ALGEBRA WYŻSZA

materiały do wykładu dla kierunku Informatyka stosowana WFiIS AGH

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków 2023

References

[1] Z. Furdzik, J. Maj-Kluskowa, A. Kulczycka, M. Sękowska, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Część I - Algebra*, Wydawnictwo AGH, Kraków, 1993

[2] B. Gleichgewicht, *Algebra*, PWN, Warszawa, 1983, wydanie III zmienione

[3] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2020, wydanie XXII

[4] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2015, wydanie VIII poprawione

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 1
Data: ....

TEMAT: *Zbiory i relacje. Działania i wybrane struktury algebraiczne*

1.1 Zbiory i relacje

Definicja 1.1.1. *Parą uporządkowaną* (a, b) nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ podzbiorów zbioru $\{a, b\}$.

Twierdzenie 1.1.2. Dwie pary $(a, b), (c, d)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c \wedge b = d$.

Możemy zdefiniować n-kę uporządkowaną:

$$(a_1, a_2, a_3) := ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) := ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

$$\dots$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) := ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

Można uzasadnić, że

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \; a_i = b_i.$$

Definicja 1.1.3. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : \; a \in A \wedge b \in B\}.$$

Analogicznie definiujemy
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots a_n) : \; a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$.
Oznaczamy $A^2 = A \times A$ oraz $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n-razy}$.

Przykład 1.1.4. Wyznacz $A \times B$, $B \times A$, B^2.

i) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 7\}$

$A \times B = \{(3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 5), (5, 7)\}$
$B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5)\}$ $\qquad A \times B \neq B \times A$
$B^2 = \{(5, 5), (5, 7), (7, 5), (77)\}$

ii) przedziały $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $B = (1, 2) \subset \mathbb{R}$

$A \times B = \{(x, y) : 0 < x < 1 \wedge 1 < y < 2\}$
$B \times A = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 < y < 1\}$

iii) $A = B = \mathbb{R}$

$A \times B = B \times A = A^2 = B^2$
Oznaczamy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ - płaszczyzna rzeczywista

Definicja 1.1.5. Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Każdy podzbiór $R \subseteq A \times B$ nazywamy *dwuargumentową relacją* w iloczynie kartezjańskim $A \times B$. Gdy $A = B$, to mówimy o dwuargumentowej relacji w zbiorze A.

Dla $(x, y) \in A \times B$ piszemy $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Przykład 1.1.6. i) Relacja równości $=$ w zbiorze $\mathbb{N}$

ii) Relacja $\leq$ w zbiorze $\mathbb{N}$ (lub $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

iii) Relacja inkluzji $\subseteq$ w zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$

iv) Relacja podzielności $|$ w zbiorze $\mathbb{N}$, tj. $m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad n = mk$

Definicja 1.1.7. Niech $R \subset A \times A$ będzie relacją w zbiorze A. Relację R nazywamy

i) *zwrotną*, jeżeli $\quad \forall x \in A \quad xRx$,

ii) *przeciwzwrotną*, jeżeli $\quad \forall x \in A \quad \sim (xRx)$,

iii) *symetryczną*, jeżeli $\quad \forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$,

iv) *przeciwsymetryczną*, jeżeli $\quad \forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow \sim (yRx)$,

v) *antysymetryczną*, jeżeli $\quad \forall x, y \in A \quad (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$,

vi) *przechodnią*, jeżeli $\quad \forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$,

vii) *spójną*, jeżeli $\quad \forall x, y \in A \quad xRy \vee yRx \vee x = y$.

Definicja 1.1.8. Niech A będzie zbiorem niepustym.

i) Relację $R \subset A \times A$ nazywamy *relacją równoważności* w zbiorze A, jesli jest ona zwrotna, symetryczna i przechodnia.

ii) Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze A, zaś $x \in A$. Zbiór

$$[x]_R := \{y \in A : \ xRy\}$$

nazywamy *klasą równoważności* lub *klasą abstrakcji* relacji równoważności R wyznaczoną przez element x. Element x nazywamy *reprezentantem* klasy równoważności $[x]_R$.

iii) Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze A. Zbiór

$$A/R := \{[x]_R : \ x \in A\}$$

nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru A przez relację R.

Twierdzenie 1.1.9. Niech A będzie zbiorem niepustym, zaś R relacją równoważności w zbiorze A. Wówczas dla dowolnych $x, y \in A$

i) $x \in [x]_R$,

ii) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow xRy$,

iii) $[x]_R \neq [y]_R \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.

Dowód. iii) $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing \Leftrightarrow \exists\, z \in [x]_R \cap [y]_R \Leftrightarrow \exists\, z : z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Leftrightarrow zRx \wedge zRy \Leftrightarrow zRx \wedge yRz \Rightarrow xRy$. Na mocy ii) mamy, że $[x]_R = [y]_R$. $\square$

Uwaga 1.1.10. Określenie relacji równoważności w danym zbiorze A jest równoznaczne z dokonaniem podziału tego zbioru na niepuste i rozłączne zbiory, których suma mnogościowa równa jest temu zbiorowi. Taki podział nazywamy *rozbiciem* zbioru A.

$$A = \bigcup_{x \in A} [x]_R$$

Przykład 1.1.11. i) $A = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ustalone $\quad xRy \Leftrightarrow n|(x-y)$

$xRy \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : kn = x - y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : y = x + kn$

Jest to relacja równoważności zwana *relacją przystawania modulo n*.

Piszemy $x \equiv y \ (mod\, n)$ lub $x \equiv_n y$.

