

ALGEBRA WYŻSZA

materiały do wykładu dla kierunku Informatyka stosowana WFiIS AGH

Elżbieta Adamus

Wydział Matematyki Stosowanej

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków 2021

Literatura

- [1] Z. Furdzik, J. Maj-Kluskowa, A. Kulczycka, M. Sękowska, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Część I - Algebra*, Wydawnictwo AGH, Kraków, 1993
- [2] B. Gleichgewicht, *Algebra*, PWN, Warszawa, 1983, wydanie III zmienione
- [3] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2020, wydanie XXII
- [4] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2002, wydanie VI

TEMAT: *Zbiory i relacje. Działania i wybrane struktury algebraiczne*

1.1 Zbiory i relacje

Definicja 1.1.1. Parę uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ podzbiorów zbioru $\{a, b\}$.

Twierdzenie 1.1.2. Dwie pary $(a, b), (c, d)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c \wedge b = d$.

Możemy zdefiniować n -kę uporządkowaną:

$$(a_1, a_2, a_3) := ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) := ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

...

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) := ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

Można uzasadnić, że

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ a_i = b_i.$$

Definicja 1.1.3. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Analogicznie definiujemy

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Oznaczamy $A^2 = A \times A$ oraz $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-razy}}$.

Przykład 1.1.4. Wyznacz $A \times B, B \times A, B^2$.

i) $A = \{3, 4, 5\}, B = \{5, 7\}$

ii) przedziały $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}, B = (1, 2) \subset \mathbb{R}$

Definicja 1.1.5. Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Każdy podzbiór $R \subseteq A \times B$ nazywamy *dwuargumentową relacją* w iloczynie kartezjańskim $A \times B$. Gdy $A = B$, to mówimy o dwuargumentowej relacji w zbiorze A .

Dla $(x, y) \in A \times B$ piszemy $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Przykład 1.1.6. i) Relacja inkluzji $\subseteq$ w zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(A)$

ii) Relacja podzielności $|$ w zbiorze $\mathbb{N}$ $m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad n = mk$

Definicja 1.1.7. Niech $R \subset A \times A$ będzie relacją w zbiorze A . Relację R nazywamy

- i) *zwrotną*, jeżeli $\forall x \in A \quad xRx$,
- ii) *przeciwzwrotną*, jeżeli $\forall x \in A \quad \sim (xRx)$,
- iii) *symetryczną*, jeżeli $\forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$,
- iv) *przeciwsymetryczną*, jeżeli $\forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow \sim (yRx)$,
- v) *antysymetryczną*, jeżeli $\forall x, y \in A \quad (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$,
- vi) *przechodnią*, jeżeli $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$,
- vii) *spójną*, jeżeli $\forall x, y \in A \quad xRy \vee yRx \vee x = y$.

Definicja 1.1.8. Niech A będzie zbiorem niepustym.

- i) Relację $R \subset A \times A$ nazywamy *relacją równoważności* w zbiorze A , jeśli jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia.
- ii) Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze A , zaś $x \in A$. Zbiór

$$[x]_R := \{y \in A : xRy\}$$

nazywamy *klasą równoważności* lub *klasą abstrakcji* relacji równoważności R wyznaczoną przez element x . Element x nazywamy *reprezentantem* klasy równoważności $[x]_R$.

- iii) Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze A . Zbiór

$$A/R := \{[x]_R : x \in A\}$$

nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru A przez relację R .

Twierdzenie 1.1.9. Niech A będzie zbiorem niepustym, zaś R relacją równoważności w zbiorze A . Wówczas dla dowolnych $x, y \in A$

- i) $x \in [x]_R$,
- ii) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow xRy$,
- iii) $[x]_R \neq [y]_R \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

Przykład 1.1.10. i) $A = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ustalone $xRy \Leftrightarrow n|(x - y)$

ii) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, gdzie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow xv = yu$

iii) Wektory zaczepione i wektory swobodne płaszczyzny euklidesowej

Definicja 1.1.11. Niech A będzie zbiorem, zaś $R \subset A \times A$ relacją w A .

- i) Relację R nazywamy *relacją częściowo porządkującą* lub *porządkiem częściowym* w zbiorze A , jeżeli jest ona zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Mówimy wówczas, że zbiór A jest *częściowo uporządkowany*.
- ii) Relację R nazywamy *porządkiem liniowym* w zbiorze A , jeśli jest ona porządkiem częściowym i jest spójna. Mówimy wówczas, że zbiór A jest *liniowo uporządkowany*.

Dwa elementy $x, y \in A$ nazywamy *porównywalnymi* jeśli xRy lub yRx . Jeśli zbiór jest liniowo uporządkowany, to każde dwa elementy tego zbioru są porównywalne.

Oznaczamy symbolem $\leq$ ustalony porządek częściowy. Wówczas piszemy $x < y$, gdy $x \leq y$ oraz $x \neq y$.

