

Algebra wyższa

Elżbieta Adamus

Wydział Matematyki Stosowanej

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków 2025

Literatura

- [1] Z. Furdzik, J. Maj-Kluskowa, A. Kulczycka, M. Sękowska, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Część I - Algebra*, Wydawnictwo AGH, Kraków, 1993
- [2] B. Gleichgewicht, *Algebra*, PWN, Warszawa, 1983, wydanie III zmienione
- [3] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2020, wydanie XXII
- [4] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2015, wydanie VIII poprawione
- [5] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry. Tomy 1 - Postawy algebry*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.
- [6] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry. Tom 2 - Algebra liniowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.

TEMAT: *Zbiory i relacje. Działania i wybrane struktury algebraiczne*

1.1 Notacja

Przyjmujemy następującą notację.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych

Oznaczenia kwantyfikatorów

$\forall$	kwantyfikator ogólny (duży)	<i>dla każdego</i>
$\exists$	kwantyfikator szczegółowy (mały)	<i>istnieje</i>
$\exists!$		<i>istnieje dokładnie jeden</i>

Symbol sumy i iloczynu

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ to dowolny ciąg liczb.

Sumę $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ oznaczamy symbolem $\sum_{i=1}^n a_i$. Symbol i to wskaźnik sumowania lub indeks sumowania, m to dolna granica sumowania, zaś n to górna granica sumowania.

Zauważmy że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ oraz $c \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n)$ oraz $c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n$, czyli

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i.$$

Przykład 1.1.1. $\sum_{i=1}^6 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$$\sum_{i=5}^9 \frac{i}{i+2} = \frac{5}{7} + \frac{6}{8} + \frac{7}{9} + \frac{8}{10} + \frac{9}{11}$$

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ oznaczamy symbolem $\prod_{i=1}^n a_i$. Symbol i to wskaźnik iloczynu, m to dolny wskaźnik iloczynu, zaś n to górny wskaźnik iloczynu.

Przykład 1.1.2. $\prod_{i=0}^6 (9-j) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
 $\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (-1) \cdot n = n!$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ razy}} = \prod_{i=1}^n x$$

Definicja 1.1.3. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Analogicznie definiujemy

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Oznaczamy $A^2 = A \times A$ oraz $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-razy}}$.

Przykład 1.1.4. Wyznacz $A \times B$, $B \times A$, B^2 .

i) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 7\}$

$$A \times B = \{(3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 5), (5, 7)\}$$

$$B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$B^2 = \{(5, 5), (5, 7), (7, 5), (7, 7)\}$$

ii) przedziały $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $B = (1, 2) \subset \mathbb{R}$

$$A \times B = \{(x, y) : 0 < x < 1 \wedge 1 < y < 2\}$$

$$B \times A = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 < y < 1\}$$

iii) $A = B = \mathbb{R}$

$$A \times B = B \times A = A^2 = B^2$$

Oznaczamy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ - płaszczyzna rzeczywista

1.2 Działania wewnętrzne i ich własności

Niech A będzie zbiorem niepustym.

Definicja 1.2.1. Dowolną funkcję $h : A \times A \rightarrow A$ nazywamy *działaniem wewnętrznym* w zbiorze A . Wartość funkcji $h(a, b) \in A$ nazywamy *wynikiem* działania dla pary argumentów $a, b \in A$.

Przykład 1.2.2. i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

ii) Odejmowanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

iii) Dodawanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Własności działań wewnętrznych

Definicja 1.2.3. Niech $*$: $A \times A \rightarrow A$ będzie działaniem wewnętrznym.

- i) Działanie $*$ nazywamy *przemienne*, jeśli $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$.
- ii) Działanie $*$ nazywamy *łączny*, jeśli $\forall a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
- iii) Element $e \in A$ nazywamy *elementem neutralnym* działania $*$, jeśli $\forall a \in A \quad a * e = e * a = a$.

Przykład 1.2.4. i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemienne w $\mathbb{R}$. 0 jest elementem neutralnym.

- ii) Mnożenie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemienne w $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 jest elementem neutralnym.

Twierdzenie 1.2.5. Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $e_1, e_2 \in A$ będące elementami neutralnymi w A . Wówczas $e_2 = e_1 * e_2 = e_1$. $\square$

Przykład 1.2.6. Niech X to dowolny zbiór.

- i) Zbiór pusty $\emptyset$ jest elementem neutralnym w $(P(X), \cup)$.
- ii) Zbiór X jest elementem neutralnym w $(P(X), \cap)$.

Definicja 1.2.7. Niech $*$: $A \times A \rightarrow A$ będzie działaniem wewnętrznym, posiadającym element neutralny $e \in A$. Dla dowolnego $a \in A$ każdy element $a' \in A$ taki, że $a * a' = a' * a = e$, nazywamy *elementem symetrycznym* do a względem działania $*$.

Przykład 1.2.8. i) W $(\mathbb{R}, +)$ elementem symetrycznym do 5 jest -5 (tzw. element przeciwny).

- ii) W $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ elementem symetrycznym do 5 jest $\frac{1}{5}$ (tzw. element odwrotny).

- iii) W $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + 1$, elementem neutralnym jest -1 , zaś elementem symetrycznym do x jest $-2 - x$.

Twierdzenie 1.2.9. Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

Dowód. Rozważmy zbiór A z działaniem łącznym $\circ$. Niech e będzie elementem neutralnym działania $\circ$. Niech a', a'' to dwa elementy symetryczne do $a \in A$. Wówczas

$$\begin{aligned} a \circ a' = e &\Rightarrow a'' \circ (a \circ a') = a'' \circ e \\ &(a'' \circ a) \circ a' = a'' \\ &e \circ a' = a'' \\ &a' = a'' \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Podstawowe struktury algebraiczne

Struktura algebraiczna - zbiór wraz z działaniami wewnętrznymi w tymże zbiorze

Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $*$: $G \times G \rightarrow G$ działaniem wewnętrznym w G .

Definicja 1.3.1. i) Parę $(G, *)$ nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie jest łączne.

ii) Parę $(G, *)$ nazywamy *monoidem*, jeżeli działanie jest łączne i posiada element neutralny.

iii) Parę $(G, *)$ nazywamy *grupą*, jeżeli działanie jest łączne, posiada element neutralny oraz każdy element G posiada element symetryczny względem $*$ w G .

Jeśli dodatkowo działanie $*$ jest przemienne, to mówimy o *półgrupie przemiennej*, *monoidzie przemiennym*, *grupie przemiennej (abelowej)*.

Przykład 1.3.2. Oznaczmy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Czy podane struktury to półgrupy/grupy (przemienne)?

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{Z}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}, +)$	$(\mathbb{Q}, \cdot)$	$(\mathbb{R}^*, +)$	$(\mathbb{R}^*, \cdot)$
wewnętrzność	✓	✓	✓	✓	nie $-1 + 1 = 0$ $0 \notin \mathbb{R}^*$	✓
łączność	✓	✓	✓	✓		✓
przemienność	✓	✓	✓	✓		✓
el. neutralny	brak $0 \notin \mathbb{N}$	✓ $1 \in \mathbb{Z}$	✓ $0 \in \mathbb{Q}$	✓ $1 \in \mathbb{Q}$		✓ $1 \in \mathbb{R}^*$
el. symetryczny		brak $2 \cdot b = 1$ $b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	✓ $a + a' = 0$ $a' = -a \in \mathbb{Q}$	brak $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ nie dla $a = 0$		✓ $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
	półgrupa przemienna bez el. neutr.	monoid przemienny	grupa abelowa	monoid przemienny		grupa abelowa

Przykład 1.3.3. $(\mathbb{Z}, +)$ jest grupą przemienną. Rozwiązując w $\mathbb{Z}$ równanie $x + 5 = 8$, korzystamy z własności działania w grupie.

$$\begin{array}{ll}
x + 5 = 8 & \\
(x + 5) - 5 = 8 - 5 & \text{istnieje element przeciwny do 5, należący do } \mathbb{Z} \\
x + (5 - 5) = 3 & \text{dodawanie jest łączne w } \mathbb{Z} \\
x + 0 = 3 & \text{istnieje element neutralny} \\
x = 3 &
\end{array}$$

Przykład 1.3.4. Niech $X = \{1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś działanie $\circ$ to mnożenie liczb. Czy $(X, \circ)$ jest półgrupą/grupą (abelową)?

Jeśli $a, b, c \in X$, to istnieją $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ takie, że $a = 2^n, b = 2^m, c = 2^k$.

$$\text{wewnętrzne} \quad a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in A$$

$$\text{przemienne} \quad a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = b \circ a$$

$$\text{łączne} \quad (a \circ b) \circ c = 2^{n+m} \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n \cdot 2^{m+k} = a \circ (b \circ c)$$

$$\text{el. neutralny} \quad e = 2^s, s \in \mathbb{N}_0 \quad a \circ e = a \Leftrightarrow 2^{n+s} = 2^n \Rightarrow s = 0, e = 1 \in X$$

$$\text{brak el. odwrotnego} \quad a \circ b = 1 \Leftrightarrow 2^{n+m} = 2^0 \Leftrightarrow m = -n \Rightarrow m = -n \notin \mathbb{N}_0$$

Wniosek: monoid przemienny (tj. półgrupa przemienna z jedyneką)

O innym ciekawym przykładzie grupy można przeczytać w dodatku na końcu wykładu.

Definicja 1.3.5. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \rightarrow A$, $* : A \times A \rightarrow A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \wedge c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedyneką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemennym* lub *komutatywnym*.

Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna	
$\circ / +$	dodawanie	$\cdot / \cdot$	mnożenie
$a + b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e = 0$	zero	$e = 1$	jedynka
$a' = -a$	element przeciwny	$a' = a^{-1}$	element odwrotny

$$\begin{array}{ll}
na = \underbrace{a + \dots + a}_n, \quad n \in \mathbb{N} & a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n \\
0 \cdot a = 0 & a^0 = e = e = 1 \\
m \in \mathbb{Z}, m < 0 & ma = \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_m \\
& a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_n
\end{array}$$

Używając powyższej notacji, piszemy po prostu $(A, +, \cdot)$.

Definicja 1.3.6. Niech K będzie zbiorem zawierającym co najmniej dwa elementy. Pierścień przemienny z jedynką $(K, \circ, *)$ nazywamy *ciałem*, jeśli ¹

$$\forall a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a' \in K \quad a * a' = 1.$$

Uwaga 1.3.7.

- i) $(K, \circ, *)$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$ nazywanym *zerem* i oznaczanym jako 0) oraz $(K \setminus \{0\}, *)$ jest grupą abelową i ponadto działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$. ^{2 3}
- ii) Jeśli $(K, \circ, *)$ jest ciałem, to wówczas grupę $(K, \circ)$ nazywamy *grupą addytywną* ciała K , zaś grupę $(K \setminus \{0\}, *)$ nazywamy *grupą multiplikatywną* ciała K .
- iii) W ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący

$$\frac{a}{b} := a * b^{-1}, \quad a, b \in K, b \neq 0.$$

Przykład 1.3.8. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych

$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

¹Ciało to pierścień przemienny z jedynką (różną od zera, tj. $1 = e_* \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne. Każde ciało zawiera zatem co najmniej dwa elementy, mianowicie 0 i 1. Zbiór elementów niezerowych jest niepusty i tworzy grupę z mnożeniem.

²Warunek rozdzielności mnożenia względem dodawania pozwala rozróżniać działania mnożenia i dodawania. Stąd zamiast pisać $(a \cdot b) + c$ piszemy $a \cdot b + c$. Oznacza to, że mnożenie wiąże argumenty silniej niż dodawanie.

³Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. By dowieść implikacji w przeciwnym kierunku wystarczy zaobserwować, że $a * 0 = 0 * a = 0$ dla dowolnego $a \in K$. Równość ta wynika z własności rozdzielności mnożenia względem dodawania, mianowicie $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, skąd $a \cdot 0 = 0$. Analogicznie dowodzimy, że $0 \cdot a = 0$. Z przemienności i łączności działania $*$ w zbiorze $K \setminus \{0\}$ oraz z równości $a * 0 = 0 * a = 0$ wynika przemienność i łączność działania $*$ w zbiorze K .

- ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych
- iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedyneką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)
- iv) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów ma strukturę pierścienia przemiennego jedyneką.
- v) $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ zbiór wszystkich funkcji wymiennych jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji ma strukturę ciała.
- vi) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
 $+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem ⁴ (tzw. *ciało reszt modulo p*). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało	$+_5$	0	1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4
	1	1	2	3	4	0
	2	2	3	4	0	1
	3	3	4	0	1	2
	4	4	0	1	2	3
	$\cdot_5$	0	1	2	3	4
	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4
	2	0	2	4	1	3
	3	0	3	1	4	2
	4	0	4	3	2	1

Zauważmy, że w ciele $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zachodzi równość $5 \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{5 \text{ razy}} = 0$.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem	$+_4$	0	1	2	3
	0	0	1	2	3
	1	1	2	3	0
	2	2	3	0	1
	3	3	0	1	2
	$\cdot_4$	0	1	2	3
	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3
	2	0	2	0	2
	3	0	3	2	1

Definicja 1.3.9. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A$, $a \neq 0, b \neq 0$ nazywamy *dzielnikami zera*, jeśli $a \cdot b = 0$.

Uwaga 1.3.10. W ciele nie ma dzielników zera.

Dowód. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem oraz niech $a, b \in K$. Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $a \neq 0$, to istnieje $a^{-1} \in K$. Otrzymujemy

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Zatem $b = 0$. $\square$

⁴Jest to przykład ciała o skończonej liczbie elementów. Tego typu ciała nazywamy *ciałami skończonymi* lub inaczej *ciałami Galois*.

Definicja 1.3.11. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem. Niech 1 oznacza element neutralny mnożenia, zaś 0 element neutralny dodawania w ciele. Najmniejszą liczbę naturalną n taką, że

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ razy}} = 0,$$

nazywamy *charakterystyką ciała* K i oznaczamy symbolem $\text{char}(K)$. Jeśli taka liczba naturalna nie istnieje, mówimy, że ciało K jest *charakterystyki zero*.

Można wykazać, że charakterystyka dowolnego ciała albo jest równa zero albo jest *liczbą pierwszą* p . Ciała $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(X)$ są ciałami charakterystyki zero, zaś $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem charakterystyki dodatniej, mianowicie $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$. Każde ciało o skończonej liczbie elementów jest ciałem charakterystyki dodatniej. Ciała o nieskończonej liczbie elementów mogą mieć tak charakterystykę dodatnią jak i równą zero. Przykładem ciała o nieskończonej liczbie elementów, którego charakterystyka jest dodatnia, jest ciało funkcji wymiernych o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Przykład 1.3.12. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$(\mathbb{C}, +)$ jest grupą abelową.

Działanie $+$ jest wewnętrzne, łączne, przemienne. Elementem neutralnym jest $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, zaś elementem przeciwnym do $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ jest $(-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ jest grupą abelową.

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne.

przemienność:

$$(x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$$

łączność: $L = P$

$$\begin{aligned} L &= (a, b) \cdot [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= (a x_1 x_2 - a y_1 y_2 - b x_1 y_2 - b x_2 y_1, a x_1 y_2 + a x_2 y_1 + b x_1 x_2 - b y_1 y_2) \\ P &= [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] \cdot (x_2, y_2) = (a x_1 - b y_1, a y_1 + b x_1) \cdot (x_2, y_2) = \\ &= (a x_1 x_2 - b y_1 x_2 - a y_1 y_2 - b x_1 y_2, a x_1 y_1 - b y_1 y_2 + a y_1 x_2 + b x_1 x_2) \end{aligned}$$

el. neutralny: $e = (1, 0)$

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1, 0) \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1 - 0 \cdot y_1, 1 \cdot y_1 + 0 \cdot x_1) = (x_1, y_1)$$

el. odwrotny do $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$:

$$(x_1, y_1) \cdot (a, b) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x_1, y_1) \neq (0, 0) \quad a = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad b = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$, bowiem $L = P$.

$$L = (a, b) \cdot [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2, ay_1 + ay_2 + bx_1 + bx_2)$$

$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] + [(a, b) \cdot (x_2, y_2)] = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) + (ax_2 - by_2, ay_2 + bx_2)$$

Definicja 1.3.13. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \xrightarrow{n \mapsto n} \mathbb{Z} \xrightarrow{n \mapsto \frac{n}{1}} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto (x,0)]{h} \mathbb{C}$$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$
 $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$

łączność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$
 $[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia

el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$
 $= (x_1 x_3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że

$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$.

Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujemy $i := (0, 1)$ tzw. *jednostka urojona*. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\text{Re}z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\text{Im}z$. Liczby postaci iy , $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\text{Re}z_1 = \text{Re}z_2 \wedge \text{Im}z_1 = \text{Im}z_2)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) & (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) & (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

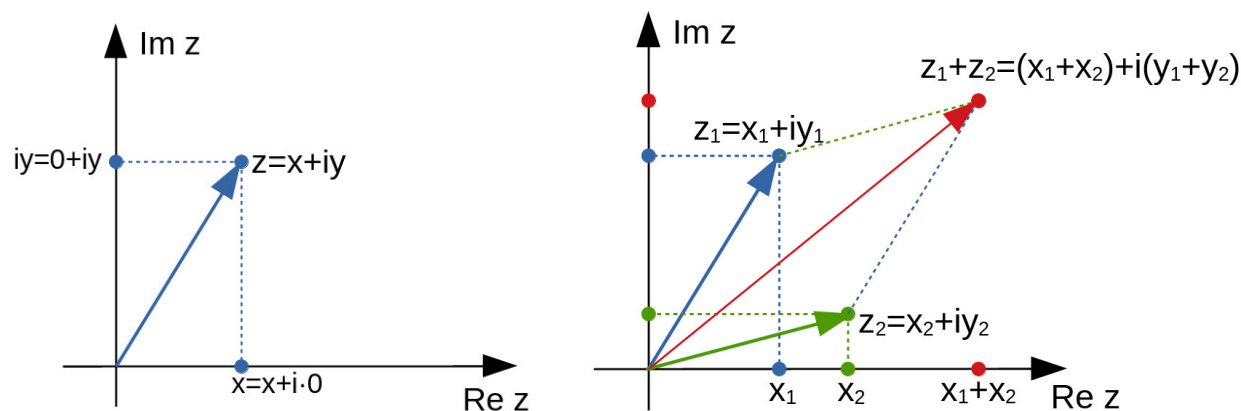
$$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \quad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

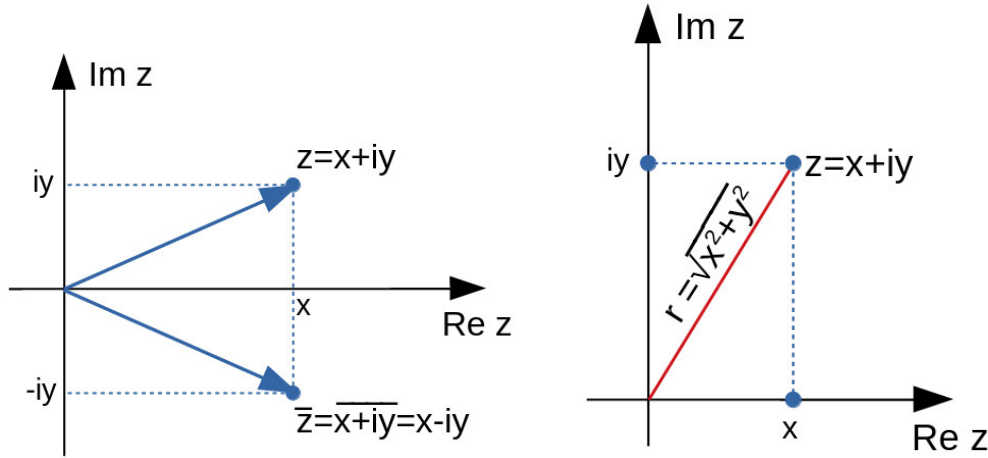
Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0, 0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$



Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z . Oznaczamy ją $\bar{z}$.
- ii) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy *modułem* liczby z . Oznaczamy ją $|z|$.



Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2$
- ii) $\operatorname{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- iii) $\overline{(\bar{z})} = z$
- iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$
- vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- viii) $\operatorname{Re}z \leq |\operatorname{Re}z| \leq |z|$, $\operatorname{Im}z \leq |\operatorname{Im}z| \leq |z|$
- ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta) $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$

Dowód. vii) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

viii) $\operatorname{Re}z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

x) $1 = \operatorname{Re}1 = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2}\right) \stackrel{\text{i)}}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \stackrel{\text{def}}{\leq} \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \stackrel{\text{iv)v)}}{=} \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \Rightarrow$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \wedge |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$

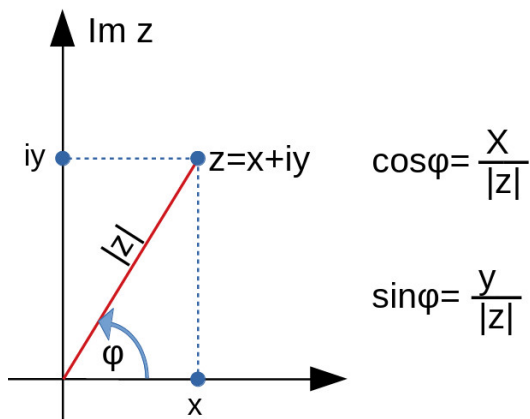
□

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z . Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z .