$\mathbb{Z}/_{\equiv_n} = \big\{[0], [1], \ldots, [n-1]\big\}$ zbiór reszt modulo n

ii) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, gdzie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\quad (x, y)R(u, v) \Leftrightarrow xv = yu$

$(x, y)R(x, y) \Leftrightarrow xy = yx$
$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow xv = yu \Leftrightarrow uy = vx \Leftrightarrow (u, v)R(x, y)$
przechodniość - ĆWICZENIE

Jest to relacja równoważności. Liczba wymierna $\frac{x}{y}$ to klasa abstrakcji.

$[(x, y)]_R = \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (x, y)R(u, v)\} = \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : xv = yu\} = \big\{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \frac{x}{y} = \frac{u}{v}\big\}$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_R$
Działania $+, \cdot$ w $\mathbb{Q}$ nie zależą od wyboru reprezentanta.

iii) Wektory zaczepione i wektory swobodne płaszczyzny euklidesowej

Wektor swobodny to klasa abstrakcji wektorów zaczepionych.

Definicja 1.1.12. Niech A będzie zbiorem, zaś $R \subset A \times A$ relacją w A.

i) Relację R nazywamy *relacją częściowo porządkującą* lub *porządkiem częściowym* w zbiorze A, jeżeli jest ona zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Mówimy wówczas, że zbiór A jest *częściowo uporządkowany.*

ii) Relację R nazywamy *porządkiem liniowym* w zbiorze A, jeśli jest ona porządkiem częściowym i jest spójna. Mówimy wówczas, że zbiór A jest *liniowo uporządkowany.*

Dwa elementy $x, y \in A$ nazywamy *porównywalnymi* jeśli xRy lub yRx. Jeśli zbiór jest liniowo uporządkowany, to każde dwa elementy tego zbioru są porównywalne.

Oznaczamy symbolem $\leq$ ustalony porządek częściowy.
Wówczas piszemy $x < y$, gdy $x \leq y$ oraz $x \neq y$.
Relacja $<$ jest przeciwzwrotna, asymetryczna i przechodnia. Nazywamy ją *silnym porządkiem częściowym.*

Przykład 1.1.13. i) $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ z relacją inkluzji $\subseteq$

$A \subseteq A$
$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A \ \Leftrightarrow \ A = B$
$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \Leftrightarrow \ A \subseteq C$

Jest to porządek częściowy, który nie jest porządkiem liniowym.

Jeśli $A \cap B = \varnothing$, to ani $A = B$, ani $A \subseteq B$, ani $B \subseteq A$.

ii) $(\mathbb{R}, \leq)$ zbiór liniowo uporządkowany

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \ \vee \ y \leq x \ \vee x = y$
Wszystkie liczby rzeczywiste są porównywalne.

1.2 Działania wewnętrzne i ich własności

Niech A będzie zbiorem niepustym.

Definicja 1.2.1. Dowolną funkcję $h : A \times A \to A$ nazywamy *działaniem wewnętrznym* w zbiorze A. Wartość funkcji $h(a, b) \in A$ nazywamy *wynikiem* działania dla pary argumentów $a, b \in A$.

Przykład 1.2.2.

i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

ii) Odejmowanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

iii) Dodawanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Własności działań wewnętrznych

Definicja 1.2.3. Niech $* : A \times A \to A$ będzie działaniem wewnętrznym.

i) Działanie $*$ nazywamy *przemiennym*, jeśli $\forall\, a, b \in A \quad a * b = b * a$.

ii) Działanie $*$ nazywamy *łącznym*, jeśli $\forall\, a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.

iii) Element $e \in A$ nazywamy *elementem neutralnym* działania $*$, jeśli $\forall\, a \in A \quad a * e = e * a = a$.

Przykład 1.2.4.

i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemiennym w $\mathbb{R}$. 0 jest elementem neutralnym.

ii) Mnożenie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemiennym w $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 jest elementem neutralnym.

Twierdzenie 1.2.5. Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $e_1, e_2 \in A$ będące elementami neutralnymi w A. Wówczas $e_2 = e_1 * e_2 = e_1$. □

Przykład 1.2.6. Niech X to dowolny zbiór.

i) Zbiór pusty $\varnothing$ jest elementem neutralnym w $\big(P(X), \cup\big)$.

ii) Zbiór X jest elementem neutralnym w $\big(P(X), \cap\big)$.

Definicja 1.2.7. Niech $* : A \times A \to A$ będzie działaniem wewnętrznym, posiadającym element neutralny $e \in A$. Dla dowolnego $a \in A$ każdy element $a' \in A$ taki, że $a * a' = a' * a = e$, nazywamy *elementem symetrycznym* do a względem działania $*$.

Przykład 1.2.8.

i) W $(\mathbb{R}, +)$ elementem symetrycznym do 5 jest -5 (tzw. element przeciwny).

ii) W $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ elementem symetrycznym do 5 jest $\frac{1}{5}$ (tzw. element odwrotny).

iii) W $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + 1$, elementem neutralnym jest -1, zaś elementem symetrycznym do x jest $-2 - x$.

Twierdzenie 1.2.9. Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

Dowód. Rozważmy zbiór A z działaniem łącznym $\circ$. Niech e będzie elementem neutralnym działania $\circ$. Niech a', a'' to dwa elementy symetryczne do $a \in A$. Wówczas

$$\begin{aligned} a \circ a' = e \ \Rightarrow \ a'' \circ (a \circ a') &= a'' \circ e \\ (a'' \circ a) \circ a' &= a'' \\ e \circ a' &= a'' \\ a' &= a'' \end{aligned}$$

□

1.3 Podstawowe struktury algebraiczne

Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $* : G \times G \to G$ działaniem wewnętrznym w G.