Przykład 1.1.12. i) $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ z relacją inkluzji $\subseteq$

- ii) $(\mathbb{R}, \leq)$ zbiór liniowo uporządkowany

1.2 Działania wewnętrzne i ich własności

Niech A będzie zbiorem niepustym.

Definicja 1.2.1. Dowloną funkcję $h : A \times A \rightarrow A$ nazywamy *działaniem wewnętrznym* w zbiorze A . Wartość funkcji $h(a, b) \in A$ nazywamy *wynikiem* działania dla pary argumentów $a, b \in A$.

Własności działań wewnętrznych

Definicja 1.2.2. Niech $*$: $A \times A \rightarrow A$ będzie działaniem wewnętrznym.

- i) Działanie $*$ nazywamy *przemiennym*, jeśli $\forall a, b \in A \quad a * b = b * a$.
- ii) Działanie $*$ nazywamy *łącznym*, jeśli $\forall a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
- iii) Element $e \in A$ nazywamy *elementem neutralnym* działania $*$, jeśli $\forall a \in A \quad a * e = e * a = a$.

Twierdzenie 1.2.3. Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.

Definicja 1.2.4. Niech $*$: $A \times A \rightarrow A$ będzie działaniem wewnętrznym, posiadającym element neutralny $e \in A$. Dla dowolnego $a \in A$ każdy element $a' \in A$ taki, że $a * a' = a' * a = e$, nazywamy *elementem symetrycznym* do a względem działania $*$.

Twierdzenie 1.2.5. Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

1.3 Podstawowe struktury algebraiczne

Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $*$: $G \times G \rightarrow G$ działaniem wewnętrznym w G .

Definicja 1.3.1. i) Parę $(G, *)$ nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie jest łączne.

ii) Parę $(G, *)$ nazywamy *monoidem*, jeżeli działanie jest łączne i posiada element neutralny.

iii) Parę $(G, *)$ nazywamy *grupą*, jeżeli działanie jest łączne, posiada element neutralny oraz każdy element G posiada element symetryczny względem $*$ w G .

Jeśli dodatkowo działanie $*$ jest przemienne, to mówimy o *półgrupie przemiennej*, *monoidzie przemennym*, *grupie przemiennej* (*abelowej*).

Przykład 1.3.2. Oznaczmy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{Z}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}, +)$	$(\mathbb{Q}, \cdot)$	$(\mathbb{R}^*, +)$	$(\mathbb{R}^*, \cdot)$
wewnętrzność						
łączność						
przemienność						
el. neutralny						
el. symetryczny						

Przykład 1.3.3. Niech $X = \{1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś działanie $\circ$ to mnożenie liczb. Czy $(X, \circ)$ jest półgrupą/grupą (abelową)?

Definicja 1.3.4. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \rightarrow A$, $* : A \times A \rightarrow A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \wedge c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedyneką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemiennym* lub *komutatywnym*.

Notacja addytywna	Notacja multiplikatywna

Definicja 1.3.5. Zespół $(K, \circ, *)$ złożony ze zbioru K zawierającego co najmniej dwa elementy i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : K \times K \rightarrow K$, $*$: $K \times K \rightarrow K$ nazywamy *ciałem*, jeśli

- $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$),
- $(K \setminus \{e_\circ\}, *)$ jest grupą abelową,
- działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.

Zatem ciało to pierścień przemienny $(A, +, \cdot)$ z jedynką (różną od zera), w którym wszystkie niezerowe elementy są odwracalne.

Przykład 1.3.6.

Przykład 1.3.7. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Definicja 1.3.8. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$:

Niech $\Omega = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to bijekcja taka, że $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$. Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujmy $i := (0, 1)$ tzw. *jednostka urojona*.

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Ponadto

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\operatorname{Re} z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\operatorname{Im} z$. Liczby postaci iy , $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) & (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) & (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

Uwaga: W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0, 0)$.

Definicja 2.1.1. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z . Oznaczamy ją $\bar{z}$.
- ii) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy *modułem* liczby z . Oznaczamy ją $|z|$.

Twierdzenie 2.1.2 (Własności liczb zespolonych). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2$
- ii) $\operatorname{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- iii) $\overline{(\bar{z})} = z$
- iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$
- vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- viii) $\operatorname{Re}z \leq |\operatorname{Re}z| \leq |z|$, $\operatorname{Im}z \leq |\operatorname{Im}z| \leq |z|$
- ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|$

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$.

Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{y}{|z|} \right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z . Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z .

Gdy $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstawimy podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$$z = -i$$

$$z = -\sqrt{27} - 3i$$

$$z = 7$$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Wówczas:

- i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$,
- ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$,
- iii) $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ tzw. *wzór de Moivre'a*

Przykład 2.2.3.

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}$$

Twierdzenie 2.2.4 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- iv) $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z .

Przykład 2.2.5.

$$e^{i\pi} =$$

Twierdzenie 2.2.6. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

- i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$, $e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,
- ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,
- iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,
- iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $|e^{i\alpha}| = 1$.