Gdy $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$$z = 7$$

$$z = 7(1 + 0i)$$

$$z = -i$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$z = 1(0 + (-1) \cdot i)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = -1 \end{cases}$$

$$z = -\sqrt{27} - 3i$$

$$|z| = \sqrt{27 + 9} = 6$$

$$z = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = 0 + 2k\pi$$

$$\arg z = 0$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg z = \frac{3}{2}\pi$$

$$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg z = \frac{7}{6}\pi$$

$$z = 7(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$-i = 1(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$$

$$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Wówczas

$$\text{i) } z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)),^5$$

$$\text{ii) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\text{iii) } z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{tzw. wzór de Moivre'a}$$

$$\begin{aligned} \text{Dowód. i) } z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \left(\underbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}_{\cos(\alpha + \beta)} + i \underbrace{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}_{\sin(\alpha + \beta)} \right) \end{aligned}$$

ii) analogicznie

iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.

Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. $\square$

Przykład 2.2.3. Przedstaw liczbę $z = -\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$ w postaci trygonometrycznej.

METODA I: Ponieważ $|z| = 1$, zatem $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ dla pewnego $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\sin \frac{\pi}{10} < 0 \\ \sin \varphi = \cos \frac{\pi}{10} > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi \text{ z II ćwiartki}$$

Na mocy wzorów redukcyjnych $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ oraz $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{METODA II: } z &= -\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = i^2 \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = i (\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}) = \\ &= (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) (\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right). \end{aligned}$$

Przykład 2.2.4. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} &= 2^{10}(\cos(\frac{140}{12}\pi) + i \sin(\frac{140}{12}\pi)) = 2^{10}(\cos(\frac{35}{3}\pi) + i \sin(\frac{35}{3}\pi)) = \\ &= 2^{10}(\cos(12\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(12\pi - \frac{\pi}{3})) = 2^{10}(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\ &= 2^9(1 - \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

⁵Mnożeniu liczb zespolonych można przypisać następującą interpretację geometryczną, prowadzi ono do zmiany długości wektora i jego obrotu. Zobacz także tutaj.

Twierdzenie 2.2.5 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Wówczas prawdziwe są następujące równości.

$$\text{i) } \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (k = 0 \text{ lub } k = -1)$$

$$\text{ii) } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (k = 0 \text{ lub } k = -1)$$

$$\text{iii) } \arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iv) } \arg \bar{z} = 2\pi - \arg z, \text{ gdy } \arg z \neq 0$$

Dowód. iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z + 2k\pi = 2\arg z + 2k\pi$. Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę.

$$\text{iv) } z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ oraz } 0 = \arg(|z|^2) = \arg z + \arg \bar{z} + 2k\pi, \text{ skąd } \arg \bar{z} = -2\pi - \arg z \quad \square$$

$$\text{Przykład 2.2.6. } \arg i = \frac{\pi}{2} \quad \arg(-1) = \pi \quad \arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$$

$$i = (-1) \cdot (-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}, \text{ tj. } k = -1$$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z .

$$\text{Przykład 2.2.7. a) } e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$$

$$\text{b) } e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\text{i) } e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}, \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}},$$

$$\text{ii) } (e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{iii) } e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{iv) } e^{i\alpha} \neq 0, \quad |e^{i\alpha}| = 1.$$

Dowód. i), ii), iii) Analogiczny jak dla własności działań na liczbach w postaci trygonometrycznej.

$$\text{iv) Mamy } |e^{i\alpha}| = |\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1, \text{ zatem } e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = 0, \text{ co nie jest możliwe, gdyż gdy } \cos \alpha = 0, \text{ to } \sin \alpha = \pm 1. \quad \square$$

Wniosek 2.2.9. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2 e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

$$\text{i) } z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)},$$

$$\text{ii) } z^k = r^k e^{ik\varphi}, \text{ dla } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{iii) } \bar{z} = r e^{-i\varphi}.$$

$$\text{Dowód. iii) Jeśli } \arg z = \varphi, \text{ to } \arg \bar{z} = 2\pi - \varphi, \text{ skąd } e^{(2\pi i - \varphi)i} = e^{2\pi i} e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}. \quad \square$$

Wzory Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

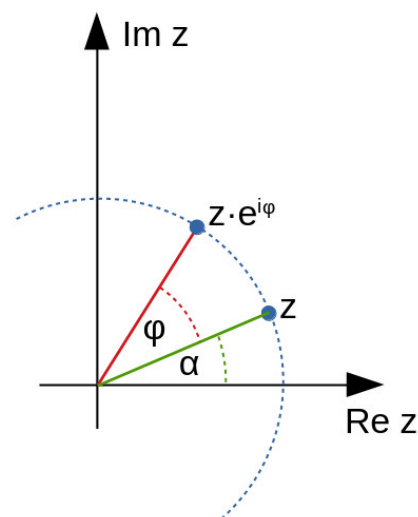
Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ

$$z = re^{i\alpha}$$

$$z \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$$



Przykład 2.2.10. Rozwiąż równanie $z^3 = (\bar{z})^3$.

Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.

Założmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^3 &= (\bar{z})^3 \\ r^3 e^{3i\varphi} &= r^3 e^{-3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 \\ 6\varphi &= 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.

2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby w* .

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

I sposób:
postać algebraiczna

$$z = x + iy, w = 8 + 6i$$

$$z^2 = w$$

$$(x + iy)^2 = 8 + 6i$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$y \neq 0 \text{ (gdy } y = 0, \text{ to } z = x, x^2 \neq 8 + 6i)$$

$$x = \frac{3}{y}, \frac{9}{y^2} - y^2 = 8$$

$$y^4 + 8y^2 - 9 = 0, \Delta = 100$$

$$y^2 = 1, y = \pm 1$$

$$z = 3 + i \vee z = -3 - i$$

II sposób:
postać wykładnicza

$$z = |z|e^{i\varphi}, w = 8 + 6i$$

$$|z|^2 e^{2i\varphi} = w = |w|e^{i\alpha}$$

$$|w| = 10$$

$$w = 8 + 6i = 10\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} = 10e^{i\alpha}$$

$$2\varphi = \alpha + 2k\pi, |z| = \sqrt{10}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + k\pi$$

$$z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k}, k \in \{0, 1\}$$

III sposób:
postać algebraiczna

$$8 + 6i = 9 + 6i - 1 =$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 =$$

$$= (3 + i)^2$$

$$z = 3 + i \vee z = -3 - i$$

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, wówczas

$$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \cdot \text{Otrzymu-}$$

jemy $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $\alpha_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. $\square$

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

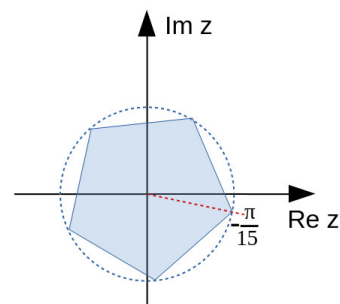
Obliczamy $|w| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Zatem

$$z^5 = w \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases} \cdot$$

Stąd $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n -kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

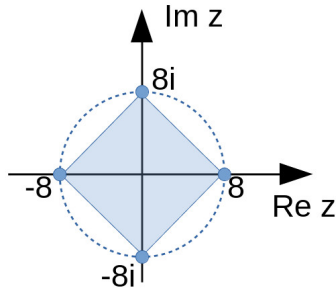
Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3 . Będą one wierzchołkami kwadratu.

$$z^4 = \left((\sqrt{3} - i)^3\right)^4$$

$$\text{Niech } z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i.$$

Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad z_3 = z_2 \cdot i = -8$$



Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n .

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W , jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout). Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + \text{const.}$ Stąd $W(z_0) = 0 \Leftrightarrow W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W* , jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z - 1) - (z - 1) = (z - 1)(z^2 - 1) = (z - 1)^2(z + 1)$.

Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2, \dots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2, \dots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \quad \square$$

Trójmian kwadratowy $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2, \sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.

Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0 &\Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0 \\ &\Rightarrow \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0. \quad \square$

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] = \\ &= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i) \\ \text{rozwiązania } z_1 &= 1, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i, \quad \bar{z}_2 = z_3 \end{aligned}$$

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$$\begin{aligned} (z-2i)(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i) &= 0 \\ (z-2i)(z+1)(z^2 + (1+3i)z + 3i) &= (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0 \\ \text{rozwiązania } z_1 &= 2i, \quad z_2 = z_3 = -1, \quad z_4 = -3i \end{aligned}$$

Wzory Viète'a

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$\begin{aligned} c_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n) &= -c_{n-1} \\ c_n[r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + (r_2 r_3 + r_2 r_4 + \dots + r_2 r_n) + \dots + r_{n-1} r_n] &= c_{n-2} \\ &\vdots \\ c_n r_1 r_2 \dots r_n &= (-1)^n c_0 \end{aligned}$$

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2) \dots (z-r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(z) &= c_n[(-1)^n r_1 r_2 \dots r_n + (-1)^{n-1} r_2 \dots r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \dots r_n \cdot z + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} r_2 r_3 \dots r_{n-1} \cdot z + \dots + (-r_1 - r_2 \dots - r_n) z^{n-1} + z^n]. \quad \square \end{aligned}$$

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c .

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$.

Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.

Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.

Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \Rightarrow c = 12$.

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

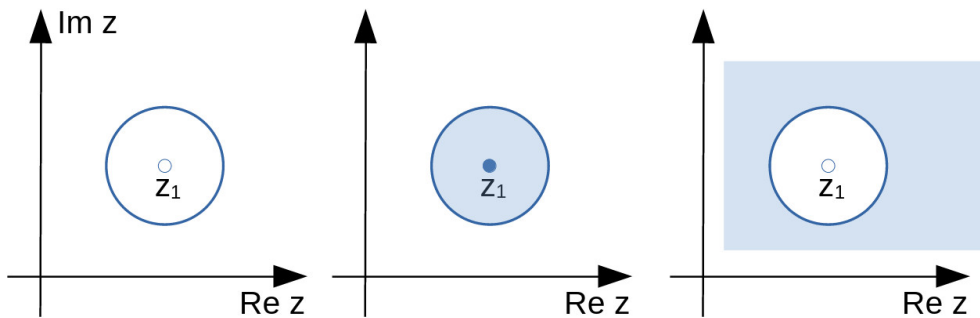
1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

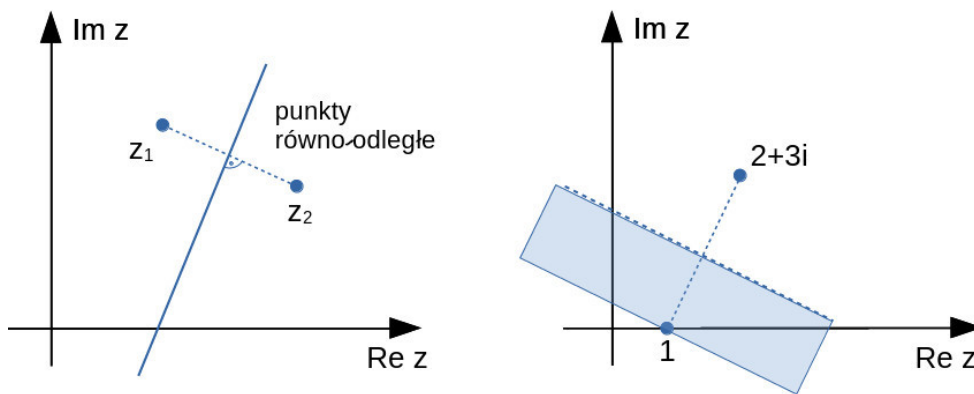
2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$|z - z_1| = r$ okrąg $|z - z_1| \leq r$ koło $|z - z_1| \geq r$ zewnątrz koła



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2



$$\text{np. } |z - 1| < |z - 2 - 3i|$$

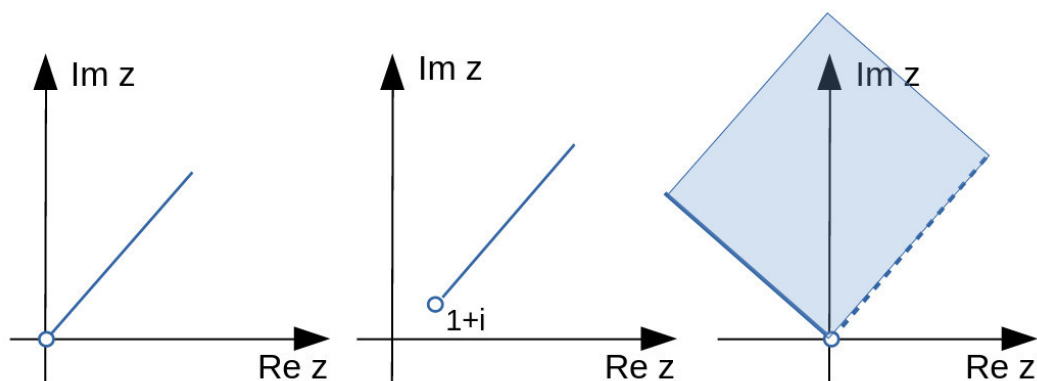
4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

Przykład 2.4.1.

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

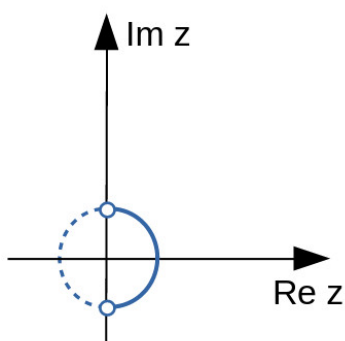
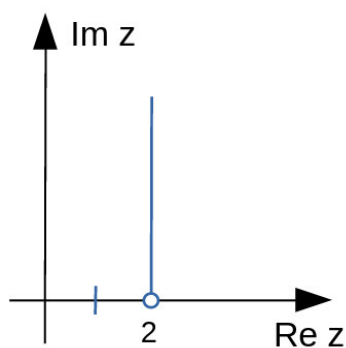
$$\arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$$



$$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$$



5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i] \cdot [x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2 - xyi + xi + xyi + xi + y^2 - 1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \operatorname{Im} w > 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m \times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nazywamy *i -tym wierszem* macierzy A , zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ nazywamy *j -tą kolumną* macierzy A .

Oznaczmy symbolem $M_{m \times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K . Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n* .

Dla $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
 $A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{macierz zerowa wymiaru } m \times n$$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

- a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$
- b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$
- c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:

$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n

$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n

$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^G(K) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^D(K)$$

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
 $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
 $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m \times p}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{p \times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
 $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$
Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-razy}}$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
 $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n \times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB , BA , D^2 .

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = AB \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{schemat Falka}$$

			0	1	
			2	2	
			-1	1	$\textcolor{red}{1} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$
1	2	3	$\textcolor{red}{1}$	8	
4	5	6	4	20	

$$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$$

		1	2	3	
		4	5	6	
0	1	4	5	6	
2	2	10	14	18	
-1	1	3	3	3	

$AB \neq BA$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$$CD \in M_2(\mathbb{R}), \quad DC \in M_2(\mathbb{R}), \quad CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}, \quad CD \neq DC$$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m \times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $A + B = B + A$
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$
- iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m \times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

Wniosek 3.1.9. i) $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemianną z jedyneką.

ii) $(M_n(K), +, \cdot)$ jest pierścieniem nieprzemiannym z jedyneką.

Poniższy przykład pokazuje, że $(M_n(K), +, \cdot)$ nie jest ciałem, bowiem w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K istnieją *dzielniki zera*.

Przykład 3.1.10. Rozważmy macierze $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczamy $BA = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ oraz $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 3.1.11. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

Definicja 3.1.12. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\text{tr}(A)$.

Przykład 3.1.13. $\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.14. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

$$\text{i) } \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T) \quad \text{ii) } \operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

$$\text{iii) } \operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A) \quad \text{iv) } \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Wniosek 3.1.15. Jeśli $A, B \in M_{m \times n}(K)$, to wówczas $\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(AB^T) = \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.16. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.17. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T) \right]^T = \frac{1}{2} \left[(A + A^T)^T \right] = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antisymetryczna

Definicja 3.1.19. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij} , dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array} \right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j -tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
 $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa (tylko dla wyznaczników stopnia 3!)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix} \quad - \left[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2 \right] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K .

i) *Minorem elementu a_{ij}* nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n - 1$ otrzymanej poprzez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A . Oznaczamy go symbolem M_{ij} .

ii) *Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}* nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace’a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik},$
(rozwiniecie względem i -tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}.$
(rozwiniecie względem j -tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rozwijamy względem czwartej kolumny,}$$

a potem względem ostatniego wiersza.

$$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$$

$$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

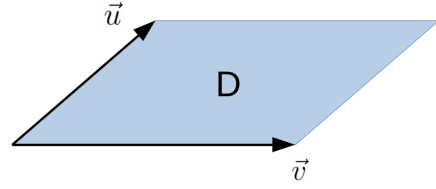
$$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$$

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy stopnia 2

Rozważmy wektory na płaszczyźnie $\vec{u} = [a, b]$, $\vec{v} = [c, d]$. Niech D będzie równoległobokiem rozpiętym na tych wektorach. Wówczas pole $|D|$ tego równoległoboku jest równe $|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$.

Dowód można znaleźć w [3].



Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k -tą kolumnę macierzy A , czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i) $\det A = \det(A^T)$
- ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.
- iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.
- iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$
- v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.
- vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.
- vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K : A_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.
- viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A , to wyznacznik nie zmienia się.
- ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array} \right],$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, zaś $?$ dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_n$.

Przykład 3.2.10.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right] \quad \text{macierz blokowo-diagonalna}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2 - 7) \cdot (40 - 15) = -125$$

Wniosek 3.2.11. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne: $w_i \leftrightarrow w_j$ zamiana wierszy miejscami (między sobą)
 $\lambda \cdot w_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$ pomnożenie wiersza przez liczbę (różną od zera)
 $w_i + \lambda \cdot w_j, \lambda \in K$ dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A & \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftarrow w_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{3} \cdot w_3} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_4 + 5w_3} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22 \end{aligned}$$

Przykład 3.2.13. Dane są macierze $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ takie, że $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \neq j \\ 2(i-1) + j & ; i = j \end{cases}, \text{ zaś } \det B = 9. \text{ Oblicz wyznacznik macierzy } C = 3B^3 A^2 B^T.$$

Korzystając z własności wyznaczników, obliczamy

$$\det C = 3^5 \det(B^3) \det(A^2) \det(B^T) = 3^5 (\det B)^4 (\det A)^2.$$

$$\text{Ponadto } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_5 - w_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 = 3^5 \cdot 2^3.$$

Zatem $\det C = 3^5 \cdot 9^4 \cdot (3^5 \cdot 2^3)^2 = 3^{23} \cdot 2^6$.

3.3 Macierz odwrotna

Jeśli dla danej macierzy kwadratowej $A \in M_n(K)$ istnieją macierze $B, C \in M_n(K)$ takie, że $AB = I$ oraz $CA = I$, to wówczas $B = C$.⁶ Istotnie,

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1} .

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0 \wedge c = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zatem nie istnieje A^{-1} .

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D .

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemienną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową*.

⁶Można uzasadnić tenże fakt przy słabszych założeniach, mianowicie jeśli dla danej macierzy $A \in M_n(K)$ istnieje macierz $B \in M_n(K)$ taka, że $BA = I$, to wówczas $AB = I$ i vice versa.

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. Za pomocą definicji

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a-b & 5a+2b \\ 3c-d & 5c+2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=1 \\ 5a+2b=0 \\ 3c-d=0 \\ 5c+2d=1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij} . Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+i} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

$$[A|I] \xrightarrow[\text{tylko na wierszach!}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\longrightarrow$ macierz trójkątna górna $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[-w_2 \text{ na koniec}]{-\frac{1}{2}w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{Zatem } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze A^{-1} , A^T , AB , αA , A^r również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} & \text{iv) } (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1} \\ \text{ii) } (A^{-1})^{-1} = A & \text{v) } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\ \text{iii) } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} & \text{vi) } (A^r)^{-1} = (A^{-1})^r \end{array}$$

Przykład 3.3.11. Rozwiążemy równanie macierzowe $E^4(X - 4I)^T = \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T$ wiedząc, że $D, E, F \in M_4(\mathbb{R})$ są nieosobliwe, ponadto macierz D jest macierzą symetryczną, zaś

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ D jest symetryczna, spełnia warunek $D = D^T$. Stąd $D^{-1}D^T = D^{-1}D = I$.