Definicja 1.3.1. i) Parę $(G, *)$ nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie jest łączne.

ii) Parę $(G, *)$ nazywamy *monoidem*, jeżeli działanie jest łączne i posiada element neutralny.

iii) Parę $(G, *)$ nazywamy *grupą*, jeżeli działanie jest łączne, posiada element neutralny oraz każdy element G posiada element symetryczny względem $*$ w G.

Jeśli dodatkowo działanie $*$ jest przemienne, to mówimy o *półgrupie przemiennej, monoidzie przemiennym, grupie przemiennej (abelowej).*

Przykład 1.3.2. Oznaczmy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{Z}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}, +)$	$(\mathbb{Q}, \cdot)$	$(\mathbb{R}^*, +)$	$(\mathbb{R}^*, \cdot)$
wewnętrzność	✓	✓	✓	✓	nie $-1+1=0$ $0 \notin \mathbb{R}^*$	✓
łączność	✓	✓	✓	✓		✓
przemienność	✓	✓	✓	✓		✓
el. neutralny	brak $0 \notin \mathbb{N}$	✓ $1 \in \mathbb{Z}$	✓ $0 \in \mathbb{Q}$	✓ $1 \in \mathbb{Q}$		✓ $1 \in \mathbb{R}^*$
el. symetryczny		brak $2 \cdot b = 1$ $b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	✓ $a + a' = 0$ $a' = -a \in \mathbb{Q}$	brak $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ nie dla $a = 0$		✓ $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
	półgrupa przemienna bez el. neutr.	monoid przemienny	grupa abelowa	monoid przemienny		grupa abelowa

Przykład 1.3.3. Niech $X = \{1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś działanie $\circ$ to mnożenie liczb. Czy $(X, \circ)$ jest półgrupą/grupą (abelową)?

Jeśli $a, b, c \in X$, to istnieją $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ takie, ze $a = 2^n, b = 2^m, c = 2^k$.

wewnętrzne $\quad a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in A$

przemienne $\quad a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = b \circ a$

łączne $\quad (a \circ b) \circ c = 2^{n+m} \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n \cdot 2^{m+k} = a \circ (b \circ c)$

el. neutralny $\quad e = 2^s, s \in \mathbb{N}_0 \quad a \circ e = a \Leftrightarrow 2^{n+s} = 2^n \Rightarrow s = 0,\ e = 1 \in X$

brak el. odwrotnego $\quad a \circ b = 1 \Leftrightarrow 2^{n+m} = 2^0 \Leftrightarrow m = -n \Rightarrow m = -n \notin \mathbb{N}_0$

Wniosek: monoid przemienny (tj. półgrupa przemienna z jedynką)

Definicja 1.3.4. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \to A$, $* : A \times A \to A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \ \wedge \ c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedynką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemiennym* lub *komutatywnym*.

	Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna
$\circ\,/\,+$	dodawanie	$*\,/\,\cdot$	mnożenie
$a+b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e=0$	zero	$e=1$	jedynka
$a'=-a$	element przeciwny	$a'=a^{-1}$	element odwrotny

	$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}, \ n \in \mathbb{N}$	$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$
	$0 \cdot a = 0$	$a^0 = e = e = 1$
$m \in \mathbb{Z}, m < 0$	$ma = \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{m}$	$a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{n}$

Definicja 1.3.5. Zespół $(K, \circ, *)$ złożony ze zbioru K zawierającego co najmniej dwa elementy i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : K \times K \to K$, $* : K \times K \to K$ nazywamy *ciałem*, jeśli

- $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$),
- $(K \setminus \{e_\circ\}, *)$ jest grupą abelową,
- działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.

Zatem ciało to pierścień przemienny z jedynką (różną od zera, tj. $1 = e_* \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne.

Zatem w ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący:

$$\frac{a}{b} := a * b^{-1}, \quad a, b \in K, \ b \neq 0.$$

Przykład 1.3.6. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych
$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych

iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

iv) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
$+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem (tzw. ciało reszt modulo p). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Definicja 1.3.7. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A, a \neq 0, b \neq 0$ nazywamy *dzielnikami zera*, jeśli $a \cdot b = 0$.

Uwaga 1.3.8. W ciele nie ma dzielników zera.

Dowód. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem oraz niech $a, b \in K$. Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $a \neq 0$, to istnieje $a^{-1} \in K$. Otrzymujemy

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b_{=}(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Zatem $b = 0$. $\square$

Przykład 1.3.9. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1)+(x_2, y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2),\ (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) := (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

$(\mathbb{C}, +)$ jest grupą abelową.

Działanie + jest wewnętrzne, łączne, przemienne. Elementem neutralnym jest $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, zaś elementem przeciwnym do $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ jest $(-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ jest grupą abelową.

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne.

przemienność:

$$(x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1) = \ = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$$

łączność: $\quad L = P$

$$L = (a, b) \cdot [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) =$$

$$= (ax_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2 - bx_2y_1, ax_1y_2 + ax_2y_1 + bx_1x_2 - by_1y_2)$$

$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] \cdot (x_2, y_2) = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) \cdot (x_2, y_2) =$$

$$= (ax_1x_2 - by_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2, ax_1y_1 - by_1y_2 + ay_1x_2 + bx_1x_2)$$

el. neutralny: $\quad e = (1, 0)$

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1, 0) \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1 - 0 \cdot y_1, 1 \cdot y_1 + 0 \cdot x_1) = (x_1, y_1)$$

el. odwrotny do $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$:

$$(x_1, y_1) \cdot (a, b) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x_1, y_1) \neq (0, 0) \quad a = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2},\ b = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem +, bowiem $L = P$.

$$L = (a, b)\cdot[(x_1, y_1)+(x_2, y_2)] = (a, b)\cdot(x_1+x_2, y_1+y_2) = (ax_1+ax_2-by_1-by_2, ay_1+ay_2+bx_1+bx_2)$$

$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] + [(a, b) \cdot (x_2, y_2)] = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) + (ax_2 - by_2, ay_2 + bx_2)$$

Definicja 1.3.10. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 2
Data: ....