Wniosek 2.2.7. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

- i) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)}$,
- ii) $z^k = r^k e^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,
- iii) $\bar{z} = r^k e^{-i\varphi}$.

Wzory Eulera

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

Obrót o kąt φ

TEMAT: *Liczby zespolone - ciąg dalszy*

3.1 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 3.1.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n -tego stopnia* z liczby w .

Przykład 3.1.2.

$$z^2 = 8 + 6i$$

Twierdzenie 3.1.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem $\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$.

Przykład 3.1.4.

$$z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$$

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n -kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.

Przykład 3.1.5.

$$z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$$

Uwaga:

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} =$	$\sqrt{9} =$
$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-1} =$
$\sqrt[4]{1} =$	$\sqrt[4]{1} =$
$\sqrt{x^2} =$	$\sqrt{z^2} =$

Równania wielomianowe

Wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n

$$W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0,$$

$$c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$$

Definicja 3.1.6. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu W* , jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 3.1.7 (Bézout). Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 3.1.8. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W* , jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Twierdzenie 3.1.9 (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 3.1.10. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Trójmian kwadratowy

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

Przykład 3.1.11.

$$z^2 + 2iz + 3 = 0$$

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach z $\mathbb{R}$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 3.1.12. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Przykład 3.1.13.

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$$

Przykład 3.1.14.

$$W(z) = z^4 - 4iz^3 + 8iz + 32 = 0, \quad z_1 = 4i$$

3.2 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

$|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2

Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

Przykład 3.2.1.

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}\}$$

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

4.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 4.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m \times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nazywamy *i -tym wierszem* macierzy A , zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ nazywamy *j -tą kolumną* macierzy A .

Oznaczmy symbolem $M_{m \times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K . Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n* .

Dla $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
 $A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 4.1.2. $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}_{m \times n}$ - macierz zerowa wymiaru $m \times n$

Typy macierzy

Definicja 4.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

- a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$
- b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$
- c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:

$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n

$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n

$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

Przykład 4.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy
Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
 $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar
Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
 $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
- Mnożenie macierzy
Niech $A \in M_{m \times p}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{p \times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
 $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$
- Transponowanie
Niech $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
 $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n \times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-razy}}$

Przykład 4.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB , BA , D^2 .

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 4.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m \times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $A + B = B + A$
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$
- iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Twierdzenie 4.1.7. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $(AB)C = A(BC)$
- ii) $(A + B)C = AC + BC$
- iii) $A(B + C) = AB + AC$
- iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- v) $AI = A$
- v) $IA = A$

Twierdzenie 4.1.8. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $(A^T)^T = A$
- ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$
- iv) $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^r)^T = (A^T)^r$

Definicja 4.1.9. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 4.1.10. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. $\square$

Przykład 4.1.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 4.2.1. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 4.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Definicja 4.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K .

- i) *Minorem elementu a_{ij}* nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n - 1$ otrzymanej poprzez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A . Oznaczamy go symbolem M_{ij} .
- ii) *Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}* nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 4.2.4.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 4.2.5 (Laplace’a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

- i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik},$
- ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}.$

Przykład 4.2.6.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Wniosek 4.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 4.2.8.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k -tą kolumnę macierzy A , czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Twierdzenie 4.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i) $\det A = \det(A^T)$
- ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.
- iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.
- iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$
- v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.
- vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.
- vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K : A_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.
- viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A , to wyznacznik nie zmieni się.
- ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Wniosek 4.2.10. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

- ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$
- iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne: $w_i \leftrightarrow w_j$
 $\lambda \cdot w_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$
 $w_i + \lambda \cdot w_j, \lambda \in K$

Przykład 4.2.11.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

TEMAT: *Macierz odwrotna. Układy równań liniowych*

5.1 Macierz odwrotna

Definicja 5.1.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1} .

Przykład 5.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

Definicja 5.1.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

Twierdzenie 5.1.4. Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. Za pomocą definicji

Przykład 5.1.5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = ?$

2. Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)

Twierdzenie 5.1.6. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T.$$

Przykład 5.1.7.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

$$[A|I] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa:

$$\text{macierz nieosobliwa} \longrightarrow \text{macierz trójkątna górna} \longrightarrow I$$

Przykład 5.1.8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 5.1.9. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze A^{-1} , A^T , AB , αA , A^r również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$

v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

vi) $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$

5.2 Układy równań liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi*. Jeśli $b_1 = \dots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jeśli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

Przykład 5.2.1.

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ 2x + y &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y &= 5 \\ 2x + 2y &= 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 10 \end{cases}$$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Przykład 5.2.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Układy Cramera

Definicja 5.2.3. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera*.

Twierdzenie 5.2.4 (Cramera). Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

Przykład 5.2.5.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Wniosek 5.2.6. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \dots = x_n = 0$.