Ponadto F jest diagonalna, zatem $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Macierz E jest nieosobliwa, a zatem odwracalna. Obliczamy

$$\begin{aligned} E^4(X - 4I)^T &= \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T = \frac{1}{2}E^3F^3 \\ (X - 4I)^T &= E^{-4}\frac{1}{2}E^3F^3 = \frac{1}{2}E^{-1}F^3 \\ X - 4I &= \left(\frac{1}{2}E^{-1}F^3\right)^T = \frac{1}{2}(F^3)^T(E^{-1})^T \\ X &= 4I + \frac{1}{2}(F^3)^T(E^{-1})^T. \end{aligned}$$

Pozostaje obliczyć E^{-1} i wykonać odpowiednie mnożenia oraz dodawania.

Twierdzenie 3.3.12. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}, \text{ to } A \text{ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są}$$

$$\text{macierze } A_1, A_2, \dots, A_k. \text{ Wówczas } A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{-1} \end{bmatrix}.$$

Przykład 3.3.13. Czy $A = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ jest odwracalna? Jeśli tak, oblicz A^{-1} .

$$\text{Jest to macierz blokowo-diagonalna } \left[\begin{array}{c|ccc} 22 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \pi \end{array} \right].$$

Każdy z bloków jest macierzą nieosobliwą, zatem A jest odwracalna.

$$\text{Obliczamy } \begin{bmatrix} 22 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Stąd } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$$

TEMAT: *Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych - podstawowe pojęcia

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

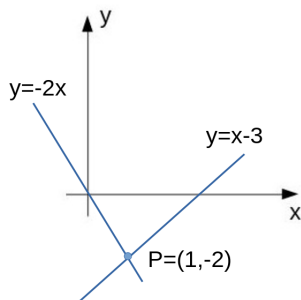
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi*. Jeśli $b_1 = \dots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jeśli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

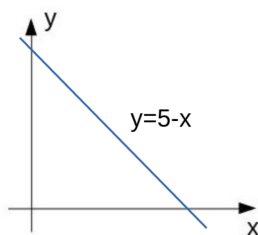
Przykład 4.1.1.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$



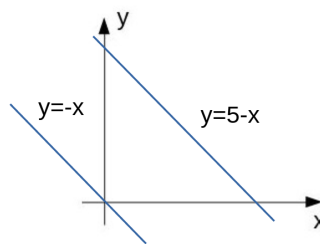
układ oznaczony

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$



układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$



układ spreczny

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz kolumna kolumna
współczynników niewiadomych wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4.2 Układy Cramera

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera*.

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera). Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

Przykład 4.2.4.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{układ jest układem Cramera}$$

Metoda eliminacji:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, \text{ zatem } 2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1, \text{ skąd } x = \frac{11}{8} \text{ oraz } y = -\frac{7}{16}$$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$$X = A^{-1}B, A^{-1} = ?$$

$$\det A = 16, D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, X = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad x = \frac{11}{8}, y = -\frac{7}{16}$$

Wzory Cramera:

$$W = \det A = 16 \neq 0, W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22, W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}, y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$$

Wniosek 4.2.5. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \dots = x_n = 0$.

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.2.6.

Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.2.7. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

4.3 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego

Definicja 4.3.1. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. *Minorem stopnia k* macierzy A , gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.3.2. *Rzędem macierzy* $A \in M_{m \times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\text{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

Przykład 4.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}, r(A) \leq 3, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0, r(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad r(B) = 1, \quad \text{Można zauważyć, że } k_2 = 3k_1. \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ale } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad r(C) = 2 \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad r(A) \leq 3, \quad w_2 = 2w_1, \quad w_3 = 3w_1, \quad r(D) = 1 \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.3.4 (Własności rzędu macierzy). Niech $A \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas

- i) $r(A) = r(A^T)$,
- ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. $\square$

Definicja 4.3.5. Macierz $A \in M_{m \times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.3.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

4 schodki 3 schodki to nie postać schodkowa

Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątną górną nieosobliwą. $\square$

Przykład 4.3.8.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3 - 4w_1 \\ w_4 - 4w_1}]{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix}, \quad r(D) = 3$$

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m \times (n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego). Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Wniosek 4.3.10. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 4.3.11.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 4x + y + 7z = 8 \\ 5x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array} \right], r(A) \leq 3, r(U) \leq 3$$

$$U \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array} \right]$$

$r(U) = 3 \neq r(A) = 2 \Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M . Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M , przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładniej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \dots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \dots, x'_n$.

Przykład 4.3.12.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 1 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array} \right], \quad r(A) \leq 3, \quad r(U) \leq 3$$

$$U \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{y} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3+5w_1]{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ 0 & 14 & 2 & 36 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array} \right]$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ minor niezerowy}$$

$$\begin{cases} -y + 2x = 7 - 3z \\ 7x = 18 - z \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

$$\text{układ nieoznaczony, rozwiązania} \quad \begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Wniosek 4.3.13 (Własności rzędu macierzy). Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas

i) Jeśli $\det A \neq 0$, to wówczas $r(AB) = r(B)$.

ii) Jeśli $\det B \neq 0$, to wówczas $r(AB) = r(A)$.

4.4 Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U , skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U , zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array} \right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r,r+1} & \cdots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.4.1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & \textcolor{red}{1} \\ 0 & -1 & 2 & 4 & \textcolor{red}{0} \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{-1} \end{array} \right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

Przykład 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u = 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u = 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u = 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u = 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[-2 \cdot w_5]{w_2 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[w_5-w_1]{\begin{array}{l} w_2-2w_1 \\ w_3-3w_1 \\ w_4-4w_1 \end{array}} \\ &\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x} \mathbf{z} \mathbf{t} \mathbf{u} \mathbf{y}]{k_2 \text{ za } k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2} \\ &\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1) \cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x} \mathbf{z} \mathbf{u} \mathbf{t} \mathbf{y}]{k_3 \leftrightarrow k_4} \\ &\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{równoważny układ } \begin{cases} x + 2y = 11 \\ z - \frac{7}{3}t = -3 \\ u + \frac{8}{3}t = 3 \end{cases} \quad \text{rozwiązania } \begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5 - 3 = 2$ parametrów

Uwaga 4.4.3. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.4.4. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad r := r(A) = r(U) = 2, n = 5, n - r = 3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
k_1, k_5	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

Uwaga 4.4.5. W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Przykład 4.4.6.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[(-1) \cdot w_3]{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x = 1, y = 1, z = 1$

Przykład 4.4.7. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-w_1]{w_2-2w_1, w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[k_1 \text{ za } k_3]{\text{zmienne } x_2 \ x_3 \ x_1 \ x_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array} \right]$$

Wnioski:

Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.

Zatem układ jest nieoznaczony.

Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right],$$

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

TEMAT: *Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$*

5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{0} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

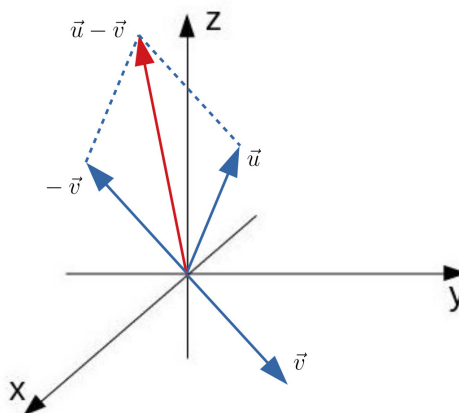
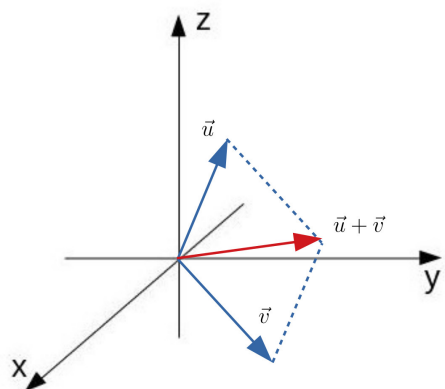
Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$ suma wektorów

$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$ iloczyn wektora przez skalar

$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$ wektor przeciwny do $\vec{u}$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$ różnica wektorów



Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{i} = [1, 0, 0]$, $\hat{j} = [0, 1, 0]$, $\hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

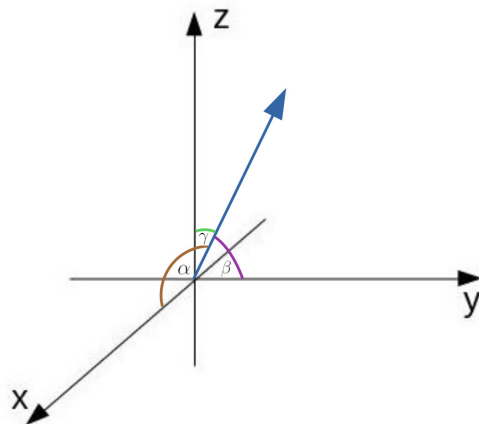
Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|} \right]$ oraz

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_z^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ , odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos \alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos \beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos \gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.



Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$. Przyjmujemy, że jego miara należy do przedziału $[0, \pi]$.

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Przykład 5.1.3. $[1, 4, 0] \circ [2, -1, 1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.

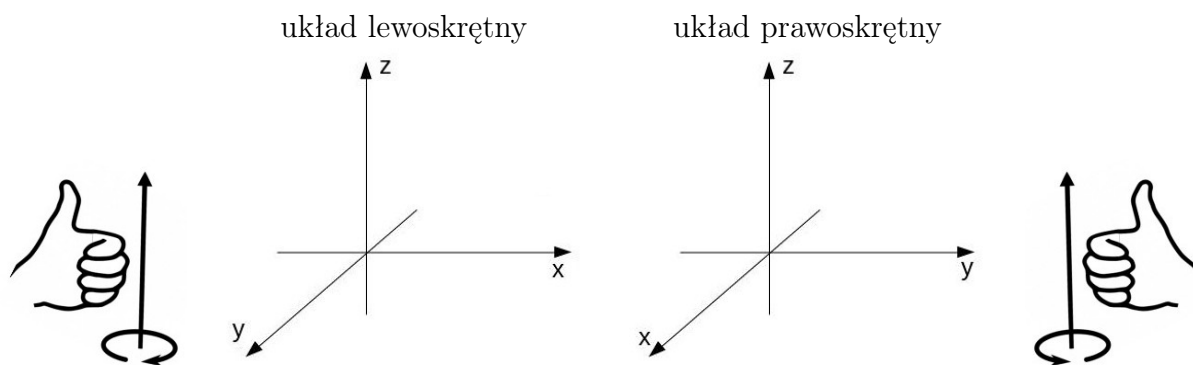
Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- iii) $(\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$
- iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$
- v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- vi) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.6. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

- i) $\vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v}$,
- ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$,

iii) orientacja trójki $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Jeśli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 5.1.7. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u} = [1, 2, -3]$, $\vec{v} = [3, 4, 5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = [22, -14, -2]$$

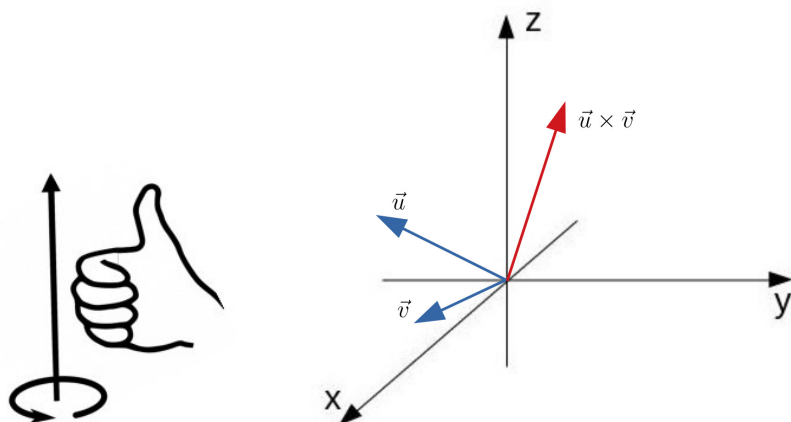
lub metody Sarrusa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 4\hat{k} - 9\hat{j} - 6\hat{k} + 12\hat{i} - 5\hat{j} = 22\hat{i} - 14\hat{j} - 2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$
- iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
- iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0})$

Reguła prawej dłoni:



Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dowód. } & \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \\ & = [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \square \end{aligned}$$

Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Dowód. Niech $\alpha = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos \alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. $\square$

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1, 0, 2), B = (5, 1, 5), C = (3, -1, 2), D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ jest równa zero.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= [4, 1, 3], \vec{AC} = [2, -1, 0], \vec{AD} = [0, 3, 3] \\ (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$
- ii) $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$
- iii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{a})$
- iv) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π .

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{Równanie normalne: } \pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{Równanie ogólne: } \pi : Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Przykład 5.2.1. i) $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3], P_0 \in \pi, \vec{n} \perp \pi, \pi = ?$

$$\pi : 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0 \text{ równanie normalne}$$

$$\pi : x - y + 3z - 14 = 0 \text{ równanie ogólne}$$

ii) Płaszczyzna Oxz opisana jest równaniem $y = 0$.

iii) Z równania płaszczyzny $\pi : x + z = 0$ możemy odczytać wektor normalny $\vec{n} = [1, 0, 1]$ oraz punkt należący do płaszczyzny $P_0 = (0, 0, 0)$.

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}, \vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{0}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π .

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

$$\text{Równanie parametryczne: } \pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Przykład 5.2.2. i) Napiszemy równanie parametryczne i równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy .

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

Płaszczyznę π możemy opisać równaniem parametrycznym postaci

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s & = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s & = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s & = 4 \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Wektor $\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \hat{j}$ jest wektorem normalnym płaszczyzny π . Znajdziemy jego współrzędne.

$$\overrightarrow{AB} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 1]$$

Równanie ogólne płaszczyzny π ma postać $\pi : 0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 4) = 0$, skąd $\pi : z = 4$.

ii) Zapiszemy równanie parametryczne płaszczyzny π danej równaniem ogólnym

$$\pi : x - y + 3z - 14 = 0.$$

Przyjmijmy $y = t$, $z = s$, wówczas

$$\pi : \begin{cases} x = t - 3s + 14 \\ y = t \\ z = s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci $\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$. Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem

$$\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) : [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}.$$

5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l .

$$P_0 \in l \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej l .

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t , otrzymujemy równanie postaci $l : \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy *równaniem kierunkowym* prostej l .

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

$$P \in l \Leftrightarrow (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6, -1, 1] \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

$$\text{Wówczas } \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1, 13, 19] \text{ oraz } l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{0}$,
 $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{0}$.

Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

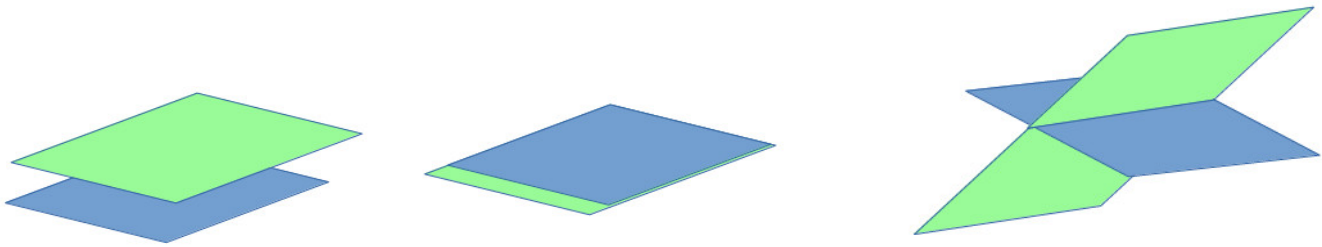
Płaszczyzny mogą być równoległe. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2$, $r(A) = 1$.

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej.
W szczególności mogą być prostopadłe.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$$

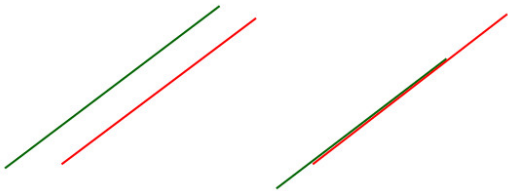


Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Proste mogą być równoległe. $l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \emptyset$.

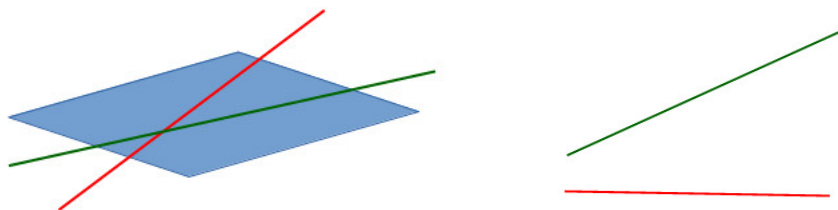


Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \emptyset$.

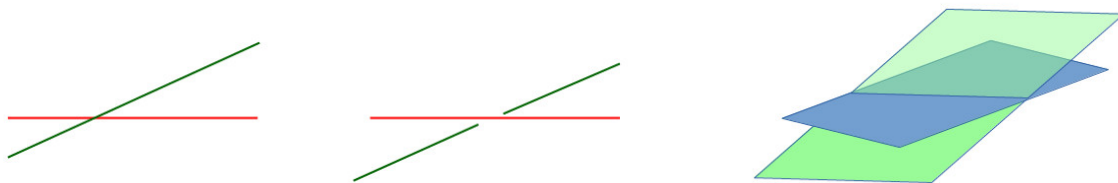
Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.



Kąty

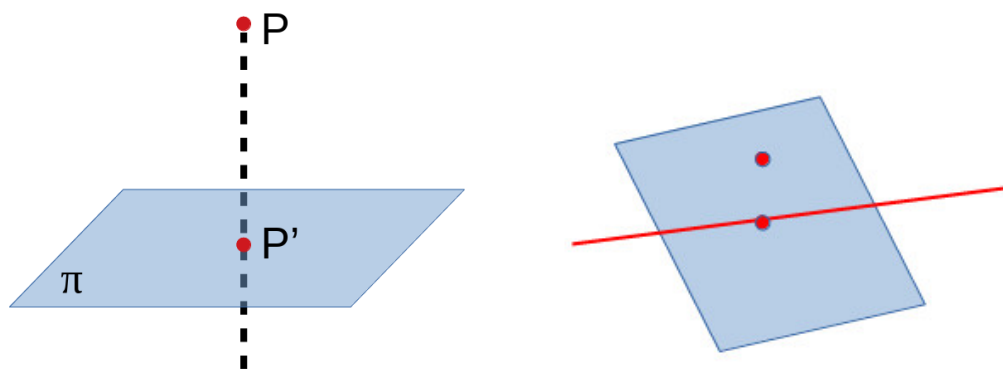
Definicja 5.4.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.



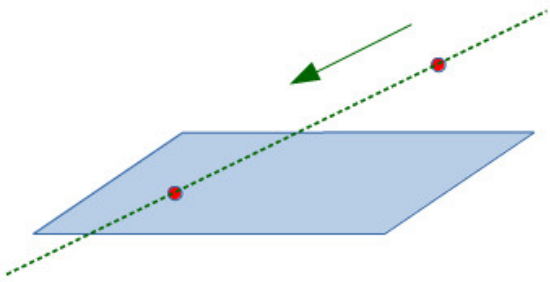
Definicja 5.4.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π* nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l* nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.

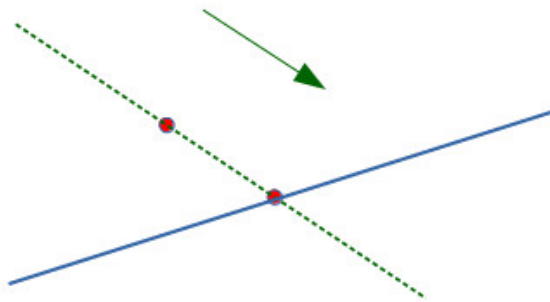


Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:



Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l :



Przykład 5.4.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

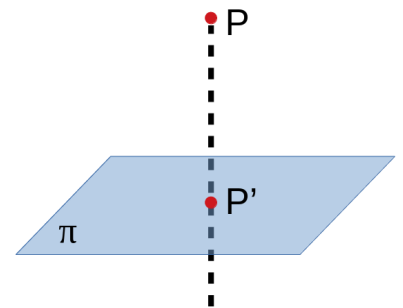
$$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

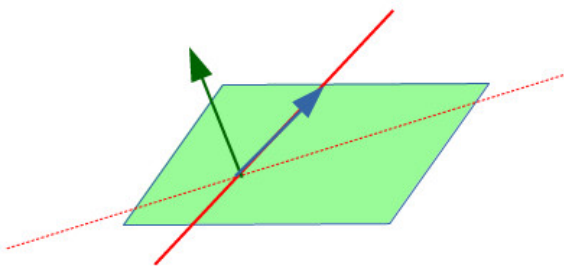
$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \pi : -3(x - 2) - (y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

$$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$$

$$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$$



Definicja 5.4.4. Kątem między płaszczyzną a prostą nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



Przykład 5.4.5. Wyznacz kąt między prostą $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a płaszczyzną $\pi : 3x + y + z + 1 = 0$.