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

$\mathbb{N} \underset{n \mapsto n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \underset{n \mapsto \frac{n}{1}}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \overset{h}{\underset{x \mapsto (x,0)}{\hookrightarrow}} \mathbb{C}$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność:
$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$$

łączność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$$
$$[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot x_3, 0 = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia
el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$$
$$= (x_1 x + 3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

Niech $h : \mathbb{R} \to \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$.
Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujmy $i := (0, 1)$ tzw. *jednostka urojona.* Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y, \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Re}z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Im}z$. Liczby postaci iy, $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi.*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \big(\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_1 \wedge \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2\big)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$.

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) & (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) & (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{array}$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$

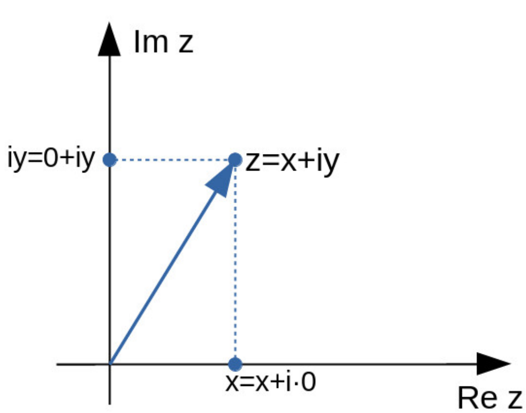
$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$

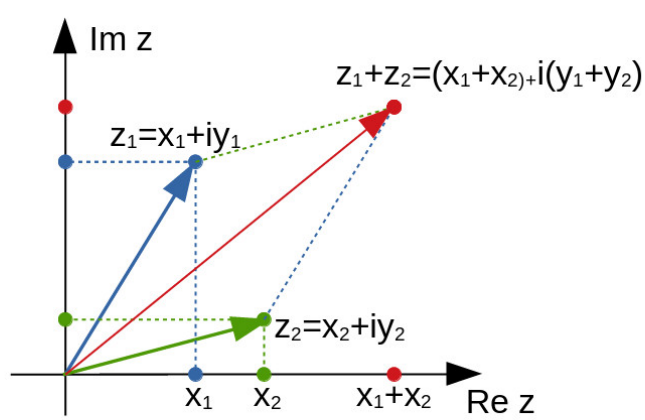
Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \qquad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$

Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0, 0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$

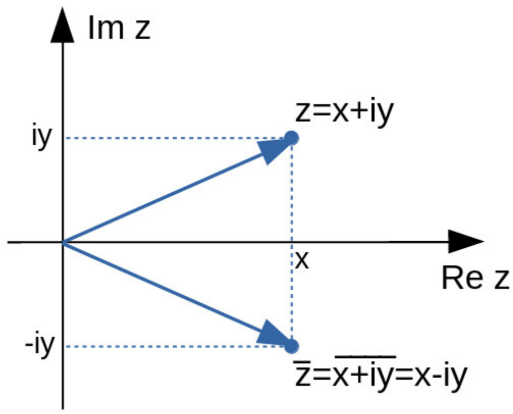


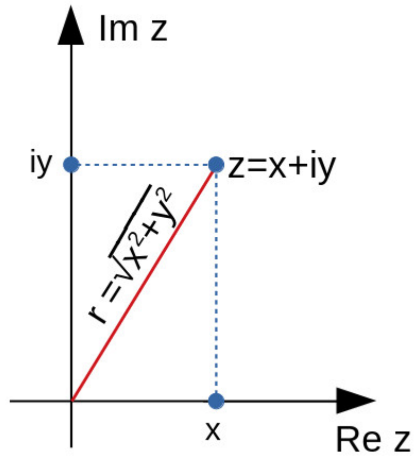


Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z. Oznaczamy ją $\bar{z}$.

i) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy modułem liczby z. Oznaczamy ją $|z|$.





Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych)**.** Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}z_1 + \text{Re}z_2$, $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}z_1 + \text{Im}z_2$

ii) $\text{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\text{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

iii) $\overline{(\bar{z})} = z$

iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$

vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

viii) $\text{Re}z \leq |\text{Re}z| \leq |z|$, $\text{Im}z \leq |\text{Im}z| \leq |z|$

ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta) $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$

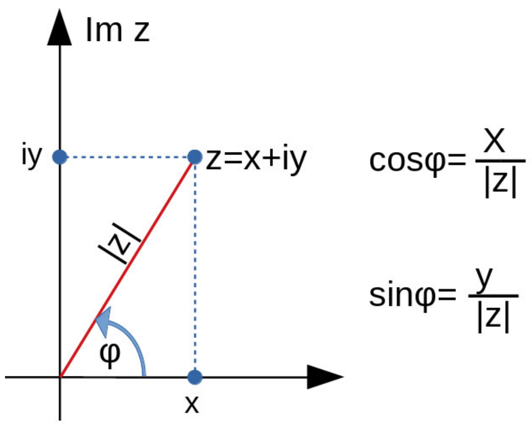
Dowód. vii) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$
viii) $\text{Re}z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
x) $1 = \text{Re}1 = \text{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2}\right) \overset{\text{i)}}{=} \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \overset{\text{def}}{\leq} \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| \overset{\text{iv)v)}}{=} \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \wedge |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow \Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$ $\square$