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Rząd macierzy

Definicja 5.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. *Minorem stopnia k macierzy A* , gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 5.2.8. *Rzędem macierzy $A \in M_{m \times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.* Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\text{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

Przykład 5.2.9. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 5.2.10 (Własności rzędu macierzy). Niech $A \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas:

- i) $r(A) = r(A^T)$
- ii) Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Definicja 5.2.11. Macierz $A \in M_{m \times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 5.2.12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 5.2.13. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Przykład 5.2.14.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

TEMAT: *Układy równań liniowych - ciąg dalszy*

6.1 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m \times (n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

Twierdzenie 6.1.1 (Kroneckera-Capellego). Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Wniosek 6.1.2. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 6.1.3.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 4x + y + 7z = 8 \\ 5x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$$

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.
2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.
 - 2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M . Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.
 - 2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M , przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmiennie niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładniej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \dots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \dots, x'_n$.

Przykład 6.1.4.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 1 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U , skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U , zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array} \right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.1.5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Przykład 6.1.6.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u & = & 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u & = & 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u & = & 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u & = & 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u & = & -\frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 6.1.7. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Przykład 6.1.8.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Przykład 6.1.9. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{cccccl} x_1 & + & 2x_2 & + & (p+1)x_3 & + & (p+3)x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & (2p+4)x_3 & + & (4p+6)x_4 & = & p+15 \\ (p+1)x_1 & + & 2x_2 & + & (p+1)x_3 & + & (p+3)x_4 & = & p+4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & (p+3)x_3 & + & (2p+2)x_4 & = & 11 \end{array} \right.$$

TEMAT: *Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$*

7.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{0} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z] && \text{suma wektorów} \\ \lambda \cdot \vec{u} &= [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z] && \text{iloczyn wektora przez skalar} \\ -\vec{u} &= [-u_x, -u_y, -u_z] && \text{wektor przeciwny do } \vec{u} \\ \vec{u} - \vec{v} &= \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} && \text{różnica wektorów}\end{aligned}$$

Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{i} = [1, 0, 0]$, $\hat{j} = [0, 1, 0]$, $\hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$, Przyjmujemy, że należy on do przedziału $[0, \pi]$.

Definicja 7.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 7.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Twierdzenie 7.1.3 (Własności iloczynu skalarnego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- iii) $(\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$
- iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$
- v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- vi) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.

układ lewoskrętny układ prawoskrętny

Definicja 7.1.4. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi*, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 7.1.5. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

- i) $\vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v}$,
- ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$,
- iii) orientacja trójki $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Twierdzenie 7.1.6. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Przykład 7.1.7. $\vec{u} = [1, 2, -3]$, $\vec{v} = [3, 4, 5]$

Twierdzenie 7.1.8 (Własności iloczynu wektorowego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$
- iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
- iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
- v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0})$

Reguła prawej dłoni:

Zastosowanie:

Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 7.1.9. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Twierdzenie 7.1.10. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Zastosowanie:

Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Przykład 7.1.11. Czy punkty $A = (1, 0, 2)$, $B = (5, 1, 5)$, $C = (3, -1, 2)$, $D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Twierdzenie 7.1.12 (Własności iloczynu mieszanego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$
- ii) $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$
- iii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{a})$
- iv) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

7.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π .

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{Równanie normalne: } \pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{Równanie ogólne: } \pi : Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Przykład 7.2.1. $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3], P_0 \in \pi, \vec{n} \perp \pi, \pi = ?$

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}, \vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{0}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π .

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

$$\text{Równanie parametryczne: } \pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Przykład 7.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy .

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

opisuje płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.
Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

7.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l .

$$P_0 \in l \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

$$\text{Równanie parametryczne: } l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Równanie kierunkowe: } l : \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$$

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

$$P \in l \quad \Leftrightarrow \quad (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

$$\text{Równanie krawędziowe: } l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Przykład 7.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

TEMAT: *Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$ - ciąg dalszy*

8.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{0}$,
 $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{0}$.

Płaszczyzny mogą być równoległe. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$,

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Jeśli $\pi_1 \nparallel \pi_2$, to płaszczyzny te przecinają się wzdłuż prostej.
W szczególności mogą być prostopadłe.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$$

Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Proste mogą być równoległe. $l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \emptyset$.

Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \emptyset$.

Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.

Kąty

Definicja 8.1.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.

Definicja 8.1.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π* nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l* nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.

Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

Przykład 8.1.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Definicja 8.1.4. *Kątem między płaszczyzną a prostą nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.*

Przykład 8.1.5. Wyznacz kąt między prostą $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a płaszczyzną $\pi : 3x + y + z + 1 = 0$.

Odległości

Definicja 8.1.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π . Oznaczamy ją $d(P, \pi)$.*

ii) *Odległością punktu P od prostej l , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l . Oznaczamy ją $d(P, l)$.*

Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$.
Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}.$$

Wzór na odległość punktu od prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π , to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punktu prostej od płaszczyzny.