Mamy $\vec{a} = [-1, 0, 2] \parallel l$, $\vec{n} = [3, 1, 1] \perp \pi$. Oznaczmy $\beta = \angle(\vec{n}, \vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Obliczamy $\cos \beta = \frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{55}}$,

albo $\sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{55}}$

Odległości

Definicja 5.4.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π* , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π . Oznaczamy ją $d(P, \pi)$.

ii) *Odległością punktu P od prostej l* , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l . Oznaczamy ją $d(P, l)$.



Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}.$$

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas $k : \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

$\{P'_0\} = k \cap \pi = ?$

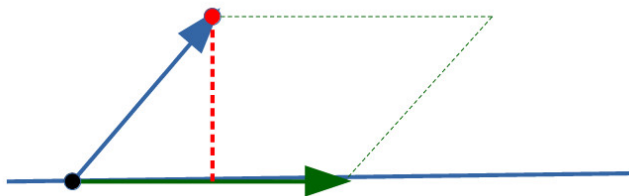
$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$d(P, \pi) = |P_0 P'_0| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wzór na odległość punktu od prostej

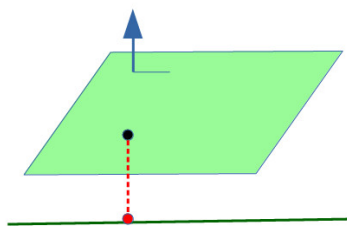
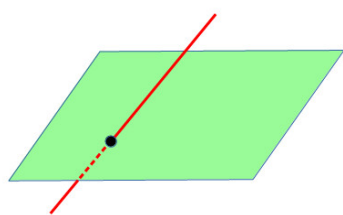
Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$



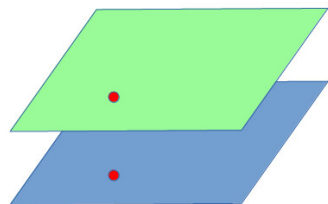
Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π , to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punktu prostej od płaszczyzny.



Definicja 5.4.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.*

Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A, B, C] \neq \vec{0}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.

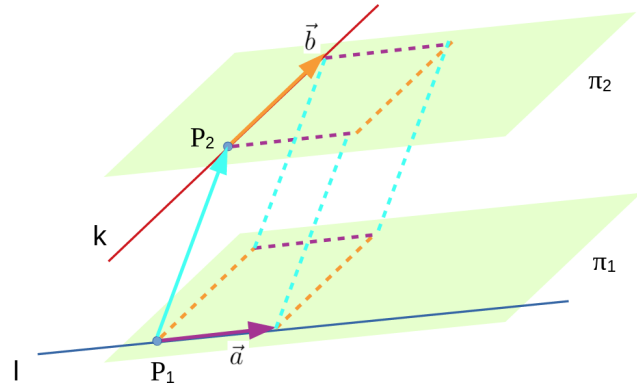


Odległość prostych skośnych

Przypomnijmy, że jeśli dwie proste leżą w jednej płaszczyźnie, to przecinają się lub są równoległe. Proste, które nie są do siebie równoległe i nie mają punktów wspólnych nazywamy skośnymi. Zatem proste są skośne, gdy nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Założmy że proste te są skośne. Wówczas istnieją płaszczyzna π_1 zawierająca prostą l oraz płaszczyzna π_2 zawierająca prostą k takie, że $\pi_1 \parallel \pi_2$ oraz $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Ponadto płaszczyzny równoległe, na których leżą dane dwie proste skośne są wyznaczone jednoznacznie. Istotnie, π_1 jest płaszczyzną zawierającą l i równoległą do wektora $\vec{b}$. Jej wektorem normalnym jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Podobnie, π_2 jest płaszczyzną zawierającą k i równoległą do wektora $\vec{a}$. Jej wektorem normalnym również jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$.



Definicja 5.4.8. *Odległością dwóch prostych skośnych* nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Uwaga 5.4.9. Niech l i k będą jak wyżej. Założmy że proste te są skośne, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas

$$d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

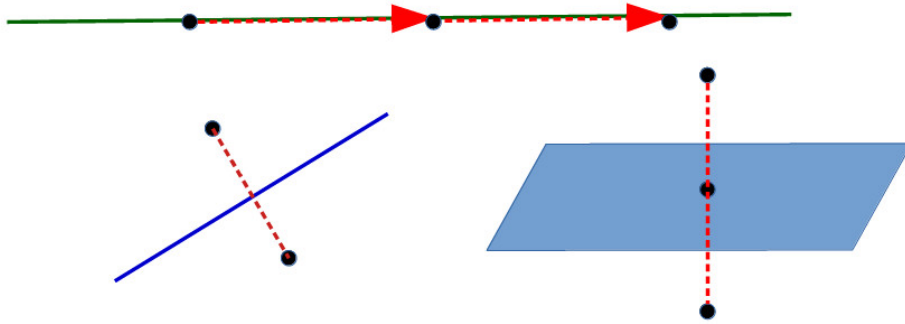
Przykładowe zadanie polegające na wyznaczaniu odległości dwóch prostych skośnych można znaleźć tutaj.

Symetrie

Definicja 5.4.10. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

- i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S , jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.
- ii) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem prostej l , jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

- iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.



TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, zaś $V \neq \emptyset$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

- i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,
- ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
- v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K -liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami*.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

- i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$
Dla $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
 $u \oplus v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \alpha \odot u = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n)$.
- ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało
Dla $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
 $u \oplus v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \alpha \odot u = (\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n)$.
- iii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
Dla $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
 $f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$
Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stale równa zero.
- iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

- v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

	$u + v$	suma wektorów
	$\alpha + \beta$	suma skalarów
Wówczas dla $u, v \in V, \alpha, \beta \in K$	$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
	$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V , zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K . Wówczas:

- i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$
- v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$
- vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami

$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U, \odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V .

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\emptyset \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V . $\square$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V . Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$.
W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. $\square$

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V . Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 6.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

U jest podprzestrzenią liniową V , bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcją ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f - \text{parzysty}\}$

U **nie** jest podprzestrzenią liniową V . Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f + g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f + g \notin U$.

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V . Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$$

$$\text{oraz } \alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$$

iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq n\}$.

Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V .

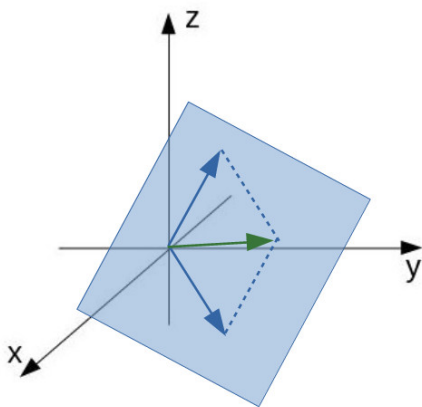
Zatem $\mathbb{R}_n[x]$ to przestrzeń liniowa wielomianów stopnia co najwyżej n -tego. ⁷

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Jedynymi właściwymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0, 0)$.

Jedynymi właściwymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0, 0, 0)$.

⁷Niektórzy autorzy stosują również oznaczenie $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.



6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in V$. Niech $W \neq \emptyset$ będzie podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K; w_1, \dots, w_k \in W; k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W , nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\text{lin}_K W$ lub krótko $\text{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ piszemy też $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\}$.

Czyli $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\emptyset \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\text{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W .

Wniosek 6.2.3. Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{u, v_2, \dots, v_m\}$

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\text{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\text{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W .

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{i} = (1, 0)$ oraz $\hat{j} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K .

Definicja 6.2.6. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ nazywamy *liniowo niezależnymi* lub mówimy, że tworzą *układ liniowo niezależny*, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ zachodzi

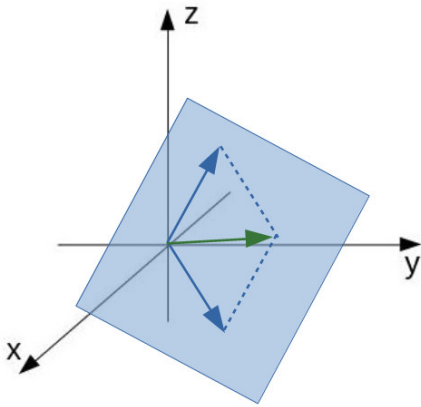
$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy *liniowo zależnymi*.

Twierdzenie 6.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy, że wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne, czyli istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ nie wszystkie równe zeru, takie że $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$.

Założmy teraz, że v_1 jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$, czyli istnieją $\beta_2, \dots, \beta_m \in K$ takie, że $v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m$. Wówczas $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0}$, gdzie $\beta_1 = -1 \neq 0$. $\square$



Twierdzenie 6.2.8. Wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A , której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \dots, v_k$, jest równy n .

Wniosek 6.2.9. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

Przykład 6.2.10. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(5, 2, 2) = (\alpha + 2\beta + 5\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + 2\gamma)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Wektory generują $\mathbb{R}^3$, jeśli powyższy układ jest oznaczony.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \end{array} \right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 2 & 7 & z+x \end{array} \right] \xrightarrow[(-1) \cdot w_2]{w_3+2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 1 & 3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+2y+z \end{array} \right]$$

Układ oznaczony, posiada rozwiązanie $\gamma = -x + 2y + z$, $\beta = x - y - 3\gamma = 4x - 7y - 3z$, $\alpha = x - 2\beta - 5\gamma = -2x + 4y + z$. Zatem układ wektorów u, v, w generuje $\mathbb{R}^3$.

Przykład 6.2.11. Czy układ $\{A, B, C\}$ jest układem liniowo niezależnym?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Sprawdzamy, czy dowolna kombinacja zerowa jest trywialna.

$$\text{Niech } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ będą dowolne takie, że } \alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Stąd } \begin{bmatrix} \alpha - \beta & -\alpha \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Zatem macierze A, B, C tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 6.2.12. Czy wektory $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 2, 0, -1)$, $w = (0, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$.

Stąd $(\alpha + \beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + 3\gamma, 4\alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0)$.

Wektory u, v, w będą liniowo niezależne, gdy powyższy układ jednorodny ma jedyne rozwiązanie $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-4w_1]{w_2-2w_1, w_3-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}w_4]{-\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow r(U) = r(A) = n = 3$$

Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ jest oznaczony. Zatem wektory u, v, w są liniowo niezależne.

Obserwacja: Badanie liniowej niezależności wektorów w $\mathbb{R}^n$ polega na wyliczaniu rzędu macierzy, której kolumnami są podane wektory. Wektory są liniowo niezależne, gdy rząd macierzy równy jest liczbie wektorów.

Wniosek 6.2.13. Niech $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $k > n$, to wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo zależne. Równoważnie, jeśli wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq n$.

Twierdzenie 6.2.14. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.

- ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.
- iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.
- iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

Definicja 6.2.15. Niech $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci

$$W_{f_1, \dots, f_n}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą Wrońskiego* układu funkcji $f_1, \dots, f_n$, a jej wyznacznik *wrońskianem*.

Twierdzenie 6.2.16. Niech $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Jeśli wrońskian układu funkcji $f_1, \dots, f_n$ nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{R}$, tzn. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W_{f_1, \dots, f_n}(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Przykład 6.2.17. Zbadaj, czy funkcje f_1, f_2, f_3 takie, że $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$, tworzą układ liniowo niezależny w $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

METODA I: Skorzystamy wprost z definicji liniowej niezależności. Niech $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ będą takie, że $C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza funkcję tożsamościowo równą zero.

Skoro $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, zatem w szczególności równość jest prawdziwa dla $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ oraz $x = \pi$. Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$C_1 + C_3 = 0 \quad \wedge \quad C_1 + C_2 = 0 \quad \wedge \quad C_1 - C_3 = 0.$$

Stąd $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, a zatem układ funkcji f_1, f_2, f_3 jest liniowo niezależny.

METODA II: Skorzystamy z kryterium wrońskianowego opisanego w twierdzeniu 6.2.16.

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

Tak, tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 6.2.18. Układ wektorów $\hat{i} = (1, 0), \hat{j} = (0, 1), \hat{i} + \hat{j} = (1, 1)$ generuje przestrzeń $\mathbb{R}^2$, to jest $\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i} + \hat{j}\}$.

Rozważmy wektor $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Zauważmy, że

$$v = 1 \cdot \hat{i} + 2 \cdot \hat{j}, \quad v = 1 \cdot \hat{j} + 1 \cdot (\hat{i} + \hat{j}).$$

Wektor v jest kombinacją liniową generatorów przestrzeni $\mathbb{R}^2$, lecz przedstawienie to nie jest jednoznaczne.⁸

Wyróżnimy układy wektorów generujących daną przestrzeń liniową o tej własności, że dowolny wektor z tej przestrzeni przedstawia się jednoznacznie jako ich kombinacja liniowa.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$.

Definicja 6.2.19. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ nazywamy *bazą* przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Wniosek 6.2.20. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to wówczas $k = n$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy wniosków 6.2.9 oraz 6.2.13. $\square$

Przykład 6.2.21. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Układ wektorów $\{e_1, \dots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Przykład 6.2.22. Wskaż bazę podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli $U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\}$.

Podane generatory na pewno nie tworzą bazy U , gdyż układ 5 wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest liniowo zależny.

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \leq 4 \neq 5$$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$3 \Rightarrow U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)\}$$

Układ wektorów $(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)$ jest bazą przestrzeni U (porównaj wniosek 6.2.3).

⁸Istnieje więcej niż jeden sposób przedstawienia wektora v jako kombinacji liniowej wektorów $\hat{i}, \hat{j}, \hat{i} + \hat{j}$.

Twierdzenie 6.2.23. i) Każda przestrzeń wektorowa różna od $\{0\}$ posiada bazę.

- ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne. Jeśli baza danej przestrzeni liniowej jest nieskończona, to każda inna jej baza także jest nieskończona.
- iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

Twierdzenie 6.2.24. (Warunki równoważne do bycia bazą przestrzeni wektorowej)

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$. Następujące warunki są równoważne.

- i) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest bazą przestrzeni V .
- ii) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest minimalnym (w sensie relacji inkluzji) układem generującym V .
- iii) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni.
- iv) Dowolny wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie jako kombinacja liniowa elementów $b_1, \dots, b_n$.

Definicja 6.2.25. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy *wymiarem przestrzeni wektorowej V* i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest *n -wymiarowa*. Jeśli żaden skończony układ wektorów nie tworzy bazy przestrzeni V , to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{0\} = 0$.

Wniosek 6.2.26. i) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

- ii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.
- iii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

Przykład 6.2.10 - raz jeszcze

Wiemy, że wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wniosek 6.2.27. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$, $v_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$, $\dots$, $v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det[v_{ij}] \neq 0$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 6.2.8 oraz 6.2.26 iii). $\square$

Wniosek 6.2.28. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 6.2.29. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \dots, b_n)$ nazywamy *reperem bazowym* lub *bazą uporządkowaną*.

Często mówimy po prostu o *bazie*, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = (e_1, \dots, e_n), \text{ gdzie } e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots), \quad \dim \mathbb{R}[x] = \infty, \quad p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_s \cdot x^s$$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot), \quad \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n), \quad \dim \mathbb{R}[x] = n + 1$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_n[x]$ mamy $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$.

4) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{mn}), \text{ gdzie } E_{kl} = [e_{ij}^{kl}], \text{ zaś } e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (k, l) \\ 0 & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

$$\dim M_{m \times n}(K) = m \cdot n$$

Przykład 6.2.30. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

Twierdzenie 6.2.31. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.

Przykład 6.2.32. Podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$.

	podprzestrzenie $\mathbb{R}$	podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$	podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$
wymiaru 0	$\{0\}$	$\{(0, 0)\}$	$\{(0, 0, 0)\}$
wymiaru 1	$\mathbb{R}$	proste przechodzące przez $(0, 0)$	proste przechodzące przez $(0, 0, 0)$
wymiaru 2		$\mathbb{R}^2$	płaszczyzny przechodzące przez $(0, 0, 0)$
wymiaru 3			$\mathbb{R}^3$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jej bazą uporządkowaną. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 6.2.33. Skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

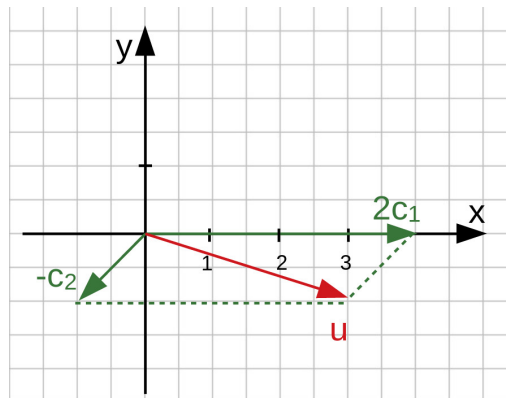
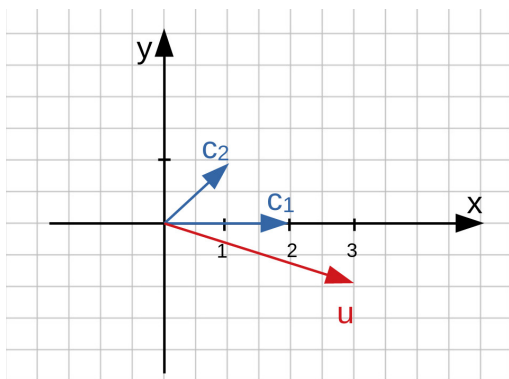
NOTACJA: Dla $v \in \mathbb{R}^n$ będziemy pisać $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ zamiast $u = [v_1, v_2, \dots, v_n]_{\mathcal{B}_k^n}$.

Przykład 6.2.34. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2)$, gdzie $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ to baza kanoniczna.

$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 = (2, 0), c_2 = (1, 1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$$u = [2, -1]_{\mathcal{C}} = 2c_1 - c_2 = 2 \cdot (2, 0) - (1, 1) = (3, -1)$$



Przykład 6.2.35. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

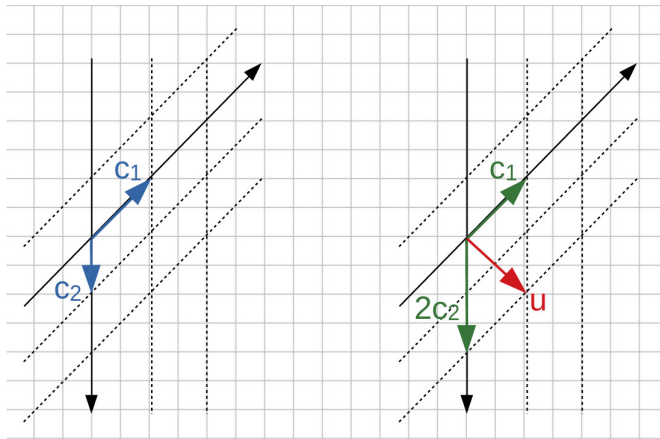
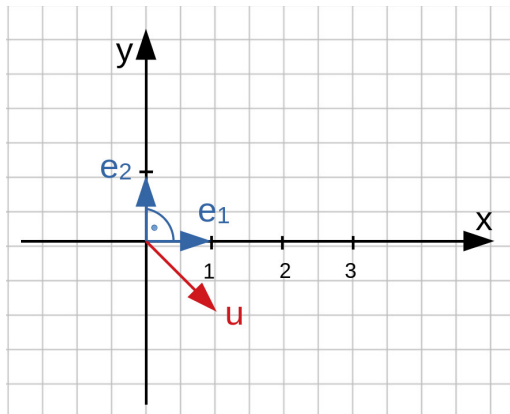
$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2)$, gdzie $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ to baza kanoniczna.

$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 = (1, 1)$, $c_2 = (0, -1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$u = (1, -1)$ oraz $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{C}}$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

$(1, -1) = \alpha c_1 + \beta c_2 = \alpha(1, 1) + \beta(0, -1) = (\alpha, \alpha - \beta)$

Stąd $\alpha = 1$, $\beta = 2$ oraz $u = [1, 2]_{\mathcal{C}}$.



Przykład 6.2.36. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
 $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$

Skalary 4, 2, 1 to współrzędne b'_1 w bazie kanonicznej.

Piszemy $b'_1 = (4, 2, 1)$ zamiast $b'_1 = [4, 2, 1]_{\mathcal{B}_k^3}$.

Ponadto $b'_1 = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$.

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznamy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.

Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b'_1 + \beta b'_2 + \gamma b'_3$. Otrzymujemy

$(-3, 15, 7) = \alpha(4, 2, 1) + \beta(-5, 2, 3) + \gamma(1, 3, 0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$. Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ , należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 4w_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1 \cdot w_2 \\ w_3 \leftrightarrow w_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow v = [1, 2, 3]_{\mathcal{B}'}$$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema

bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że

$$\begin{aligned} b'_1 &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \dots + \alpha_{n1}b_n \\ b'_2 &= \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{n2}b_n \\ &\dots \\ b'_n &= \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \dots + \alpha_{nn}b_n \end{aligned}$$

Definicja 6.2.37. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

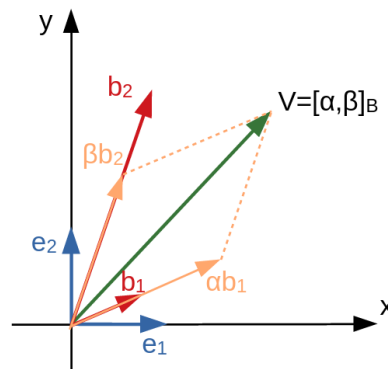
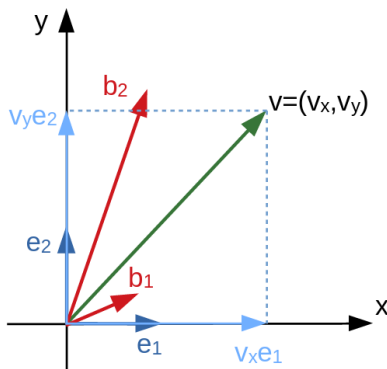
Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 6.2.38. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x'_1, \dots, x'_n]_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$,

gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^2_k = (e_1, e_2) & \xrightarrow{\text{zmiana bazy}} & \mathcal{B} = (b_1, b_2) \\ & P = P_{\mathcal{B}^2_k \rightarrow \mathcal{B}} & \end{array}$$



Przykład 6.2.36 - ciąg dalszy

$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$

Wyznamy współrzędne wektora $v = (-3, 15, 7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad X' = P^{-1}X = ?.$$

Wyznamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy

$$X' = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.2.39. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy

$\mathcal{B} = (1 + x, x + x^2, 1 + x^2)$, $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$. Wyznamy macierz $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

$$1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1 + x) + \beta_1(x + x^2) + \gamma_1(1 + x^2) = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\beta_1 + \gamma_1)x^2$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases} \text{ i ostatecznie } \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Łatwo zauważyć, że $1 + x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}}$.

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1 + x + x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$

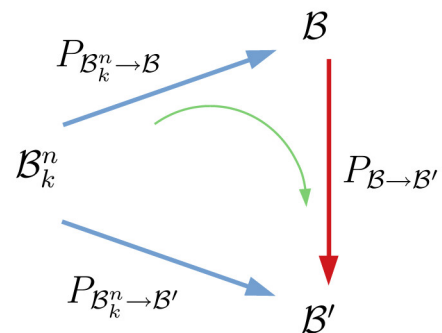
$$\text{i otrzymujemy } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6.2.40. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

$$\text{i) } P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \right)^{-1},$$

$$\text{ii) } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}.$$

Uwaga 6.2.41. W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdy baza początkowa to baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^n$, łatwo wypisać macierze przejścia do nowych baz $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}$ oraz $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$. Wypisanie macierzy $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ wymaga rachunków. Na mocy twierdzenia 6.2.40 otrzymujemy $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, skąd $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$.



TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K .

Definicja 7.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ spełniające warunki

- i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$
- ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.⁹

Twierdzenie 7.1.2. Niech $\varphi : V \rightarrow W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

- i) φ jest liniowe
- ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$
- iii) $\forall v_1, \dots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$
 $\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $\text{Hom}_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $\text{Hom}(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

Uwaga 7.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W , mimo że są to różne działania.

Przykład 7.1.4. Czy φ jest liniowe?

1) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}\varphi(ax) &= a(ax) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x) \text{ oraz} \\ \varphi(x_1 + x_2) &= a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2).\end{aligned}$$

⁹Odwzorowanie to wektorowi przypisuje wektor.

2) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem

$$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b.$$

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y) \text{ oraz}$$

$$\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2).$$

Odwzorowanie jest liniowe.

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.

$$L = \varphi(\alpha(x, y, z)) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$$

$$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - y + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$$

Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład

$$\varphi(5 \cdot (1, 0, 0)) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$$

Uwaga 7.1.5. i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 7.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem

$\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?

Sprawdźmy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.

Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy

$$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)(p''(x) + q''(x)) + 4(p'(x) + q'(x)) =$$

$$\left((3-x)p''(x) + 4p'(x)\right) + \left((3-x)q''(x) + 4q'(x)\right) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x),$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.

Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha \cdot p''(x) + 4\alpha \cdot p'(x) = \alpha \cdot \left((3-x)p''(x) + 4p'(x)\right) =$$

$$\alpha \cdot \varphi(p)(x). \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}. \text{ Zatem } \varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p).$$

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 7.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

ii) $\forall v \in V \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Dowód. i) Ponieważ $\mathbf{0}_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}_V) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0}_V)$, zatem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. $\square$

Wniosek 7.1.8. Niech $\varphi : V \rightarrow W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to φ nie jest liniowe.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. $\square$

Przykład 7.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

Definicja 7.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy:

- i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,
- ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,
- iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją,
- iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,
- v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,
- vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.

Twierdzenie 7.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K . Niech $(b_1, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \dots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Uwaga 7.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V .

Przykład 7.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ , jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 7.2.1. i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\text{Ker}\varphi$.

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\text{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$.

Uwaga 7.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ zbiory $\text{Ker}\varphi$ oraz $\text{Im}\varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \text{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \text{Im}\varphi$. $\square$

Twierdzenie 7.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\text{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś zbiór $\text{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W .

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 7.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i) φ jest iniekcją $\Leftrightarrow \text{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow \text{Im}\varphi = W$.

Definicja 7.2.5. Jeśli $\dim \text{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\text{rank}(\varphi)$.

Twierdzenie 7.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$r(\varphi) + \dim \text{Ker}\varphi = \dim V.$$

Wniosek 7.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \text{Im}\varphi \leq \dim V$.

Przykład 7.2.8.

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz φ , ich bazy i wymiary. Podaj własności φ .

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow[\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1}]{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}w_2 \\ -\frac{1}{2}w_3}]{\substack{-\frac{1}{2}w_2 \\ -\frac{1}{2}w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ x = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\text{Ker}\varphi = \{(t, 2t, -3t, t), t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 2, -3, 1)\}$

Układ $\{(1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\text{Ker}\varphi$ oraz $\dim \text{Ker}\varphi = 1$.

Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto

$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem φ jest epimorfizmem.

Stąd $\text{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$

$\text{Im}\varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Im}\varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\text{Im}\varphi$.

$\text{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \text{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 7.2.9. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie iniekcją, zaś wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

Wniosek 7.2.10. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K takimi, że $\dim V = \dim W = n$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie iniekcją, zaś wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni V . Wówczas wektory $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni W .

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U, V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem K .

Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie bijekcją.¹⁰ *Odwzorowaniem odwrotnym* do f nazywamy odwzorowanie liniowe $g \in \mathcal{L}(W, V)$ takie, że

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \quad f(v) = w \Leftrightarrow g(w) = v.$$

Jesli takie odwzorowanie istnieje, to jest jedyne. Oznaczamy je symbolem f^{-1} .

¹⁰W szczególności wynika stąd, że $\dim V = \dim W$.

Twierdzenie 7.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Oznaczmy przez $\text{Aut}_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) : f - \text{bijekcja}\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V .

Wniosek 7.3.3. Zbiór $\text{Aut}_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemianną.

Dowód. Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 7.3.2 i). Składania odwzorowań jest łącznie. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe id_V . Elementem symetrycznym do $f \in \text{Aut}_K(V)$ jest f^{-1} , bowiem na mocy twierdzenia 7.3.2 ii) $f^{-1} \in \text{Aut}_K(V)$. $\square$

Grupa $\text{Aut}_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej V* .

Przykład 7.3.4. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończone wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$.

Definicja 7.4.1. *Macierzą (lub reprezentacją macierzową) odwzorowania liniowego φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m \times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.*

Przykład 7.4.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

$$\varphi(1, 0, 0) = (3, 0), \varphi(0, 1, 0) = (0, 2), \varphi(0, 0, 1) = (0, 1), \quad M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

b) bazy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) &= [\alpha_1, \beta_1]_{\mathcal{C}}, & (3, 4) &= \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1), \\ & & &\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2, \varphi(b_1) = [3, -2]_{\mathcal{C}} \\ \varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) &= [\alpha_2, \beta_2]_{\mathcal{C}}, & (3, 3) &= \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) &= [\alpha_3, \beta_3]_{\mathcal{C}}, & (0, 1) &= \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3) \\ & & & \Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \varphi(b_3) = [0, 1]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

$$M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Uwaga 7.4.4. Rozważmy dwie przestrzenie liniowe V oraz W nad $\mathbb{R}$ takie, że $\dim V = n$ oraz $\dim W = m$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V , zaś $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W .

$$\begin{array}{ccc} & \text{odwzorowanie liniowe} & \\ & \varphi & \\ V & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & W \\ & v \longmapsto w = \varphi(v) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)} & \mathbb{R}^m \\ [v_1, v_2, \dots, v_n]_{\mathcal{B}} & \longmapsto & [w_1, w_2, \dots, w_m]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Przykład 7.4.5. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$. Rozważamy bazę $\mathcal{B} = (1, z)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ przestrzeni

$M_2(\mathbb{C})$.

$$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$$

$$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2 + i, 1, 3, 4 - i]_{\mathcal{C}}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2, \dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4, \Rightarrow M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4 \times 2}(\mathbb{C}), M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 + i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 - i \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 7.4.6. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \Leftrightarrow AX = Y.$$

Uwaga 7.4.7. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.8. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\text{rank}(\varphi) = \text{rank} A$.

Wniosek 7.4.9. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.6. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = m$,

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = n$.

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy

Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$ oraz za pomocą $M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Czy φ jest monomorfizmem /epimorfizmem?

$$\text{Oznaczmy } A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A' = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sprawdzenie } \varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$$

$$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 0) + 3(0, 0, 1) = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_3 = [1, 0, 3]_{\mathcal{B}}$$

$$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd $\varphi(1, 2, 3) = [3, 1]_{\mathcal{C}} = 3c_1 + c_2 = 3(1, 2) + (0, 1) = (3, 7)$.

Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.

Ponadto $\dim \text{Ker} \varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.10. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 7.4.11. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

- i) f jest izomorfizmem
- ii) $\text{Ker} f = \{0_V\}$
- iii) $\text{Im} f = W$
- iv) $r(A) = \dim V$
- v) $\det A \neq 0$

Wniosek 7.4.12. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Twierdzenie 7.4.13. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończone wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

Przykład 7.4.14. Dane są odwzorowania liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (x - 3z, x + y),$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania

$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)$ i oblicz $\varphi(1, 2, 3)$.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy h jest odwracalne?

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h$ jest odwracalne

$$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = (M_h)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}M_{f+g} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x, y, z) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = (\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}y - \frac{10}{9}z, \frac{2}{3}x + \frac{32}{9}y - \frac{14}{9}z)$$

$$\varphi(1, 2, 3) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1, 2, 3) = (-\frac{44}{9}, \frac{112}{9})$$

Uwaga 7.4.15. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\text{id} : V \rightarrow V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$. Wówczas

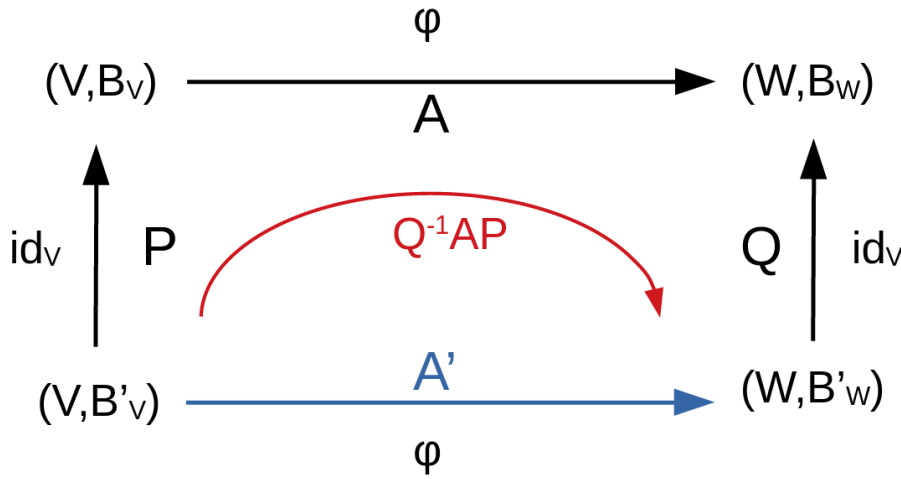
$$\begin{cases} \text{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \dots + a_{n1}b_n \\ \dots \\ \text{id}(b'_n) = b'_n = a_{1n}b_1 + \dots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\text{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$

7.5 Zmiana baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W . Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \rightarrow \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dowód. Ponieważ $X = PX'$, $Y = QY'$, $AX = Y$, $A'X' = Y'$, zatem $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. $\square$



Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczmy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = P_{\mathcal{B}_k^2 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga 7.5.2. Zmiana bazy prowadzi do *liniowej zmiany zmiennych* lub *podstawienia liniowego*. Równość $X = PX'$ oznacza, że każda ze zmiennych $x_1, \dots, x_n$ wyraża się jako kombinacja liniowa $x'_1, \dots, x'_n$. Ponieważ $\det P \neq 0$, możemy wywnioskować, że $X' = P^{-1}X$ i wyrazić każdą ze zmiennych $x'_1, \dots, x'_n$ jako kombinację liniową $x_1, \dots, x_n$.

W powyższym przykładzie zmiana baz w przestrzeniach $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ oznacza zmianę układów współrzędnych (a zatem zmianę zmiennych). Powoduje to zmianę przepisu odwzorowania φ , ale w żaden sposób nie wpływa na to jaki wektor $\varphi(v) \in \mathbb{R}^2$ jest przypisywany danemu wektorowi $v \in \mathbb{R}^3$.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad PX' = X,$$

Korzystamy z równości $X' = P^{-1}X$. Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ 2x - y \\ -2x + y + z \end{bmatrix}.$$

Ponadto $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $Y' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$, $Y = QY' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ 2a' + b' \end{bmatrix}$.

Korzystając z macierzy A oraz A' otrzymujemy

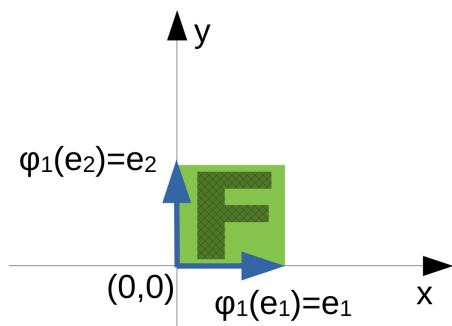
$$(a, b) = \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z) \quad \text{oraz} \quad (a', b') = \varphi(x', y', z') = (3x' + 3y', -2x' - 3y' + z').$$

Możemy sprawdzić, że

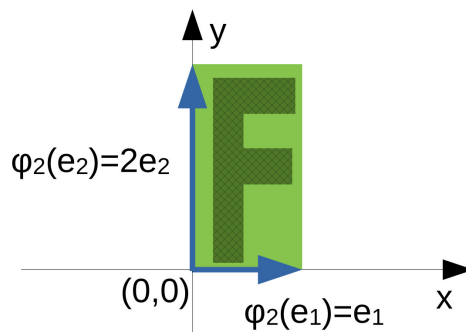
$$\begin{aligned} (a', b') &= \varphi(x', y', z') = (3x' + 3y', -2x' - 3y' + z') = \\ &= \left(3(-x + y) + 3(2x - y), -2(-x + y) - 3(2x - y) + (-2x + y + z) \right) = (3x, -6x + 2y + z). \end{aligned}$$

Stąd $a = a' = 3x$ oraz $b = 2a' + b' = 6x - 6x + 2y + z = 2y + z$.

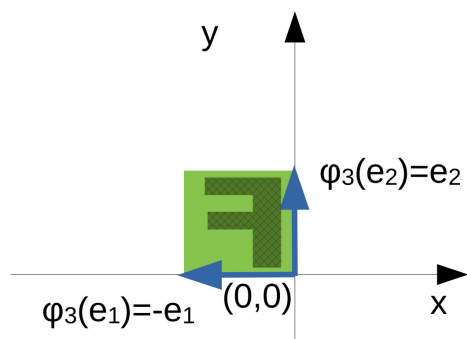
Przykład 7.5.3. Endomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}^2$



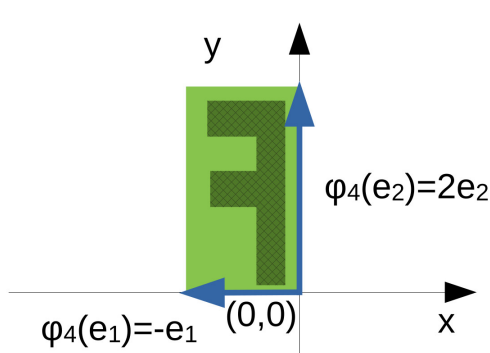
identyczność $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



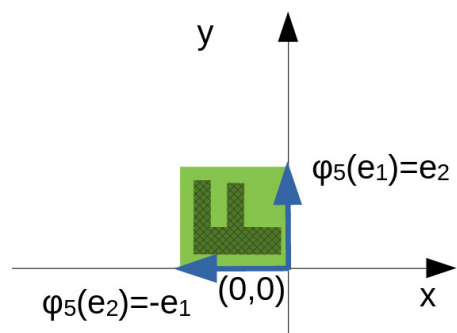
rozciąganie $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



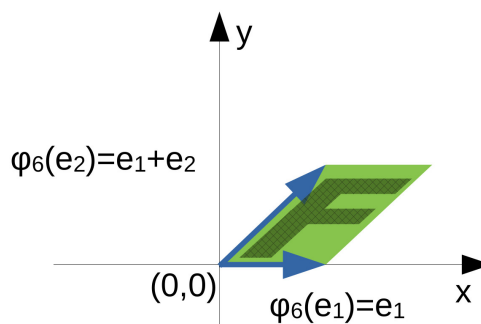
odbicie (symetria osiowa) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



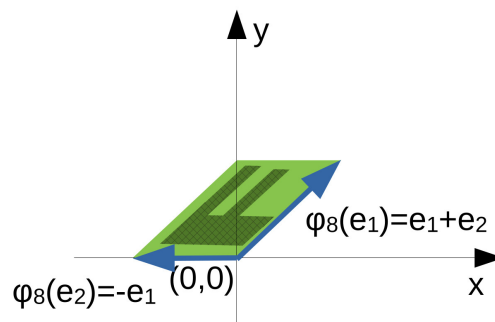
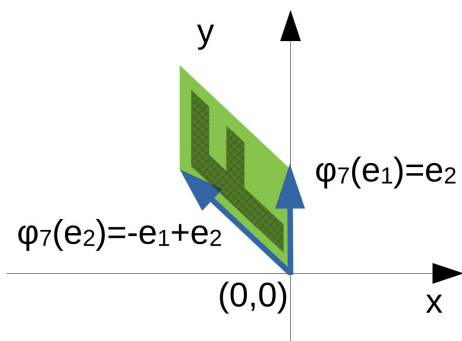
rozciąganie i odbicie $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



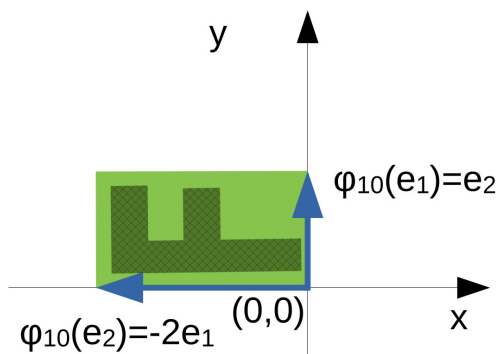
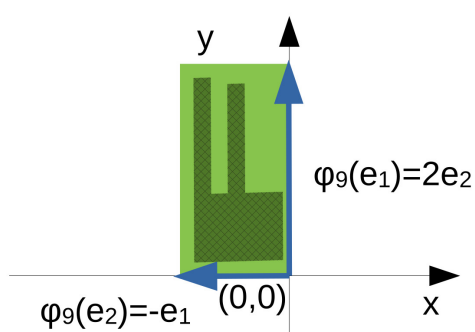
obróć (rotacja) o kąt $\frac{\pi}{2}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



powinowactwo ścinające (ang. shear) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

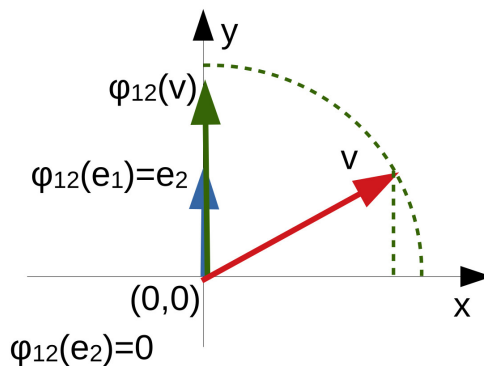
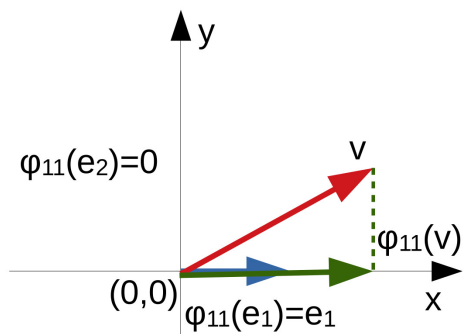


powinowactwo ścinające i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ rotacja i powinowactwo ścinające $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



rotacja i rozciąganie $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

rozciąganie i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



rzutowanie (projekcja) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

projekcja i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czym jest powinowactwo ścinające, dowiesz się tutaj.