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z. Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy arg$z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać arg$z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Gdy $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$z = 7$
$z = 7(1 + 0i)$

$\varphi = 0 + 2k\pi$
arg$z = 0$

$z = 7(\cos 0 + i\sin 0)$

$z = -i$
$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$
$z = 1\,(0 + (-1)\cdot i)$
$$\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{cases}$$
$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
arg$z = \frac{3}{2}\pi$

$-i = 1(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$

$z = -\sqrt{27} - 3i$
$|z| = \sqrt{27 + 9} = 6$
$z = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$
$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$
arg$z = \frac{7}{6}\pi$

$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
$z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Wówczas:

i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$,

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \big(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\big)$,

iii) $z^n = |z|^n \cdot \big(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\big)$ tzw. *wzór de Moivre'a*

Dowód. i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$
$= |z_1| \cdot |z_2|\Big(\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\Big)$
ii) analogicznie
iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.
Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. □

Przykład 2.2.3. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}) \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\left(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right)$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(\cos(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{7}{12}\pi) + i\sin(-\tfrac{7}{12}\pi)\right)$$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10}\left(\cos(\tfrac{140}{12}\pi) + i\sin(\tfrac{140}{12}\pi)\right) = 2^{10}\left(\cos(\tfrac{35}{3}\pi) + i\sin(\tfrac{35}{3}\pi)\right) =$$
$$= 2^{10}\left(\cos(12\pi - \tfrac{\pi}{3}) + i\sin(12\pi - \tfrac{\pi}{3})\right) = 2^{10}\left(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$
$$= 2^9(1 - \sqrt{3}i)$$

Twierdzenie 2.2.4 (Własności argumentu)**.** Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0$ lub $k = -1)$

ii) $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0$ lub $k = -1)$

iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg\bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$

Dowód. iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z + 2k\pi = 2\arg z + 2k\pi$. Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę.
iv) $z \cdot \bar{z} = |z^2|$ oraz $0 = \arg(|z^2|) = \arg z + \arg\bar{z} + 2k\pi$, skąd $\arg\bar{z} = -2\pi - \arg z$ □

Przykład 2.2.5. $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\arg(-1) = \pi$ $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$
$i = (-1) \cdot (-i) \ \Rightarrow\ \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z.

Przykład 2.2.6. a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i = i$

b) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0\cdot i \ \Rightarrow\ e^{i\pi} + 1 = 0$

najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.7. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$, $\ e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,

ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $\ |e^{i\alpha}| = 1$.

Dowód. i), ii), iii) Analogiczny jak dla własności działań na liczbach w postaci trygonometrycznej.
iv) Mamy $|e^{i\alpha}| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$, zatem $e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = 0$, co nie jest możliwe, gdyż gdy $\cos\alpha = 0$, to $\sin\alpha = \pm 1$. $\square$

Wniosek 2.2.8. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

i) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\alpha+\beta)}$, $\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha-\beta)}$,

ii) $z^k = r^ke^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

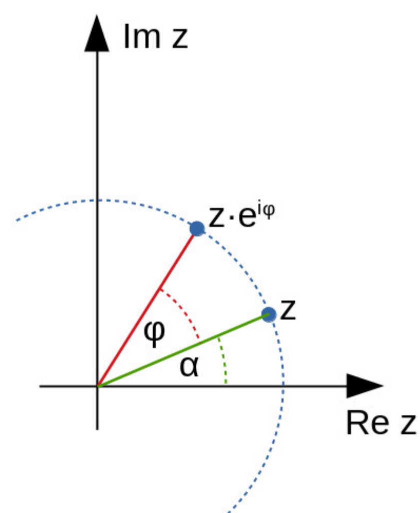
iii) $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Dowód. iii) Jeśli arg$z = \varphi$, to arg$\bar{z} = 2\pi - \varphi$, skąd $e^{(2\pi i-\varphi)i} = e^{2\pi}e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}$. $\square$

Wzory Eulera
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$
Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ
$z = re^{i\alpha}$
$z\cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$



2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniająca równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n-tego stopnia* z liczby w.

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

I sposób: postać wykładnicza	II sposób: postać algebraiczna	III sposób: postać algebraiczna
$z = \lvert z\rvert e^{i\varphi}$, $w = 8+6i$	$z = x + iy$, $w = 8+6i$	$8+6i = 9+6i-1 =$
$\lvert z\rvert^2 e^{2i\varphi} = w$	$z^2 = w$	$= 3^2 + 2\cdot 3\cdot i + i^2 =$
	$(x+iy)^2 = 8+6i$	$= (3+i)^2$
$\lvert w\rvert = 10$	$x^2 + 2xyi - y^2 = 8+6i$	
$w = 8+6i = 10(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5})$	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$	$z = 3+i \vee z = -3-i$
$\varphi = \arcsin\frac{3}{5} + 2k\pi$	$y \neq 0$ (gdy $y = 0$, to $z = x$, $x^2 \neq 8+6i$)	
	$x = \frac{3}{y}$, $\frac{9}{y^2} - y^2 = 8$	
$\lvert z\rvert = \sqrt{10}$	$y^4 + 8y^2 - 9 = 0$, $\Delta = 100$	
$\varphi_k = \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + k\pi$	$y^2 = 1$, $y = \pm 1$	
$z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k},\ k \in \{0,1\}$	$z = 3+i \vee z = -3-i$	

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wówczas

$$z^n = w \;\Leftrightarrow\; \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Otrzymujemy $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, gdzie $\alpha_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

