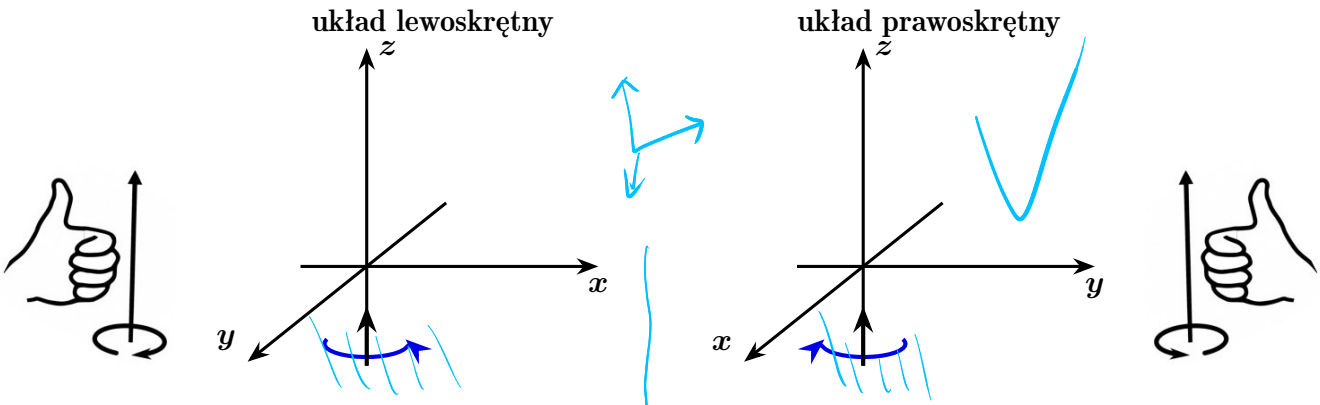
Zauważmy, że $|\vec{b}|=1$ oraz $\vec{a}=[\frac{1}{\sqrt{2}},0,0]$ i $|\vec{a}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ponadto

$$0=(2\vec{a}-\vec{b})\circ\vec{b}=2\vec{a}\circ\vec{b}-\vec{a}\circ\vec{b}=2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha-|\vec{b}|^2=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha-1.$$

Stąd $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, zatem $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.7. Uporządkowana trójka wektorów $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawate są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.8. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

i) $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$,

ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$,

iii) orientacja trójki $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.
Jeśli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 5.1.9. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

Twierdzenie 5.1.10. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Przykład 5.1.11. Niech $\vec{u} = [1, 2, -3]$, $\vec{v} = [3, 4, 5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = [22, -14, -2]$$

lub metody Sarrusa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 4\hat{k} - 9\hat{j} - 6\hat{k} + 12\hat{i} - 5\hat{j} = 22\hat{i} - 14\hat{j} - 2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.12 (Własności iloczynu wektorowego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

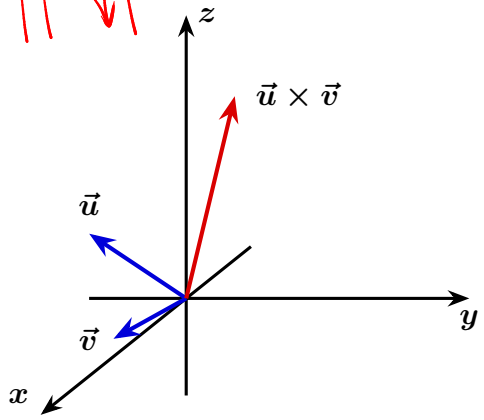
iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0}\right)$

Reguła prawej dłoni





Uwaga 5.1.13. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

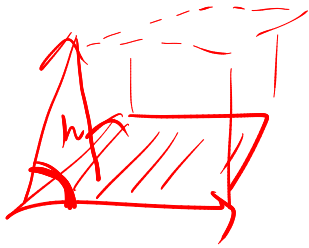
Definicja 5.1.14. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. *Iloczynem mieszanym* uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $\boldsymbol{(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}}$.
Oznaczamy ją symbolem $\boldsymbol{\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)}$.

Twierdzenie 5.1.15. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Dowód. $\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$

$= [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$ $\square$



Uwaga 5.1.16. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)|$.

Dowód. Niech $\alpha = \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. $\square$

Przykład 5.1.17. Czy punkty $A = (1, 0, 2), B = (5, 1, 5), C = (3, -1, 2), D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ jest równa zero.

$\overrightarrow{AB} = [4, 1, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [2, -1, 0]$, $\overrightarrow{AD} = [0, 3, 3]$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