7.6 Uwaga na temat rozwiązywania układów równan liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz kolumna kolumna
współczynników niewiadomych wyrazów wolnych

Przy ustalonych bazach przestrzeni K^n, K^m macierz A jednoznacznie wyznacza odwzorowanie liniowe $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m$. Rozwiązywanie układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}$ polega na wyznaczeniu jądra $\text{Ker} \varphi_A$ odwzorowania φ_A .

Wniosek 7.6.1. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych $AX = \mathbf{0}$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem K . Jej wymiar jest równy $n - r(A)$.

W szczególności wektor zerowy zawsze należy do zbioru rozwiązań układu jednorodnego. Ponadto suma rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązaniem tegoż układu jednorodnego.

Twierdzenie 7.6.2. Niech $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ będzie jednym z rozwiązań niesprzecznego niejednorodnego układu równań liniowych $AX = B$. Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań układu $AX = B$ ma postać

$$\left\{ (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \text{ dowolne rozw. } AX = \mathbf{0} \right\}.$$

Przykład 7.6.3. Rozważmy raz jeszcze układ równań z przykładu 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u = 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u = 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u = 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u = 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Jak już wiemy, $r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ i jest to układ nieoznaczony, posiadający nieskoń-

czenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów. Rozwiązania są postaci $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Równoważnie

$$(x, y, z, t, u) = (11 - 2y, y, -3 + \frac{7}{3}t, t, 3 - \frac{8}{3}t) = (11, 0, -3, 0, 3) + (-2, 1, 0, 0, 0)y + (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})t.$$

Dla $y = 0$ i $t = 0$ otrzymujemy $(11, 0, -3, 0, 3)$ jako jedno z rozwiązań rozważanego układu.

Zbiór rozwiązań korespondującego układu jednorodnego jest przestrzenią liniową wymiaru 2, zaś układ wektorów $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})\}$ jest bazą tej przestrzeni.

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $K = \mathbb{R}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n . Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi*.

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2 .

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemienne.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko *φ -niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad \text{tzn.} \quad \forall u \in U \quad \varphi(u) \in U.$$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz .

Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ -niezmiennicza.

2) Niech $V, \varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \text{Ker} \varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.

Zatem U jest φ -niezmiennicza.

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \rightarrow V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ -niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \rightarrow U$, czyli

$\varphi|_U \in \text{End}(U)$.

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V . Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ wynika, że $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$, gdzie $A_1 \in M_k(K)$, $A_2 \in M_{n-k}(K)$, $B \in M_{k \times (n-k)}(K)$, $0 \in M_{(n-k) \times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \rightarrow U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in \text{End}(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in K$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ , jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ .

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ .

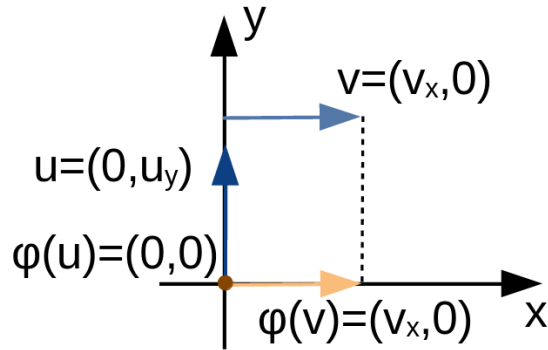
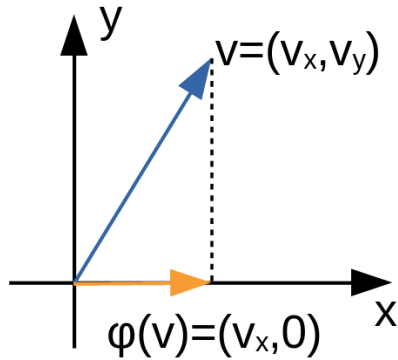
iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $\text{Spec}(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

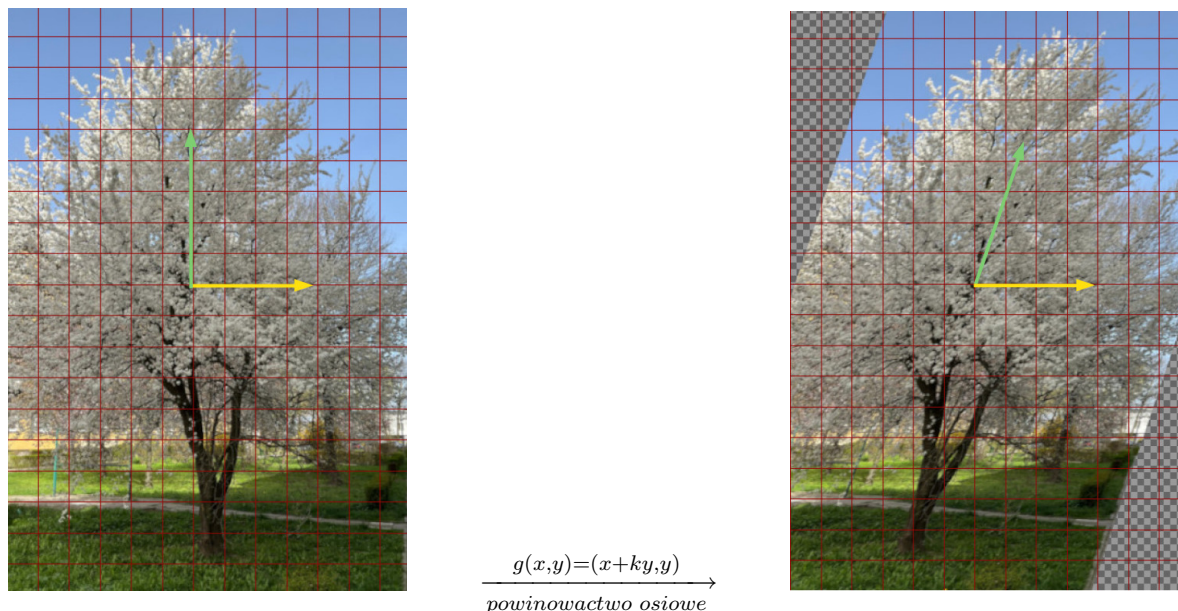
Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox . Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ . Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v , tj. $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:

- 1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
- 2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$



Przykład 8.1.7. Niech $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ to powinowactwo osiowe dane wzorem $g(x, y) = (x + ky, y)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ to ustalona stała.



W wyniku działania przekształcenia g zielony wektor zmienia kierunek, zaś żółty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$. Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej $\lambda = 1$.

Przykład 8.1.8. 1) Niech φ będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$. Dowolny wektor jest wektorem własnym φ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

2) Niech φ będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zatem $\varphi(x, y) = (-y, x)$. Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla φ .

3) Niech $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Stąd $\text{Spec}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Wektory własne znajdują zastosowania na przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu

Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V , że macierz endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.

Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ .

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada

składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ , uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ -niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \text{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$.

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ , odpowiadającą wartości własnej λ .

Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in \text{End}(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in \text{End}(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i} , gdzie $\lambda_i \in \text{Spec}(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.12. Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V . Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$

ii) $\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V .

Definicja 8.1.15. Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V . Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ .

Uwaga 8.1.16. i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała $\mathbb{R}$ to wartości własne endomorfizmu φ .

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V .

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definicja 8.1.17. i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A .

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy *wartością własną* macierzy A . Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $\text{Spec}(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A , odpowiadającym wartości własnej λ .

Uwaga 8.1.18. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Niech V będzie przestrzenią liniową n -wymiarową. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ oraz $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$.

Definicja 8.1.19. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ .

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ .

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

Twierdzenie 8.1.20. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V . Wówczas

i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$,

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I)$.

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].

ii) Ponieważ $E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)$, zatem

$$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \text{Im}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I). \quad \square$$

Przykład 8.1.21. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$$\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ widmo proste}$$

$$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, z \in \mathbb{R}$$

METODA I:

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 0, 1)\} \quad \text{oraz} \quad \dim E_{-1} = 1$$

METODA II:

Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

METODA III:

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy

$$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1, \text{ zatem } \dim E_{\lambda_3} = 1.$$

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2} . Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \text{Spec}(A)$ oraz niech $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i) $\lambda^k \in \text{Spec}(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k .

- ii) $c \cdot \lambda \in \text{Spec}(c \cdot A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c \cdot \lambda$.
- iii) $p(\lambda) \in \text{Spec}(p(A))$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$.
- iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in \text{Spec}(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$.
- v) $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(A^T)$
- vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin \text{Spec}(A)$.

8.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in \text{End}(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$.

- i) Jeśli φ ma widmo proste $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \dots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i , dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V .
- ii) Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie necessarily odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

- iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ .

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V , że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ . Dokładniej mówiąc, $\varphi \in \text{End}(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{R}$ (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $\text{Spec}(A) = \emptyset$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ .

Macierz diagonalizująca

Definicja 8.2.6. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są *podobne*, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Twierdzenie 8.2.7 (o niezmiennikach macierzy podobnych). Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

- i) $r(A) = r(B)$,
- ii) $\det A = \det B$
- iii) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
- iv) $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$

Jeżeli $\varphi \in \text{End}(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zmiany bazy przestrzeni V .

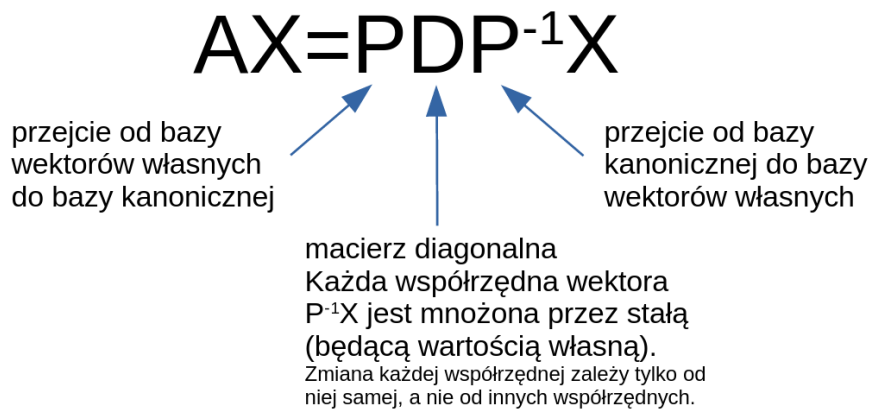
Definicja 8.2.8. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *diagonalizowalną*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A .

Wniosek 8.2.9. Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A .

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Uwaga 8.2.10. Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną $\mathcal{B}$. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie diagonalizowalny oraz niech $\mathcal{B}'$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych

φ . Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$, $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}'}$. Wówczas $A = PDP^{-1}$.



Przykład 8.2.11. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $\text{Spec}(A) = \emptyset$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.12. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$, $\varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne

$$\lambda_1 = -1, v_1 = (1, 1, 1), \quad \lambda_2 = 1, v_2 = (0, 1, 1), \quad \lambda_3 = 2, v_3 = (0, 0, 1).$$

Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.13. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem

$\varphi(x, y, z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$$

$$\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}, \quad k_1 = 3$$

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \left\{ v = (x, y, z) : (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq k_1 = 3.$$

Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ .

Przykład 8.2.14. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

$$f \in \text{End}(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2((1-t)^2 - 1) = (2-t)^2(t^2 - 2t) = -t(2-t)^3$$

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 3, \dim E_0 = 1, 1 \leq \dim E_2 \leq 3$$

$$E_{\lambda_1} = E_0 = \text{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$$

$$\text{Niech } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ b + c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Zatem } B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = E_2 = \text{Ker}(f - 2 \cdot \text{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}, \quad O_{2 \times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$$

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ są liniowo niezależne} \Rightarrow \dim E_2 = 3$$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 8.2.15. Rozważmy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$.
Możemy wyliczyć $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.

Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.

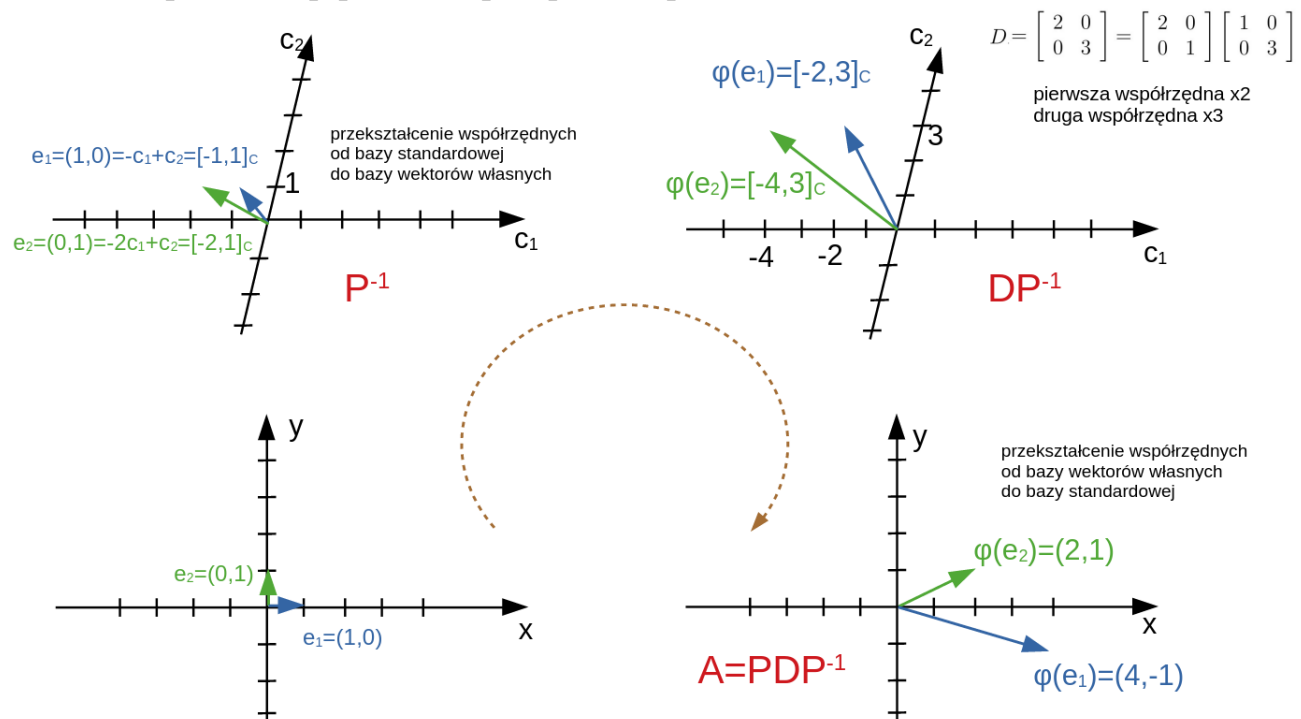
Układ $\mathcal{C} = (v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1))$ jest bazą wektorów własnych.

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = P_{\mathcal{B}_k^2 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obliczamy $P^{-1} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



Uwaga 8.2.16. W dalszej części wykładu przekonamy się, że każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych. A zatem rzeczywiste macierze symetryczne są zawsze diagonalizowalne. Co więcej, wśród wszystkich możliwych macierzy diagonalizujących daną rzeczywistą macierz symetryczną, znajdziemy zawsze taką macierz diagonalizującą P , dla której $P^{-1} = P^T$.

8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V . Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni V , to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^r P^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niech $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $D = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{r\text{-razy}} = PD(P^{-1}P)D \dots (PP^{-1})DP^{-1} = PD^r P^{-1}$. $\square$

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P . Oblicz $\varphi^{101}(1, 2, 3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \stackrel{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \stackrel{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$$\text{Spec} \varphi = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 2, \quad \dim E_1 = 1, \quad 1 \leq \dim E_2 \leq 2$$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

$$\dim E_2 = 3 - r(A - 2I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznamy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$$(A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2, -2, 1)\}$$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x, x, y \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \{(x, y, y - x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = (c_1 = (-2, -2, 1), c_2 = (1, 0, -1), c_3 = (0, 1, 1))$

$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczymy $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D . Niech $v := (1, 2, 3) = [a, b, c]_{\mathcal{C}}$.

$$\text{Wówczas } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ skąd } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Obliczamy } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } v = [2, 5, 6]_{\mathcal{C}}.$$

$$D^{101} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}} = 2c_1 + 5 \cdot 2^{101}c_2 + 6 \cdot 2^{101}c_3 =$$

$$= (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$$

METODA II: Obliczamy

$$A^{101} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P D^{101} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{101} - 2 & 2 - 2^{102} & 2^{102} - 2 \\ 2^{102} - 2 & 2 - 2^{101} & 2^{102} - 2 \\ 1 - 2^{101} & -1 + 2^{101} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5 \cdot 2^{101} \\ -4 - 6 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{101} \end{bmatrix}$$

TEMAT: *Formy kwadratowe*

9.1 Definicja formy kwadratowej

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D + D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D - D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

Obserwacja: Niech D będzie macierzą kwadratową stopnia n .

Niech $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, wówczas $X^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ oraz $X^T D X$ jest macierzą stopnia 1.

Zauważmy, że $X^T D X = X^T B X$.

Istotnie $X^T D X = X^T (B + C) X = X^T B X + X^T C X$ oraz $X^T C X = X^T \frac{D - D^T}{2} X = \frac{1}{2} (X^T D X - X^T D^T X) = \frac{1}{2} (X^T D X - (X^T D^T X)^T) = \frac{1}{2} (X^T D X - X^T D X) = 0$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K taką, że $\dim_K V = n < \infty$. Ustalmy bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ przestrzeni V .

Definicja 9.1.1. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą symetryczną. Odwzorowanie $\gamma : V \rightarrow K$

dane wzorem $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dla dowolnego $x \in V, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$,

nazywamy *formą kwadratową*. Macierz symetryczną A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* γ w bazie $\mathcal{B}$.

Na mocy powyższej obserwacji założenie $A = A^T$ możemy przyjąć bez straty dla ogólności.

Uwaga 9.1.2. i) Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

ii) γ jest wielomianem n zmiennych jednorodnym stopnia 2.

iii) $\forall x \in V \forall \lambda \in K \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2 \gamma(x)$

$$\text{Dowód. i)} [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 +$$

$$a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

ii) Na mocy i) każdy jednomian γ jest stopnia 2.

iii) Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda \in K$. Wówczas na mocy i) mamy $\gamma(\lambda x) = \gamma(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$. $\square$

Uwaga 9.1.3. Każdej macierzy kwadratowej A odpowiada forma kwadratowa γ zdefiniowana powyżej. I odwrotnie, każdej formie kwadratowej γ odpowiada macierz B zdefiniowana następująco.

$$\text{Niech } f : V \times V \rightarrow K, f(x, y) := \frac{1}{2}(\gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y)).$$

Odwzorowanie f jest *dwuliniowe*, tzn. liniowe ze względu na każdą zmienną.

$$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z) \wedge f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$$

Odwzorowanie f nazywamy *formą dwuliniową biegunową względem γ* lub *stowarzyszoną z γ* .

Forma dwuliniowa f jest *symetryczna*, tzn. $\forall x, y \in V \quad f(x, y) = f(y, x)$.

Jeśli $x, y \in V$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$, to wówczas

$$f(x, y) = f(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n)$$

$$= x_1 f(b_1, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) + x_2 f(b_2, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) + \dots + x_n f(b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(b_i, b_j) = X^T B Y, \quad \text{gdzie } B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = f(b_i, b_j).$$

Zauważmy, że $f(x, x) = \frac{1}{2}(\gamma(2x) - 2\gamma(x)) = \gamma(x)$, zatem $\gamma(x) = X^T B X$ oraz $A = B$.

Podsumowując, jeśli w przestrzeni V ustalimy bazę, to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy macierzami $A \in M_n(K)$ oraz formami kwadratowymi γ na V .

Przykład 9.1.4. Poniższe odwzorowania to formy kwadratowe.

$$\text{i)} \quad \gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^3$$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ii) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, zaś $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Niech $P_0 \in \Omega$. Różniczka rzędu drugiego funkcji f w punkcie P_0

$$d_{P_0}^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{P_0}^2 f(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$$

jest formą kwadratową. Jej macierz ma postać

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}.$$

Jest to tak zwana *macierz Hessego*. Jej wyznacznik nazywamy *hesjanem*.