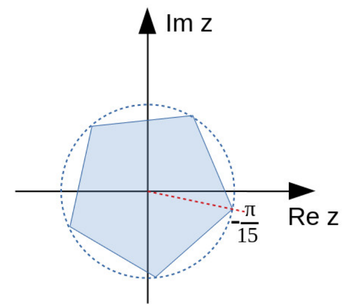
$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.
Niech $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.
Obliczamy $\lvert w\rvert = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Zatem

$$z^5 = w \;\Leftrightarrow\; \rho^5(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{3})) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}.$$

Stąd $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, gdzie $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

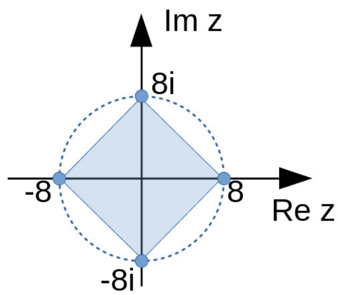


Liczby $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n-kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.

Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3. Będą one wierzchołkami kwadratu.

$z^4 = \left((\sqrt{3} - i)^3\right)^4$
Niech $z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$.
Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad x_3 = z_2 \cdot i = -8$



Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n.
$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W, jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout)**.** Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + const$. Stąd $W(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W*, jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z-1) - (z-1) = (z-1)(z^2-1) = (z-1)^2(z+1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2 \ldots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2 \ldots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 \ldots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \quad \square$$

Trójmian kwadratowy $\qquad az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.
Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2$, $\sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.
Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n(\bar{z}_0)^n + a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$. □

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$0 = (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] =$
$= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$
rozwiązania $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$, $\bar{z}_2 = z_3$

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$(z-2i)\Big(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i\Big) = 0$
$(z-2i)(z+1)\Big(z^2 + (1+3i)z + 3i\Big) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$
rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

Wzory Viète'a

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$\begin{aligned} c_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) &= -c_{n-1} \\ c_n\Big[(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_1 r_n) + (r_2 r_3 + r_2 r_4 + \ldots + r_2 r_n) + \ldots + r_{n-1} r_n\Big] &= c_{n-2} \\ \ldots \\ c_n r_1 r_2 \ldots r_n &= (-1)^n c_0 \end{aligned}$$

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$$W(z) = c_n\big[(-1)^n r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n + (-1)^{n-1} r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} r_2 r_3 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} \cdot z + \ldots + (-r_1 - r_2 \ldots - r_n) z^{n-1} + z^n\big]. \quad \square$$

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c.

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$.
Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.
Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.
Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \;\Rightarrow\; c = 12$.

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

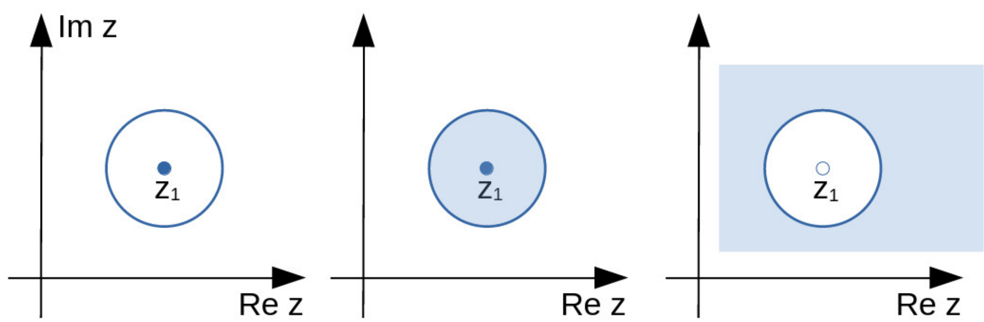
1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

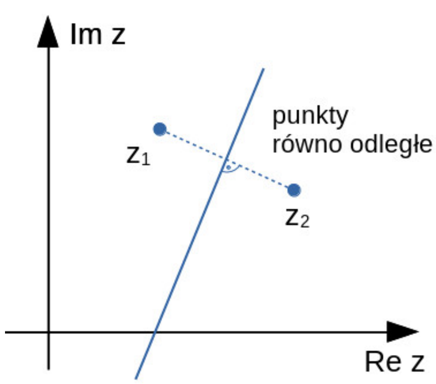
2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

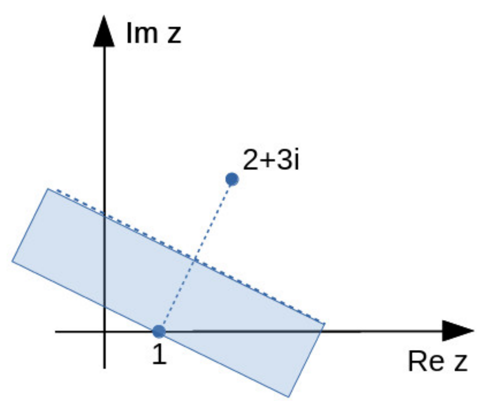
$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \;\Rightarrow\; r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$

$|z - z_1| = r$ okrąg $\qquad |z - z_1| \leq r$ koło $\qquad |z - z_1| \geq r$ zewnętrze koła



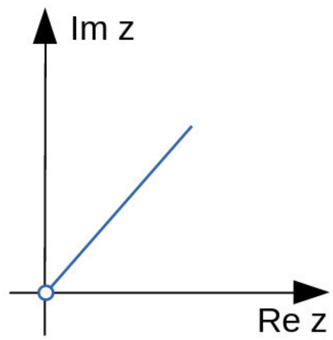
3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2