Definicja 8.1.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.*

Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A, B, C] \neq \vec{0}$ zachodzi wzór

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}.$$

Definicja 8.1.8. *Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.*

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 . Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas

$$d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Symetrie

Definicja 8.1.9. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

- i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S , jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.
- ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l , jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.
- iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.

TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

9.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, zaś $V \neq \emptyset$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 9.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

- i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,
- ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
- v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K -liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami*.

Przykład 9.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

- i) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$
- ii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
- iii) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

Notacja:

Twierdzenie 9.1.3. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Wówczas:

- i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$
- v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$
- vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V .

Definicja 9.1.4. Jeśli zbiór U wraz z działaniami

$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U$, $\odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V .

Twierdzenie 9.1.5. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\emptyset \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U.$$

Przykład 9.1.6.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot), U = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot), U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f - \textit{parzysty}\}$

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot), U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

9.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K, v_1, \dots, v_m \in V$. Niech $W \neq \emptyset$ będzie podzbiorem zbioru V .

Definicja 9.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

ii) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K; w_1, \dots, w_k \in W; k \in \mathbb{N}\}$, nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\text{lin}_K W$ lub krótko $\text{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ piszemy też $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\}$.

Czyli $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 9.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\emptyset \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\text{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jest to najmniejsza podprzestrzeń V zawierająca zbiór W .

Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\text{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\text{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W .

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K .

Definicja 9.2.3. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ nazywamy *liniowo niezależnymi* lub mówimy, że tworzą *układ liniowo niezależny*, jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ zachodzi

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy *liniowo zależnymi*.

Twierdzenie 9.2.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Przykład 9.2.5. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Przykład 9.2.6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Przykład 9.2.7. Czy wektory $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 2, 0, -1)$, $w = (0, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

Twierdzenie 9.2.8. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

- i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.
- ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.
- iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.
- iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$.

Definicja 9.2.9. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ nazywamy *bazą* przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Przykład 9.2.10.

$$U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$$

Twierdzenie 9.2.11. i) Każda niepusta przestrzeń wektorowa posiada bazę.

ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne.

iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

Definicja 9.2.12. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy *wymiarem przestrzeni wektorowej* V i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest *n -wymiarowa*. Jeśli przestrzeń V nie ma skończonej bazy, to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

- Wniosek 9.2.13.** i) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.
- ii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.
- iii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

Przykład 9.2.5 - raz jeszcze

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

2) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot), \quad \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

3) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

Twierdzenie 9.2.14. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

- i) $\dim W \leq \dim V$,
- ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 9.2.15. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \dots, b_n)$ nazywamy *reperem bazowym*.

Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 9.2.16. Skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

Przykład 9.2.17. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B}$ - baza kanoniczna, $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$
 $v = (-3, 15, 7)$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że

$$\begin{aligned} b'_1 &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \dots + \alpha_{n1}b_n \\ b'_2 &= \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{n2}b_n \\ &\dots \\ b'_n &= \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \dots + \alpha_{nn}b_n \end{aligned}$$

Definicja 9.2.18. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa.

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 9.2.19. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x'_1, \dots, x'_n]_{\mathcal{B}'}$.

Wówczas $X = PX'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$.

Przykład 9.2.17 - ciąg dalszy

Twierdzenie 9.2.20. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

$$\text{i) } P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \right)^{-1},$$

$$\text{ii) } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}.$$

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

10.1 Definicja i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K .

Definicja 10.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ spełniające warunki

$$\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v),$$

$$\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v),$$

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.

Twierdzenie 10.1.2. Niech $\varphi : V \rightarrow W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

- i) φ jest liniowe
- ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$
- iii) $\forall v_1, \dots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$
 $\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $\text{Hom}_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $\text{Hom}(V, W)$).

Przykład 10.1.3. Czy φ jest liniowe?

- 1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

3) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 10.1.4. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \rightarrow W$ jest liniowe, to wówczas

- i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,
- ii) $\forall v \in V \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Definicja 10.1.5. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy:

- i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,
- ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,
- iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją,
- iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,
- v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,
- vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.

Twierdzenie 10.1.6. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K . Niech $\{b_1, \dots, b_n\}$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \dots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Przykład 10.1.7. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ , jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

10.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 10.2.1. i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subset V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\text{Ker}\varphi$.

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subset W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\text{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$.

Twierdzenie 10.2.2. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\text{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś zbiór $\text{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W .

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 10.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

- i) φ jest injekcją $\Leftrightarrow \text{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,
- ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow \text{Im}\varphi = W$.

Definicja 10.2.4. Jeśli $\dim \text{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\text{rank}(\varphi)$.

Twierdzenie 10.2.5. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$r(\varphi) + \dim \text{Ker}\varphi = \dim V.$$

Wniosek 10.2.6. $\dim \text{Im}\varphi \leq \dim V$ dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Przykład 10.2.7.

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz φ , ich bazy i wymiary. Podaj własności φ .

10.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U, V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K .

Twierdzenie 10.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x),$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem K .