9.2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej γ mamy $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

Definicja 9.2.1. Formę kwadratową $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$ nazywamy

- i) *dodatnio określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) > 0$,
- ii) *ujemnie określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) < 0$,
- iii) *dodatnio półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \geq 0$,
- iv) *ujemnie półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \leq 0$,
- v) *nieokreśloną*, jeśli przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.

Powyższe pojęcia nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V .

Terminologia ta przenosi się na macierze.

Definicja 9.2.2. Rzeczywistą macierz symetryczną A nazywamy *dodatnio określoną*, gdy forma kwadratowa $\gamma(x) = X^T A X$ jest dodatnio określona, tzn. $X \neq \mathbf{0} \Rightarrow X^T A X > 0$.

W pozostałych przypadkach definiujemy analogicznie.

Przykład 9.2.3. i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnio określona

ii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$ jest ujemnie określona

iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ jest nieokreślona, bowiem $\gamma(1, 0, 1) = 2 > 0$, zaś $\gamma(0, 1, 0) = -1 < 0$.

iv) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_3^2$ jest dodatnio półokreślona. $\forall x_2 \in \mathbb{R} \quad \gamma(0, x_2, 0) = 0$

Badanie określoności formy kwadratowej

Definicja 9.2.4. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

- i) *Minorem głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ wierszy i kolumn o tych samych indeksach.
- ii) *Minorem wiodącym głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k .

Symbolem $D_{i_1 \dots i_k}$ oznaczamy minor główny stopnia k , powstały przez skreślenie wierszy i kolumn poza tymi o indeksach $i_1 < \dots < i_k$.

Przykład 9.2.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

minory wiodące główne: $\Delta_1 = D_{11} = 1$, $\Delta_2 = D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$,

$\Delta_3 = D_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_4 = D_{1234} = \det A = 0$

minory główne: $D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 12$, $D_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Twierdzenie 9.2.6 (Kryterium Sylwestera). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną.

- i) A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne są dodatnie, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k > 0$.
- ii) A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego ujemne, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} (-1)^k \Delta_k > 0$.

Bez dowodu.

Przykład 9.2.7. i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona.

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -3 < 0.$$

ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest półokreślona ujemnie, gdyż $\gamma(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$.

Uwaga 9.2.8. Z warunku $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k \geq 0$ nie wynika dodatnia półokreśloność A .

Twierdzenie 9.2.9. Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$.

- i) Forma kwadratowa γ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne,
 tzn. $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.
- ii) Forma kwadratowa γ jest ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne macierzy A przyjmują następujące znaki
 $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad (-1)^k D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.

Przykład 9.2.10. Forma kwadratowa $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ jest dodatnio półokreślona.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

$$D_2 = 0, D_3 = 1, D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oczywiste bowiem $\gamma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 \geq 0$.

Uwaga 9.2.11. i) Jeśli $\Delta_2 = D_{12} < 0$, to macierz jest nieokreślona.

- ii) Rzeczywista macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Dowód. i) $\Delta_2 = D_{12}$ to minor stopnia 2. Jeśli $D_{12} = (-1)^2 D_{12} < 0$, to na mocy kryterium Sylwestera, macierz nie jest dodatnio określona ani ujemnie określona. Na mocy twierdzenia 9.2.9 nie jest półokreślona dodatnio ani półokreślona ujemnie.

ii) Dowód można znaleźć w [4]. $\square$

Twierdzenie 9.2.12 (Kryterium wartości własnych). Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$ oraz niech $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wówczas forma kwadratowa γ jest

- i) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0$,
- ii) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i < 0$,
- iii) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \geq 0$,
- iv) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \leq 0$,
- iv) nieokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$.

Dowód. Niech $\lambda \in \text{Spec}(A)$ oraz niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym λ . Oczywiście $v \neq \mathbf{0}_V$, więc $|v| \neq 0$. Obliczamy $v^T A v = \gamma(v) = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda |v|^2$. Zatem $\gamma(v) > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, co dowodzi podpunktu i). Analogicznie w pozostałych przypadkach. $\square$

Przykład 9.2.13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest dodatnio półokreślona.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t(1 - (1-t)^2) = t(2t - t^2) = t^2(2-t)$$

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$$

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

10.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 10.1.1. Funkcję $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym* lub *iloczynem wewnętrznym*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w),$
- ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u),$
- ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V.$

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E . Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

Uwaga 10.1.2. Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni V , oraz $u, v \in V$, $u = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$, $v =$

$[y_1, y_2, \dots, y_n]_{\mathcal{B}}$, to każdy iloczyn skalarny jest postaci $s(u, v) = X^T A Y$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ oraz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $a_{ij} = s(b_i, b_j)$.

Warunek i) równoważny jest stwierdzeniu, że $s(u, v)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 postaci $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$.

Warunek ii) równoważny jest stwierdzeniu, że macierz A jest macierzą symetryczną.

Zaś warunek iii) w powyższej definicji równoważny jest stwierdzeniu, że macierz A jest dodatnio określona, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące główne macierzy A są dodatnie, lub równoważnie, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie.

Przykład 10.1.3. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$* nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R},$
 $\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i),$ gdzie $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ liczby ustalone

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.

Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Wielomian stopnia co najwyżej drugiego, posiadający trzy różne pierwiastki jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$
 $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 10.1.4. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w),$

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0,$

iii) $\forall u, v \in V \quad \left(s(u, v) \right)^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v) \quad \text{nierówność Schwarza}$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 10.1.5. Funkcję $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V,$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|,$

iii) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad \text{tzw. warunek trójkąta}$

Liczbę $\|v\| \geq 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora v* . Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Twierdzenie 10.1.6. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \|v\|_s = \sqrt{s(v, v)}$$

jest normą w przestrzeni V . Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny*.

Wniosek 10.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

Przykład 10.1.8. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mamy $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

Przykład 10.1.9. Uzasadnimy, że odwzorowanie $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $s(x, y) = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$ dla $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Ponadto obliczymy normę wektora $v = (-1, 3)$.

METODA I : Sprawdźmy warunki z definicji iloczynu skalarnego.

Dla dowolnych $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} s(\alpha x + \beta z, y) &= 13(\alpha x_1 + \beta z_1)y_1 - 2(\alpha x_1 + \beta z_1)y_2 - 2(\alpha x_2 + \beta z_2)y_1 + (\alpha x_2 + \beta z_2)y_2 = \\ &= \alpha(13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2) + \beta(13z_1y_1 - 2z_1y_2 - 2z_2y_1 + z_2y_2) = \alpha s(x, y) + \beta s(z, y) \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie s jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną. Ponadto $s(x, y) = s(y, x)$ oraz

$$s(x, x) = 13x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 9x_1^2 + (4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) = 9x_1^2 + (2x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

Stąd $s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

METODA II : Skorzystamy z uwagi 10.1.2.

$s(x, y) = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 postaci $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$. Rozważmy bazę $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$. Macierz $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = s(e_i, e_j)$ dla $i, j = 1, 2$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Łatwo zauważyć, że $A^T = A$. Ponadto $\Delta_1 = 13 > 0$ oraz $\Delta_2 = \det A = 9 > 0$. Zatem A jest symetryczna i dodatnio określona. Stąd wnioskujemy, że s jest iloczynem skalarnym. Obliczymy normę wektora $v = (-1, 3)$.

$$\|v\| = \sqrt{s(v, v)} = \sqrt{13(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 + 3^2} = \sqrt{34}$$

10.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v .

Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}$ jest wersorem, bowiem $\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$.

Miara kąta między wektorami

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarz'a dla dowolnych $u, v \in V$ mamy

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α . Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 10.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wyznamy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \\ \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \angle(u, v) &= \arccos \frac{18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} \end{aligned}$$

Definicja 10.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Uwaga 10.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

Przykład 10.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdźmy, czy wektory $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4} (-1 - (-1)) = 0 \\ \langle f, f \rangle &= \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

Twierdzenie 10.2.5 (Pitagorasa). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Dowód. $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \stackrel{\langle u, v \rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \square$

Twierdzenie 10.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 10.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 10.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną* (*ortonormalną*) tej przestrzeni.

Przykład 10.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$

baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = (\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1))$

Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{i}$, $v_y = v \circ \hat{j}$, $v_z = v \circ \hat{k}$.

Z dokładnością do znaku składowe v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 10.2.10. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Niech $v \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}.$$

Wniosek 10.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 10.2.10 przyjąć $\|b_i\| = 1$. $\square$

Wniosek 10.2.12. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$. $\square$

Dopełnienie ortogonalne

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 10.2.13. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru S* w przestrzeni euklidesowej V . Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora $x \in V$* .

Twierdzenie 10.2.14. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

- i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrzenią liniową.
- ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 10.2.15. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczmy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 10.2.16. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni U* i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 10.2.17. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U$, $u = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 10.2.18. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$$\begin{aligned} w \perp U &= \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x \\ \langle w, 1 \rangle &= \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x \Big|_0^1 = 0 \\ \langle w, x \rangle &= \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = 0 \quad \text{Zatem } w \perp U. \end{aligned}$$

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 10.2.19. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

- i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,
- ii) $U^\perp = (\text{lin}U)^\perp$,
- iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.
- iv) Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas $U = (U^\perp)^\perp$.¹¹

10.3 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 10.3.1. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \dots, b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \dots, c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots, c_m\}$.

Wniosek 10.3.2. i) Każda skończona przestrzeń euklidesowa różna od $\{0\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

- ii) W przestrzeni euklidesowej skończonej wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Wniosek 10.3.3. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \quad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 \quad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 \quad \dots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\|c_i\|^2} c_i$$

Przykład 10.3.4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.

¹¹Jeśli U jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, to równość na ogół nie zachodzi. Przykładem może być podprzestrzeń U przestrzeni $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, postaci $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$. Można uzasadnić, że $U^\perp = \{0\}$ i w konsekwencji $U \neq (U^\perp)^\perp = V$.

Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.

Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1 + 1 + 1) = 3\alpha$. Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.

Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.

Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.

$\mathcal{C} = (c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3})$ jest bazą ortogonalną.

$$\|c_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \|c_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bazą ortonormalną jest układ wektorów

$$\mathcal{C}' = \left(c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right).$$

Przykład 10.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym

$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ oraz dwie bazy tej przestrzeni $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ oraz $\mathcal{C}' = \left(c'_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$.

Dany jest wektor $p = \sqrt{6}x^2 + 3\sqrt{2}x$. Obliczymy jego normę.

$\|p\|^2 = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 = (\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + 3\sqrt{2})^2 = 12 + 36 = 48$. Zauważmy, że $p = [2\sqrt{2}, 6, 2]_{\mathcal{C}'}$ oraz $p = [0, 3\sqrt{2}, \sqrt{6}]_{\mathcal{B}}$.

Baza $\mathcal{C}'$ jest bazą ortonormalną, zatem $\|p\|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 + 2^2 = 48$.

Baza $\mathcal{B}$ nie jest bazą ortonormalną, dlatego też $\|p\|^2 \neq (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = 24$.

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 10.3.6. Niech $u_1, \dots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \dots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Przykład 10.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0)$, $b_2 = (5, 5, 1)$, $b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 5 & 5 \\ & -2 & 5 & 4 \\ & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \quad A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A \cdot A^T | A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5}w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array} \right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0)$, $c_2 = (6, 3, 1)$, $c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.

Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $\|c_1\|^2, \|c_2\|^2, \|c_3\|^2$.

Zatem $\|c_1\| = \sqrt{5}, \|c_2\| = \sqrt{46}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

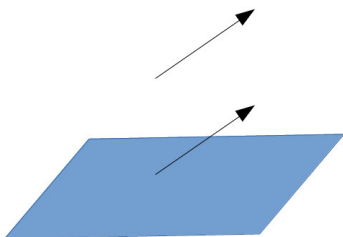
10.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 10.4.1. Operator liniowy $\pi \in \text{End}(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V \quad \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad v - u \perp U,$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U . Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U .



Twierdzenie 10.4.2 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego). Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U .

i) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U , wówczas $u = \pi(v) =$

$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 + \dots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

iii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_k \rangle b_k.$$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów $(b_1, b_2, \dots, b_k)$.

Wniosek 10.4.3. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni U , zaś $A \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy $\mathcal{B}$. Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U .

Przykład 10.4.4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczmy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U , bowiem $r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I

$$u := \pi_U(v) = ?, \quad w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$$

$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas

$$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$$0 = \langle w, b_1 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha,$$

$$0 = \langle w, b_2 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta.$$

Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz

$$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$$

METODA II

Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.

Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 10.2.10 mamy

$$u = \left[\frac{\langle u, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle u, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Ale } \langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle, \text{ zatem } u = \left[\frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Obliczamy}$$

$$\langle v, b_1 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4, \langle v, b_2 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 \text{ oraz } \|b_1\|^2 = 10, \|b_2\|^2 = 11. \text{ Stąd } u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}.$$

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U . Normalizujemy bazę $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2\}$, gdzie

$$b'_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2), b'_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0). \text{ Niech } A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}. \text{ Macierz}$$

$$\text{projekcji jest } AA^T = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}. \text{ Stąd } AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Interpretacja geometryczna metody Grama-Schmidta

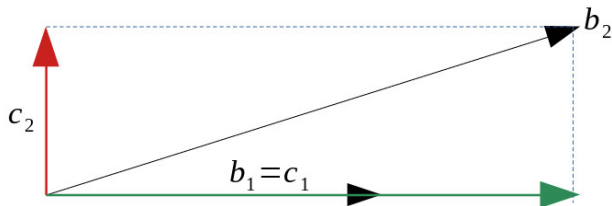
Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

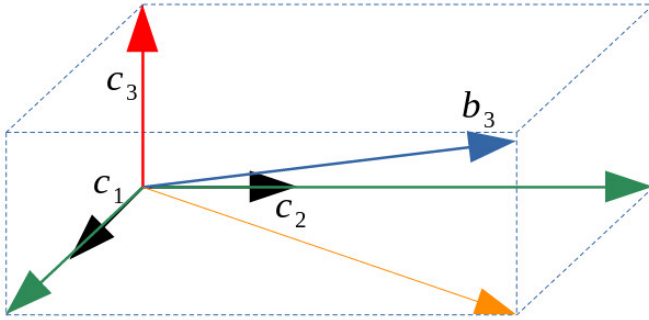
KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_1)$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



10.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 10.5.1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmienić ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawiają powyższe wielkości niezmienione.

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, jeśli $A^T A = I_n$, to wówczas $A^T A = A A^T$. Istotnie, z równości $A^T A = I_n$ wynika, że $\det A \neq 0$ oraz $A^T = A^{-1}$. Zatem $I = A A^{-1} = A A^T$.

Definicja 10.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $A^T A = I_n$ (lub równoważnie $A A^T = I_n$).

Przykład 10.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

Twierdzenie 10.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 10.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1 .

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (jako wektory w $\mathbb{R}^n$ względem standardowego iloczynu skalarnego). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

iii) Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(A A^T) = (\det A)^2$. $\square$

Oczywiście nie każda macierz kwadratowa o wyznaczniku równym 1 lub -1 jest ortogonalna. Przykładami mogą być macierze $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Łatwo sprawdzić, że $\det A = 1$, zaś $AA^T \neq I$. Podobnie $\det B = 1$ i mimo tego, że kolumny B są wektorami ortogonalnymi, to jednak $BB^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \neq I$.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 10.5.6. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy *izometrią liniową*, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|.$$

Definicja 10.5.7. Załóżmy, że $\dim V < \infty$. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy *ortogonalnym*, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną.

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

Uwaga 10.5.8. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

- i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.
- ii) $\text{Spec}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

Dowód. i) Jeśli $v \in \text{Ker} \varphi$, to $\varphi(v) = \mathbf{0}_V$, zatem $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 0$. Z definicji normy, $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $v = \mathbf{0}_V$. Ponadto $\dim V = r(\varphi)$, więc φ jest surjekcją.

ii) Dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 1 \cdot \|v\| = |\pm 1| \cdot \|v\|$. $\square$

Twierdzenie 10.5.9. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie skończenie wymiarową¹² przestrzenią euklidesową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne.

- i) φ jest izometrią liniową.
- ii) φ zachowuje normę tzn. $\forall v \in V \quad \|\varphi(v)\| = \|v\|$.
- iii) φ zachowuje iloczyn skalarny tzn. $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.

¹²Jeśli V jest nieskończenie wymiarowa, wówczas każdy operator ortogonalny jest izometrią liniową, jednak nie każda izometria liniowa musi być operatorem ortogonalnym. Przykładem możemy być przestrzeń l_2 ciągów zbieżnych z kwadratem, tj. takich rzeczywistych ciągów liczbowych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla których $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, wyposażona w iloczyn skalarny $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Operator liniowy $\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$ jest izometrią liniową, jednak nie jest ortogonalny, bowiem $\varphi \circ \varphi^* \neq \text{id}$ (patrzy kolejny rozdział).

iv) φ jest operatorem ortogonalnym

Wniosek 10.5.10. Izometrie liniowe *zachowują kąty*, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α , to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α .

Uwaga 10.5.11. Jeśli rozpatrujemy w $\mathbb{R}^n$ niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Przykład 10.5.12. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Rozważmy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-y, x)$ oraz dwie bazy przestrzeni $\mathbb{R}^2$, bazę kanoniczną $\mathcal{B}_k = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ oraz bazę $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 1), c_2 = (0, 1))$.

Możemy wypisać reprezentacje macierzowe odwzorowania φ .

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie warunku $BB^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq I$ nic nam nie mówi o tym, czy φ jest przekształceniem ortogonalnym, bowiem baza $\mathcal{C}$ nie jest bazą ortonormalną rozważanej przestrzeni euklidesowej.

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Zatem z równości $AA^T = I$ wynika, że φ jest przekształceniem ortogonalnym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Jest to rotacja o kąt prosty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (a zatem jasne jest, że zachowuje odległości).

Przykład 10.5.13. Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznamy macierz A endomorfizmu φ w tejże bazie.

Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Przykład 10.5.14. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^2, g)$ z iloczynem skalarnym

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_2, \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

oraz odwzorowanie $\varphi(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ nie jest ortonormalna, bowiem $g(e_1, e_2) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Zatem z warunku $AA^T = I$ nie można wnioskować, że φ jest izometrią liniową.

Rozważmy bazę $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 0), c_2 = (1, 2))$ oraz $B = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Baza $\mathcal{C}$ jest ortonormalna, bowiem

$$g(c_1, c_2) = 1 - 1 = 0, \|c_1\|^2 = g(c_1, c_1) = 1, \|c_2\|^2 = g(c_2, c_2) = 1 - 1 - 1 + 2 = 1.$$

Z warunku $BB^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \neq I$ można wnioskować, że φ nie jest izometrią liniową w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^2, g)$.

Alternatywnie można zauważyć, że $\|c_2\| = 1$, zaś $\|\varphi(c_2)\| = \|(-2, 1)\| = \sqrt{4 + 1 + 1 + \frac{1}{2}} \neq 1$. Zatem φ nie zachowuje normy.

Izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$, to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

n = 1

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowe, zatem $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$

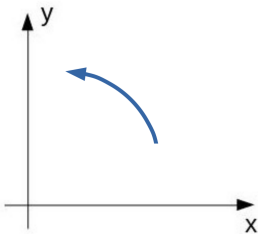
φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.

Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

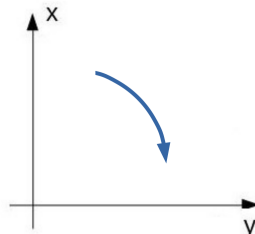
n = 2

Orientacja płaszczyzny

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny* (*zorientowany dodatnio*), a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny



układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podójście algebraiczne

Z założenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest linowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.

Z równości $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$

otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \|[a, b]\|^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = \|[c, d]\|^2 = 1 \\ ac + bd = [a, b] \circ [c, d] = 0 \end{cases}.$$

Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α ,

że $a = \cos \alpha$ oraz $b = \sin \alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $ac + bd = 0$ mamy,

że $c = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$, $d = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ lub też $c = \cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $d = \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

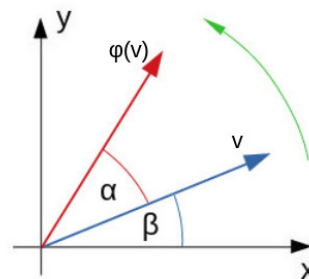
1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r \cos \beta, r \sin \beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Mamy do czynienia z *rotacją (obrotem) o kąt α* wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.

Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

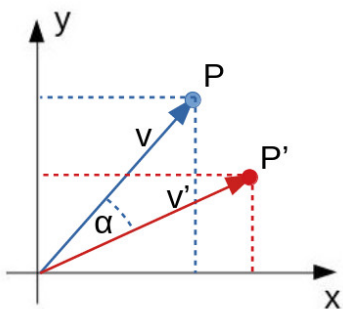


Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a - t)^2 + b^2$ i $\text{Spec}(A) = \emptyset$.