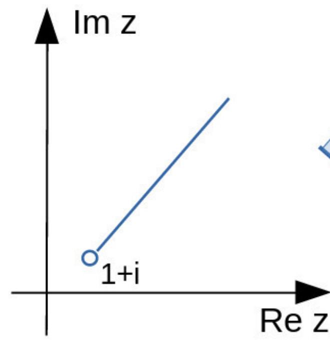


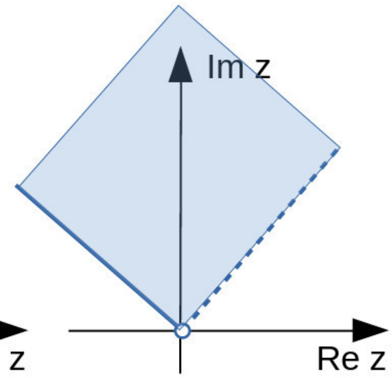


4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C}: \ \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

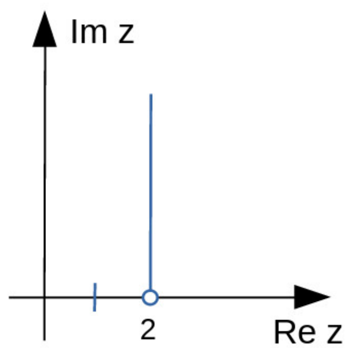
$\arg z = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\arg(z-1-i) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$

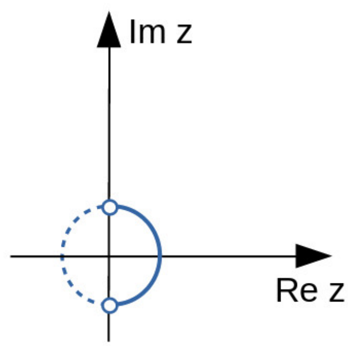






$\arg(z-2) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}$





5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C}: \ \arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i]\cdot[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2 - xyi + xi + xyi + xi + y^2 - 1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\mathrm{Re}w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}, \quad \mathrm{Im}w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \mathrm{Re}w = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2+y^2=1 \\ \mathrm{Im}w > 0 \ \Leftrightarrow \ x > 0 \end{cases}$$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 3
Data: ....

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n.*

Dla $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$B \in M_3(\mathbb{R})$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$ macierz zerowa wymiaru $m \times n$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n $\qquad T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.

- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
  $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$

- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{2}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array} \qquad 1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 4 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$AB \neq BA$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$CD \in M_2(\mathbb{R})$, $DC \in M_2(\mathbb{R})$, $CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$, ,$DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}$, $CD \neq CD$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $A + B = B + A$

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\mathrm{tr}(A)$.

Przykład 3.1.12. $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ ii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

iii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$ iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Dowód. i), ii), iii) Wynika z definicji.
iv) Niech $C = AB = [c_{ij}]$, $D = BA = [d_{ij}]$. Wówczas $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$ oraz $\mathrm{tr}C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$. Ponadto $d_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$ oraz $\mathrm{tr}D = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}$. Zatem $\mathrm{tr}C = \mathrm{tr}D$. $\square$

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\mathrm{tr}(A^TB) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^TA) = \mathrm{tr}(BA^T)$.

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.1.13 i) mamy $\mathrm{tr}(A^TB) = \mathrm{tr}((A^TB)^T) = \mathrm{tr}B^TA$ oraz $\mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}((AB^T)^T) = \mathrm{tr}(BA^T)$. Ponadto $\mathrm{tr}(A^TB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ki}b_{ki}$ oraz $\mathrm{tr}(AB^T) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ik}$, skąd wynika teza. $\square$

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy B_{ij}, dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 18$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix} \qquad -\Big[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2\Big] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $\quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$,

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$\det C = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$

$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$

$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k-tą kolumnę macierzy A, czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\det A = \det(A^T)$

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie <u>między sobą</u> dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K: \ A_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.

viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A, to wyznacznik nie zmieni się.

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array}\right],$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, a ? dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \ldots \cdot \det B_n$.

Wniosek 3.2.10. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne:	$w_i \leftrightarrow w_j$	zamiana wierszy miejscami
	$\lambda \cdot w_i,\ \lambda \in K, \lambda \neq 0$	pomnożenie wiersza przez liczbę
	$w_i + \lambda \cdot w_j,\ \lambda \in K$	dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.11.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{\overset{w_2 - 2w_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{-\frac{1}{3} \cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \tfrac{22}{3} = -22$$

3.3 Macierz odwrotna

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1}.

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$AA^{-1} = I \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ c = 0 \wedge \quad c = 1$ sprzeczność

Zatem nie istnieje A^{-1}.

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D.

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemienną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową.*

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. **Za pomocą definicji**

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a-b & 5a+2b \\ 3c-d & 5c+2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=1 \\ 5a+2b=0 \\ 3c-d=0 \\ 5c+2d=1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. **Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)**

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij}. Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+j} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, A^{-1} = -\tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. **Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)**

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

$$[A|I] \xrightarrow[\textbf{tylko na wierszach!}]{operacje \quad elementarne} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\longrightarrow$ macierz trójkątna górna $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \, na \, koniec]{-\frac{1}{2}w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 + w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^r$ również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
ii) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
iii) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$
iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$
v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
vi) $\left(A^r\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^r$

Twierdzenie 3.3.11. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci $A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$, to A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są macierze $B_1, B_2, \dots, B_k$. Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} \end{bmatrix}$.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 4
Data: ....

TEMAT: *Macierz odwrotna. Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K.