Twierdzenie 10.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Oznaczmy przez $\text{Aut}(V) = \{f \in \mathcal{L}(V, V) : f \text{ — bijekcja}\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V .

Twierdzenie 10.3.3. Zbiór $\text{Aut}(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą.

TEMAT: *Przekształcenia liniowe - ciąg dalszy*

11.1 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$.

Definicja 11.1.1. *Macierzą (lub reprezentacją macierzową) odwzorowania liniowego φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m \times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.*

Przykład 11.1.2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

b) bazy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

Przykład 11.1.3. $f : \mathbb{C}_1[z] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$
 bazy standardowe

Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Twierdzenie 11.1.4. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y.$$

Przykład 11.1.2 - ciąg dalszy

Uwaga 11.1.5. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\text{rank}(\varphi) = \text{rank} A$.

W przykładzie 11.1.2:

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K, f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W), B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 11.1.6. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 11.1.7. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

- i) f jest izomorfizmem
- ii) $\text{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$
- iii) $\text{Im} f = W$
- iv) $\text{rank} A = \dim V$
- v) $\det A \neq 0$

Wniosek 11.1.8. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Twierdzenie 11.1.9. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończone wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V), g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V), B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

Przykład 11.1.10. Za pomocą rachunku macierzowego:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z) & \varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g) \\ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (x - 3z, x + y) & \varphi(x, y, z) = ? \\ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = (2x + y, x - y) & \varphi(1, 2, 3) = ? \end{array}$$

11.2 Zmiana baz

Twierdzenie 11.2.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W . Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \rightarrow \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Przykład 11.1.2 raz jeszcze

Uwaga 11.2.2. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwozowania identycznościowego $\text{id} : V \rightarrow V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

12.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru n . Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi*.

Twierdzenie 12.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2 .

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemienne.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

Definicja 12.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko φ -*niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad \text{tzn.} \quad \forall u \in U \quad \varphi(u) \in U.$$

Przykład 12.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

2) Niech $V, \varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \text{Ker} \varphi$

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$.

Definicja 12.1.4. Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ , jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ .

Przykład 12.1.5.

$$V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \varphi = \frac{d}{dx}$$

Uwaga 12.1.6. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ .

Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symblem $\text{Spec}(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Przykład 12.1.7. $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, φ - rzut prostokątny na oś Ox

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ oraz $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ , uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Twierdzenie 12.1.8. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ -niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \text{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$.

Definicja 12.1.9. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ , odpowiadającą wartości własnej λ .

Twierdzenie 12.1.10. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V . Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$

ii) $\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Wniosek 12.1.11. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = O, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 12.1.12. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V .

Definicja 12.1.13. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V . Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu.

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definicja 12.1.14. i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A .

ii) Każdy rzeczywisty pierwiastek wielomianu χ_A nazywamy *wartością własną* macierzy A . Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symblem $\text{Spec}(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A , odpowiadającym wartości własnej λ .

Uwaga 12.1.15. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ oraz $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$.

Definicja 12.1.16. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ .

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ .

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z n różnych wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

Twierdzenie 12.1.17. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V . Wówczas

$$\text{i) } 1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda,$$

$$\text{ii) } \dim E_\lambda = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I).$$

Przykład 12.1.18.

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z)$$

12.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 12.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in \text{End}(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 12.2.2. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$.

- i) Jeśli φ ma widmo proste $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \dots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i , dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V .
- ii) Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n \in V$ endomorfizmu φ tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

- iii) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ .

Definicja 12.2.3. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V , że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 12.2.4. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ .

Macierz diagonalizująca

Definicja 12.2.5. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą *diagonalizowalną*, gdy istnieje macierz niesobliwa $P \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A .

Wniosek 12.2.6. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych A .

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Przykład 12.2.7. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

Przykład 12.2.8. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$, $\varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ jest diagonalizowalny?

Przykład 12.2.9. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem $\varphi(x, y, z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

Wniosek 12.2.10. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V . Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni V , to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^r P^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 12.2.11. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P . Oblicz $\varphi^{101}(1, 2, 3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

Przykład 12.2.12.

$$f \in \text{End}(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

TEMAT: *Formy kwadratowe*

13.1 Definicja formy kwadratowej

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną, tzn. $A = A^T$.

Definicja 13.1.1. Funkcję $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $\gamma(x) = X^T A X$,

gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nazywamy

formą kwadratową. Macierz symetryczną A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* γ .

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D + D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D - D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

Zauważmy, że $X^T D X = X^T B X$, bowiem $X^T C X = 0$.

Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

Zatem γ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2.

Zauważmy, że $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2 \gamma(x)$.