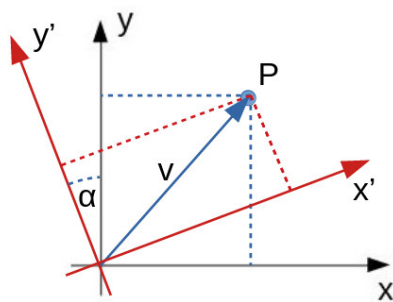
Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto *rotacja nie zmienia orientacji* układu współrzędnych.

Uwaga 10.5.15. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu

osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.

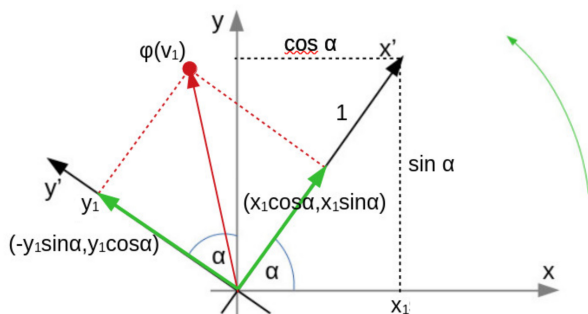
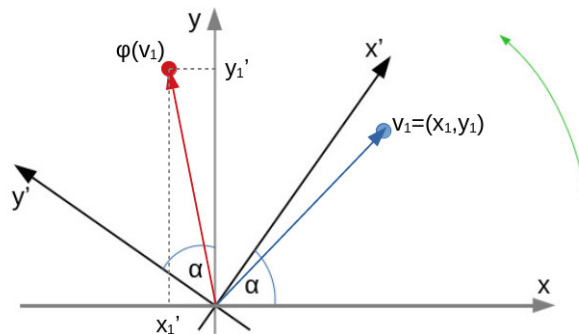
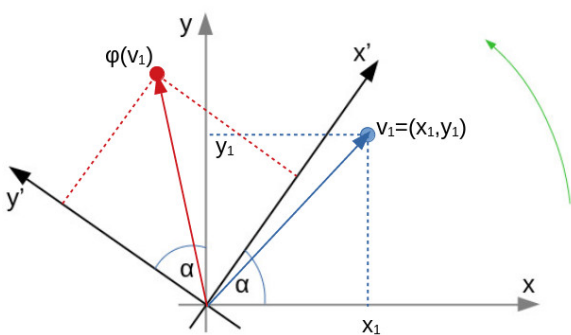


Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

Współrzędne punktu P' w “starej bazie” (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w “nowej bazie” (rysunek po prawej).

Podejście geometryczne

Obrotem układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.



$$\varphi(v_1) = (x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)$$

Przykład 10.5.16.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} && \text{identyczność, tj. rotacja o kąt miary } 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} && \text{rotacja o kąt miary } \frac{\pi}{2} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} && \text{rotacja o kąt miary } \pi \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} && \text{rotacja o kąt miary } \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Przykład 10.5.17. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

Ponieważ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$.

Przykład 10.5.18. Wyznamy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$, $y' = x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$. Wstawiając do równania $y = mx$, otrzymujemy $-x' + y' = m(x' + y')$. Zatem $(1 - m)y' = (1 + m)x'$. Równaniem prostej obróconej jest $(m + 1)x + (m - 1)y = 0$.

2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & -a - t \end{vmatrix} = -(a - t)(a + t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $\text{Spec}(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Mamy do czynienia z *symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej $y = 0$* . $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez

punkt $(0, 0)$. Jaka to prosta?

Podejście algebraiczne

Przypuśćmy, że l jest prostą o równaniu $y = \operatorname{tg} \beta \cdot x$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l , a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos \beta, \sin \beta)$, $b_2 = (-\sin \beta, \cos \beta)$. Istnieją skalary $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Obliczamy

$$v^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta + c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1 b_1 - c_2 b_2$.

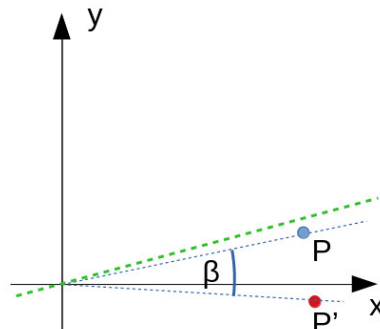
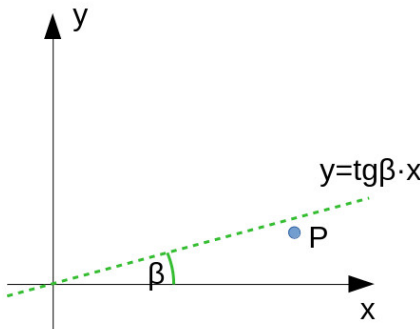
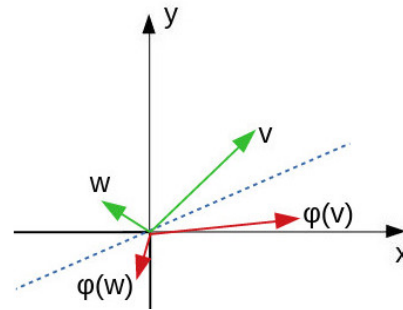
$$\varphi(v)^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta - c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

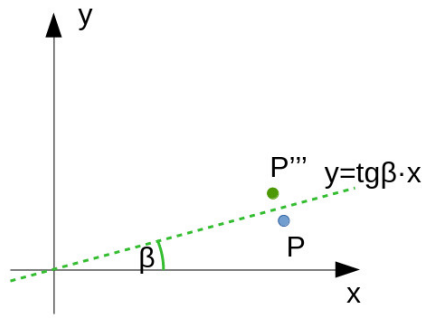
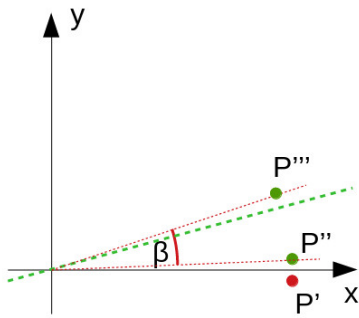
Stąd

$$\begin{aligned} \varphi(v)^T &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} v^T = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T \end{aligned}$$

Czyli $\alpha = 2\beta$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $y = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot x$.

Podejście geometryczne





1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$.

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$.

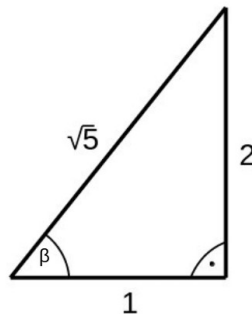
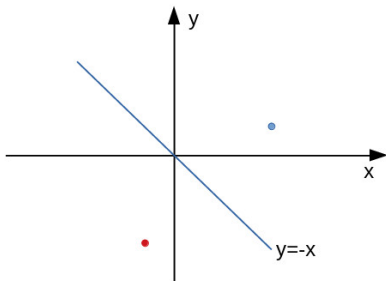
3) Obracamy punkt o kąt β .

4) Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}.$$

Wniosek 10.5.19. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0, 0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 10.5.20. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y = -x$ jest macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.



Przykład 10.5.21. Wyznamy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.

METODA I: Jeśli $\operatorname{tg} \beta = 2$, to wówczas $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y = 0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Uwaga 10.5.22. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obroty/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 10.5.23. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y) spełniające równanie $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 3x + 4y = -5x \\ -4x + 3y = 5y \end{cases}$.

Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.

Uwaga 10.5.24. Symetria ortogonalna φ jest *inwolucją*, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ , to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

10.6 Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznych

Twierdzenie 10.6.1. i) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym rzeczywistej macierzy symetrycznej są wzajemnie ortogonalne.

ii) Każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych.

Wniosek 10.6.2 (Twierdzenie spektralne dla rzeczywistej macierzy symetrycznej). Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz ortogonalna $P \in O(n)$ takie, że

$$P^{-1}AP = P^TAP = D.$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest *ortogonalnie diagonalizowalna*.

Diagonalizacja macierzy za pomocą macierzy ortogonalnych:

1) Znajdujemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

- 2) Normalizujemy wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym o krotności algebraicznej równej 1.
- 3) Wektory własne odpowiadające wartości własnej o krotności algebraicznej większej niż 1 dobieramy w taki sposób, by były ortogonalne i następnie normalizujemy.

Przykład 10.6.3. Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ jest symetryczna, a zatem ortogonalnie diagonalizowalna. Obliczamy $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -t(t - 6)^2$.
 $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6\}$, przy czym $k_1 = 1, k_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Zatem $E_0 = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektor własny $u = (1, -2, 1)$ i normalizujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Zatem $E_6 = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektory własne $v = (2, 1, 0), w = (-1, 0, 1)$. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Oczywiście $\langle u, v \rangle = 0$ oraz $\langle u, w \rangle = 0$.

Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = -2 \neq 0$, zatem v i w nie są do siebie ortogonalne. Zortogonalizujemy układ $\{v, w\}$ metodą Grama-Schmidta.

Niech $c_1 := v$. Poszukujemy $c_2 = w + \alpha c_1, \alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $\langle c_2, c_1 \rangle = 0$.

Obliczamy $\langle c_2, c_1 \rangle = \langle w + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle w, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle = (-2 + 0 + 0) + \alpha(4 + 1 + 0)$.

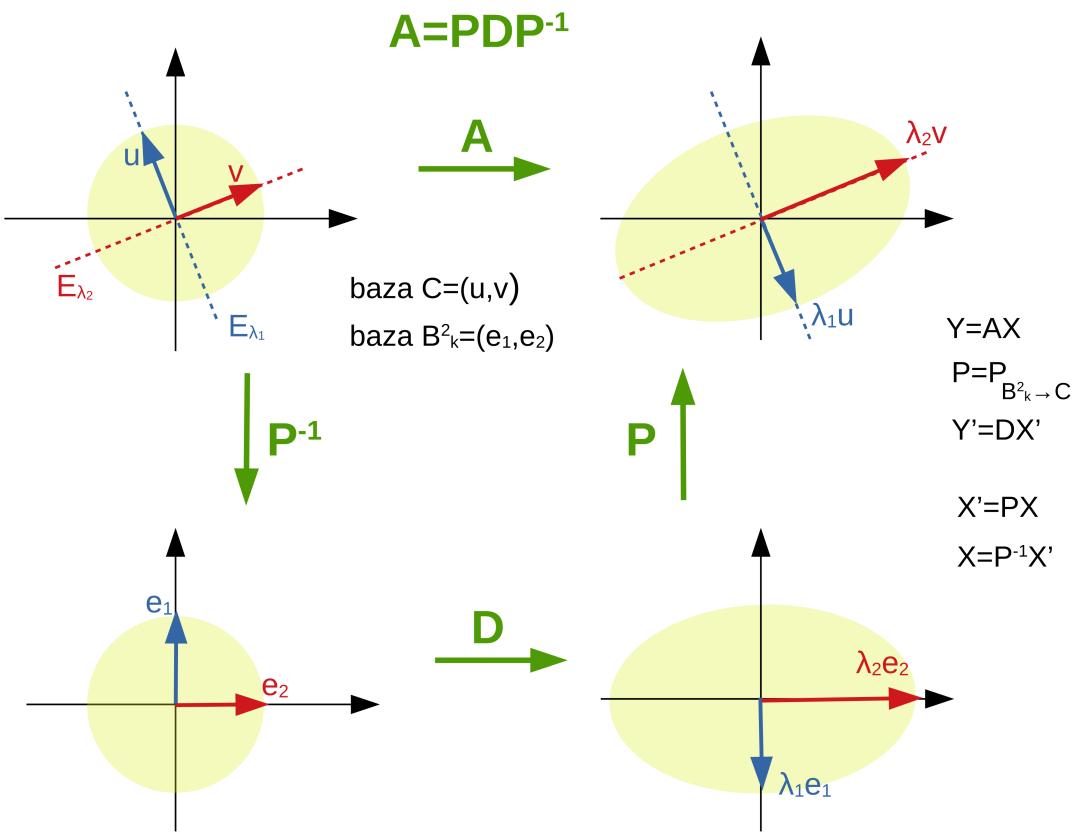
Skąd $5\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = \frac{2}{5}$ oraz $c_2 = w + \frac{2}{5}v = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Mamy $\langle c_1, c_2 \rangle = 0$. Normujemy wektory $\hat{c}_1 = \frac{c_1}{|c_1|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), \hat{c}_2 = \frac{c_2}{|c_2|} = \sqrt{\frac{5}{6}}(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Rozważamy bazę $(\hat{u}, \hat{c}_1, \hat{c}_2)$. Macierz diagonalizująca ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Można sprawdzić, że $PP^T = I$, zatem $P \in O(3)$ oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Uwaga 10.6.4. Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznej może być widziana jako *rotacja osi układu współrzędnych* w taki sposób, aby były one równoległe do wektorów własnych. Zobacz tutaj.



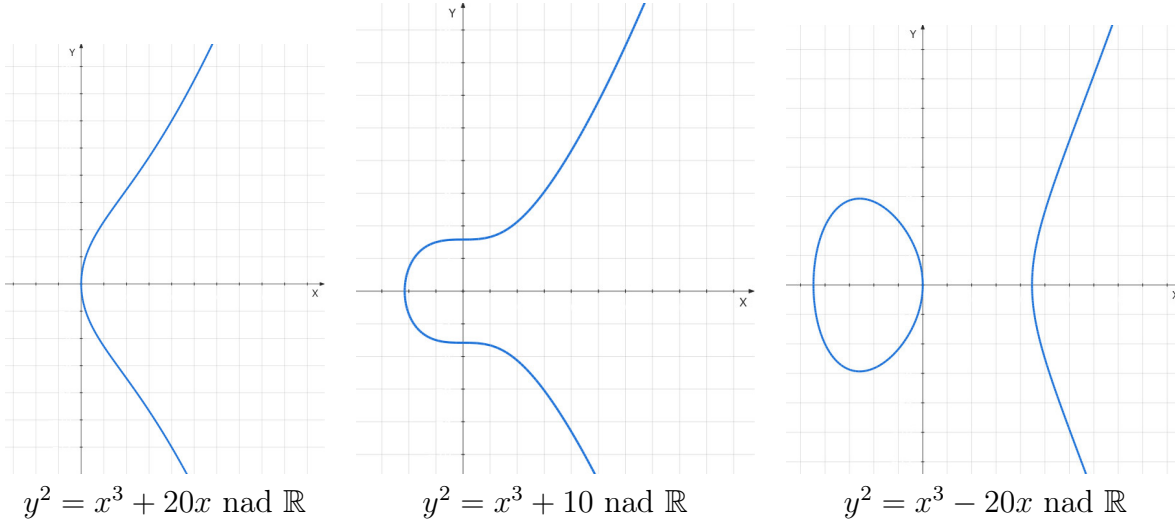
Dodatek

11.1 Struktura grupy na krzywej eliptycznej

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. *Krzywą eliptyczną* nad ciałem K nazywamy krzywą zdefiniowaną równaniem

$$y^2 = x^3 + ax + b, \text{ gdzie } a, b \in K \text{ są takie, że } 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

Warunek ten zapewnia, iż krzywa nie ma punktów osobliwych.



Oznaczmy

$$E(K) = \{(x, y) \in K \times K : y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\},$$

gdzie $\mathcal{O}$ jest pewnym wyróżnionym punktem, zwanym *punktem w nieskończoności*.

W zbiorze $E(K)$ można zdefiniować operację grupową + „dodawania” punktów, dla której $\mathcal{O}$ jest elementem neutralnym i taką, że $(E(K), +)$ jest grupą abelową.

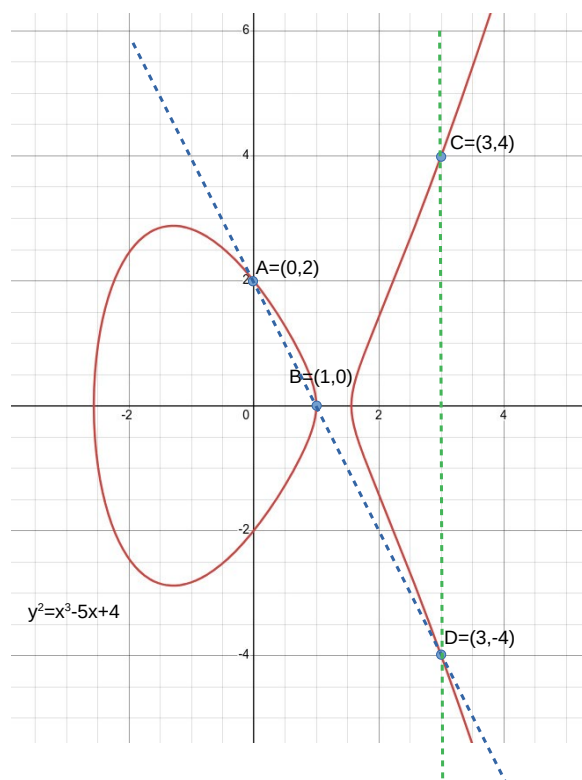
Niech $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ to dwa punkty ze zbioru $E(K)$. Zdefiniujemy działanie $+$: $E(K) \times E(K) \rightarrow E(K)$ w opisany niżej sposób.

1. $A + \mathcal{O} = A, \mathcal{O} + B = B$
2. Jeśli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = -y_2$, wówczas $A + B = \mathcal{O}$.
3. W pozostałych przypadkach obliczamy $\lambda = \begin{cases} \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} & ; A = B \\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} & : A \neq B \end{cases}$.

Wówczas $A + B = C = (x_3, y_3)$, gdzie $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ oraz $y_3 = -\lambda x_3 - \nu$, dla $\nu = y_1 - \lambda x_1$.

W przypadku gdy $A \neq B$ oraz $x_1 \neq x_2$ dodawanie punktów można opisać geometrycznie w następujący sposób.

Wyznaczmy prostą l przechodzącą przez punkty A i B . Można wykazać, że wówczas prosta l przecina krzywą w dokładnie trzech punktach A, B oraz $D = (x_4, y_4)$, gdzie $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ oraz $y_3 = \lambda x_3 + \nu$, dla $\nu = y_1 - \lambda x_1$. Inaczej mówiąc $x_4 = x_3$ zaś $y_4 = -y_3$.



Krzywe eliptyczne znajdują zastosowanie w kryptografii. Więcej informacji można znaleźć [tutaj](#) lub [tutaj](#).

Spis treści

	1
1.1 Notacja	1
1.2 Działania wewnętrzne i ich własności	2
1.3 Podstawowe struktury algebraiczne	4
	10
2.1 Ciało liczb zespolonych	10
2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza	13
2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe	16
2.4 Interpretacja geometryczna	21
	23
3.1 Macierze i ich własności	23
3.2 Wyznacznik macierzy	27
3.3 Macierz odwrotna	32
	36
4.1 Układy równań liniowych - podstawowe pojęcia	36
4.2 Układy Cramera	37
4.3 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego	38
4.4 Metoda eliminacji Gaussa	41
	45
5.1 Wektory w przestrzeni	45
5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	50
5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	52
5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych	52
	60
6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie	60
6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej	63
	74
7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności	74
7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego	77
7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych	78
7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego	79
7.5 Zmiana baz	83
7.6 Uwaga na temat rozwiązywania układów równań liniowych	88
	90
8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu	90
8.2 Diagonalizacja	96
8.3 Zastosowania diagonalizacji	101

	103
9.1 Definicja formy kwadratowej	103
9.2 Określoność formy kwadratowej	105
	109
10.1 Iloczyn skalarny i norma	109
10.2 Układy ortogonalne	111
10.3 Metody ortogonalizacji	115
10.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń	117
10.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe	120
10.6 Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznych	129
Dodatek	132
11.1 Struktura grupy na krzywej eliptycznej	132
	136

Linki do stron wykorzystane w dokumencie

Przykład błędnego rozumowania indukcyjnego

https://en.wikipedia.org/wiki/All_horses_are_the_same_color.

Macierz Vandermonde'a

https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_Vandermonde'a

Przykładowe zadanie polegające na wyznaczaniu odległości dwóch prostych skośnych

<https://enauczanie.pg.edu.pl/lab/geo3d/index.html?lang=pl&program=e>.

Powinowactwo ścinające

https://en.wikipedia.org/wiki/Shear_mapping

https://pl.wikipedia.org/wiki/Powinowactwo_osiowe

https://pl.wikipedia.org/wiki/Powinowactwo_ścinające

Rozpoznawanie twarzy

https://km.pcz.pl/konferencja/dokumenty/MMFT2017/Caban_L.pdf

<https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenface>

Kąty Eulera

<https://compsci290-s2016.github.io/CoursePage/Materials/EulerAnglesViz/index.html>

<http://www.geometrictools.com/Documentation/EulerAngles.pdf>

Rotacja w przetrzeźni

<https://www.andre-gaschler.com/rotationconverter/>.

Ortogonalna diagonalizacja jako rotacja

https://en.wikipedia.org/wiki/Diagonalizable_matrix#/media/File:Diagonalization_as_rotation.gif.