Przykład 13.1.2. Poniższe odwzorowania to formy kwadratowe.

i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ii) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, zaś $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Niech $P_0 \in \Omega$. Różniczka rzędu drugiego funkcji f w punkcie P_0

$$d_{P_0}^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{P_0}^2 f(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$$

jest formą kwadratową. Jej macierz ma postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}.$$

13.2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej γ mamy $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

Definicja 13.2.1. Formę kwadratową $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$ nazywamy

- i) *dodatnio określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) > 0$,
- ii) *ujemnie określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) < 0$,
- iii) *dodatnio półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \geq 0$,
- iv) *ujemnie półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \leq 0$,
- v) *nieokreśloną*, jeśli przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.

Terminologia ta przenosi się na macierze. Macierz symetryczna A jest dodatnio określona, gdy forma kwadratowa $\gamma(x) = X^T A X$ jest dodatnio określona.

Przykład 13.2.2. i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnio określona

ii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$ jest ujemnie określona

iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ jest nieokreślona, bowiem $\gamma(1, 0, 1) = 2 > 0$, zaś $\gamma(0, 1, 0) = -1 < 0$.

iv) $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_3^2$ jest dodatnio półokreślona. $\forall x_2 \in \mathbb{R} \quad \gamma(0, x_2, 0) = 0$

Badanie określoności formy kwadratowej

Definicja 13.2.3. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

- i) *Minorem głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ wierszy i kolumn o tych samych indeksach.
- ii) *Minorem wiodącym głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k .

Symbolem $D_{i_1 \dots i_k}$ oznaczamy minor główny stopnia k , powstały przez skreślenie wierszy i kolumn poza tymi o indeksach $i_1 < \dots < i_k$.

Przykład 13.2.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 13.2.5 (Kryterium Sylwestera). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną.

- i) A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne są dodatnie, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k > 0$.
- ii) A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego – ujemne, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} (-1)^k \Delta_k > 0$.

Uwaga 13.2.6. Z warunku $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \Delta_k \geq 0$ nie wynika dodatnia półokreśloność A .

Przykład 13.2.7. i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona.

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -3 < 0.$$

ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest półokreślona ujemnie, gdyż
 $\gamma(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$.

Twierdzenie 13.2.8. Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$.

- i) Forma kwadratowa γ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne, tzn.
 $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.
- ii) Forma kwadratowa γ jest ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne macierzy A przyjmują następujące znaki
 $\forall 1 \leq k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad (-1)^k D_{i_1 \dots i_k} \geq 0$.

Przykład 13.2.9. Forma kwadratowa $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ jest dodatnio półokreślona.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

$$D_2 = 0, D_3 = 1, D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oczywiste bowiem $\gamma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 \geq 0$.

Uwaga 13.2.10. Jeśli $\Delta_2 = D_{12} < 0$, to forma jest nieokreślona.

Rzeczywista macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Twierdzenie 13.2.11 (Kryterium wartości własnych). Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$, gdzie $A = A^T$ oraz niech $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wówczas forma kwadratowa γ jest

- i) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0$,
- ii) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i < 0$,
- iii) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \geq 0$,
- iv) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i \leq 0$,
- iv) nieokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$.

Przykład 13.2.12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest dodatnio półokreślona.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t^2(2-t)$$

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$$

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

14.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 14.1.1. Funkcję $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w),$
- ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u),$
- ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V.$

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*.

Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

Przykład 14.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

$$\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Oznaczamy E^n lub $\mathbb{E}^n$.

$$V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i), \text{ gdzie } x_0 < x_1 < \dots < x_n \text{ liczby ustalone}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T),$$

Twierdzenie 14.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w),$
- ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0,$
- iii) $\forall u, v \in V \quad \left(s(u, v)\right)^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v) \quad \text{nierówność Schwarza}$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 14.1.4. Funkcję $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V,$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|,$
- iii) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

Liczbę $\|v\| \geq 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora v* .

Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Twierdzenie 14.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \|v\|_s = \sqrt{s(v, v)}$$

jest normą w przestrzeni V .

Mówimy, że jest to norma określona przez iloczyn skalarny.

14.2 Układy ortogonalne

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*.

Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować.

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami.

Przykład 14.2.1. $V = \mathbb{R}_1[x]$, $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$
 $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$

Definicja 14.2.2. i) Dwa wektory nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad \text{gdy } i \neq j.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany.

Przykład 14.2.3. $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

Twierdzenie 14.2.4 (Pitagorasa). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Twierdzenie 14.2.5. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 14.2.6. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

- ii) W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 14.2.7. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Przykład 14.2.8. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

W $\mathbb{R}^3$:

Twierdzenie 14.2.9. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Niech $v \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}.$$

Wniosek 14.2.10. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe - ciąg dalszy*

15.1 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 15.1.1. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \dots, b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \dots, c_m\} \subset V$ taki, że

$$\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots, c_m\}.$$

Wniosek 15.1.2. i) Każda skończona wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{0\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.
ii) W przestrzeni euklidesowej skończonej wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 15.1.3. $V = \mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym, baza $\mathcal{B} = (b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4))$

Wniosek 15.1.4. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \quad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 \quad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 \quad \dots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\|c_i\|^2} c_i$$

Przykład 15.1.5. $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$, baza $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 15.1.6. Niech $u_1, \dots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \dots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Przykład 15.1.7. $V = \mathbb{R}^3$, baza $\mathcal{B} = (b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4))$

15.2 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 15.2.1. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru S* w przestrzeni euklidesowej V . Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora $x \in V$* .

Twierdzenie 15.2.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

- i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrzenią liniową.
- ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 15.2.3. Wyznacz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^4$ ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni U* i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 15.2.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad w \perp b_i$$

Przykład 15.2.5. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 15.2.6. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

- i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,
- ii) $U^\perp = (\text{lin}U)^\perp$,
- iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 15.2.7. Operator liniowy $\pi \in \text{End}(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V \quad \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad v - u \perp U,$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U . Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U .

Uwaga 15.2.8 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego). Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U .

- i) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U , wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}.$$

- ii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortogonalną, wówczas rzut ten określony jest wzorem

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 + \dots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

- iii) Jeśli baza $\mathcal{B}$ jest bazą ortonormalną, wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_k \rangle b_k.$$

Przykład 15.2.9. $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$, $v = (1, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$, $\pi_U(v) = ?$

Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta

Przykładowy egzamin z przedmiotu Algebra wyższa

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów.

Zadanie 1. (20 pkt)

- a) Czy zbiór $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia liczb tworzy pierścień (przemienny, z jedynką)? Czy jest to ciało? Odpowiedź uzasadnij.
- b) Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych podane równanie.

$$z^3 = (\sqrt{12} - 2i)^{21}(i - 1)^{13}$$

Zadanie 2. (20 pkt)

- a) Podaj wszystkie możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_6(\mathbb{R})$ takiej, że

$$3A - (A^T)^7 = O.$$

- b) Dana jest płaszczyzna $\pi_1 : 4x + 2y - z + 2 = 0$. Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty A, B, C , jeżeli $A = (2, 4, 6)$, zaś B i C to końce odcinka symetrycznego do odcinka

$$DE : \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -3 + 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in [0, 1] \text{ względem płaszczyzny } \pi.$$

Zadanie 3. (20 pkt)

- a) Podaj definicję endomorfizmu diagonalizowalnego.
- b) Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dany będzie wzorem

$$\varphi(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Uzasadnij, że φ jest diagonalizowalny i oblicz $\varphi^{103}(2, 1, 0)$.

Zadanie 4. (20 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, t) = (2x + 3y + z + t, -3x + y + 4z - 7t, x + 2y + z).$$

- a) Wyznacz $\text{Ker } f$, jego bazę i wymiar. Czy f jest monomorfizmem / epimorfizmem?
- b) W $\mathbb{R}^4$ rozważmy standardowy iloczyn skalarny. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $(1, 1, -2, -1)$ na $\text{Ker } f$.
- c) Podaj macierz $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}_k^3)$, gdy $\mathcal{B} = \left((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0) \right)$ i korzystając z macierzy A oblicz $f(1, 1, -2, -1)$.

Zadanie 5. (20 pkt) Dana jest przestrzeń wektorowa $(\mathbb{R}_2[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$. W przestrzeni tej definiujemy iloczyn skalarny

$$(p(x), q(x)) = aa' + bb' + cc', \quad \text{dla} \quad p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

- a) Udowodnij, że $\mathcal{B} = (p, q, r)$ jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$, gdy $p(x) = x^2 + x, q(x) = x^2, r(x) = x - 1$.
- b) Metodą Grama-Schmidta przeprowadź ortogonalizację bazy $\mathcal{B}$.

Spis treści

	1
1.1 Zbiory i relacje	1
1.2 Działania wewnętrzne i ich własności	5
1.3 Podstawowe struktury algebraiczne	7
	11
2.1 Ciało liczb zespolonych	11
2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza	14
	17
3.1 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe	17
3.2 Interpretacja geometryczna	22
	24
4.1 Macierze i ich własności	24
4.2 Wyznacznik macierzy	29
	34
5.1 Macierz odwrotna	34
5.2 Układy równań liniowych	37
	41
6.1 Twierdzenie Kroneckera-Capellego	41
	48
7.1 Wektory w przestrzeni	48
7.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	52
7.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	54
	55
8.1 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych	55
	61
9.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie	61
9.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej	64
	72
10.1 Definicja i podstawowe własności	72
10.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego	74
10.3 Działania na odwzorowaniach liniowych	76
	77
11.1 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego	77
11.2 Zmiana baz	81

	82
12.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu	82
12.2 Diagonalizacja	87
	91
13.1 Definicja formy kwadratowej	91
13.2 Określoność formy kwadratowej	92
	95
14.1 Iloczyn skalarny i norma	95
14.2 Układy ortogonalne	97
	100
15.1 Metody ortogonalizacji	100
15.2 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń	103
Przykładowy egzamin z przedmiotu Algebra wyższa	108