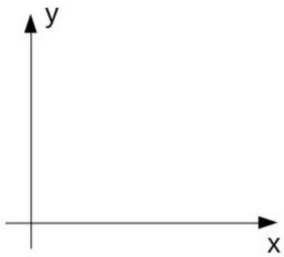
$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi* Jeśli $b_1 = \ldots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym.* Jesli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym.*

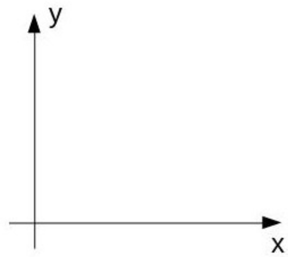
Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym.*

Przykład 4.1.1.

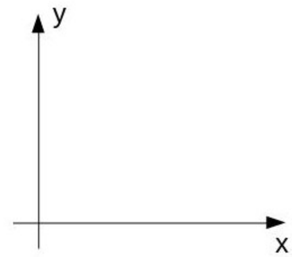
$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ 2x + y &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y &= 5 \\ 2x + 2y &= 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 10 \end{cases}$$



układ oznaczony



układ nieoznaczony



układ sprzeczny

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników   kolumna niewiadomych   kolumna wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Układy Cramera

Definicja 4.1.3. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera.*

Twierdzenie 4.1.4 (Cramera)**.** Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.1.5. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

Dowód. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} D^T B = \frac{1}{\det A}[D_{ji}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$

Stąd $x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} b_i D_{ij} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$ □

Przykład 4.1.6.
Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \;\Rightarrow$ układ jest układem Cramera

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$X = A^{-1}B$, $A^{-1} = ?$
$\det A = 16$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\quad x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{7}{16}$

Wzory Cramera:

$W = \det A = 16 \neq 0$, $W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22$, $W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$,
$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}$, $y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$

Wniosek 4.1.7. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.1.8.
Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.1.9. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Rząd macierzy

Definicja 4.1.10. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. *Minorem stopnia* k macierzy A, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.1.11. *Rzędem macierzy* $A \in M_{m\times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\mathrm{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$r(A) \leq \min\{m, n\}$

Przykład 4.1.12.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0,\ r(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ r(B) = 1, \quad \text{Można zauważyć, że } k_2 = 3k_1.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ ale } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(C) = 2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3,\ w_2 = 2w_1,\ w_3 = 3w_1,\ r(D) = 1$$

Twierdzenie 4.1.13 (Własności rzędu macierzy)**.** Niech $A \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. $\square$.

Definicja 4.1.14. Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.1.15.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

4 schodki 3 schodki to nie postać schodkowa

Twierdzenie 4.1.16. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątna górną nieosobliwą. $\square$

Przykład 4.1.17.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1 \\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4+w_2]{w_3+2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix}, \quad r(D) = 3$$

4.2 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m\times(n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

Twierdzenie 4.2.1 (Kroneckera-Capellego)**.** Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Dowód. Oznaczmy przez $A_1, \ldots, A_n$ kolejne kolumny macierzy A. Układ równoważny jest równaniu $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = B$. Układ posiada zatem rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy kolumna B jest kombinacja liniową kolumn $A_1, \ldots, A_n$. $\square$

Wniosek 4.2.2.

i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 4.2.3.

$$\begin{cases} x - y + 3z & = & 5 \\ 4x + y + 7z & = & 8 \\ 5x + 2y + 8z & = & 4 \end{cases}$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 7 & 8\\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right],\ r(A)\le 3,\ r(U)\le 3$$

$\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} \neq 0$, zatem $r(A)=2$

$$U \xrightarrow[w_3-5w_1]{w_2-4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 5 & -5 & -12\\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5}\\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$r(U)=3\neq r(A) \ \Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A)<r(U)$, układ jest sprzeczny.

2. Niech $r(A)=r(U)=r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m-r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M. Jeśli $r=n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r<n$, to $n-r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M, przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów. Mówiąc dokładnej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1,\ldots,x'_r$ zależy od pozostałych $n-r$ niewiadomych $x'_{r+1},\ldots,x'_n$.

Przykład 4.2.4.

$$\begin{cases} 2x-y+3z &= 7\\ 3x+2y-5z &= 4\\ 4x+5y-13z &= 1 \end{cases}$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 7\\ 3 & 2 & -5 & 4\\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right],\ r(A)\le 3,\ r(U)\le 3$$

$$U \xrightarrow[\textit{zmienne}\ \mathbf{y}\ \ \mathbf{x}\ \ \mathbf{z}]{k_1\leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7\\ 2 & 3 & -5 & 4\\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+5w_1]{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7\\ 0 & 7 & 1 & 18\\ 0 & 14 & 2 & 36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7\\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$\begin{vmatrix} -1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix} \neq 0$ minor niezerowy

$$\begin{cases} -y+2x &= 7-3z\\ 7x &= 18-z \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2\\ 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y\\ x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-3z\\ 18-z\end{bmatrix}$$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\begin{cases} x=\frac{18}{7}-\frac{1}{7}z\\ y=-\frac{13}{7}+\frac{20}{7}z\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$

Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.2.5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

Przykład 4.2.6.

$$\begin{cases} 2x+4y+9z-5t+6u &= 13\\ x+2y+4z-4t+2u &= 5\\ 3x+6y+7z-11t+2u &= 18\\ 4x+8y+19z-15t+11u &= 20\\ -\frac{1}{2}x-y+z+3t+2u &= -\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$U=\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13\\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18\\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20\\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2}\end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2\leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13\\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18\\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20\\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-4w_1\\ w_5-w_1}]{\substack{w_2-2w_1\\ w_3-3w_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -2 & -6 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\textit{zmienne}\ \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2\ za\ k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 16 & 6 & 0 & 18\\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9\end{array}\right] \xrightarrow[\textit{zmienne}\ \mathbf{x\ z\ u\ t\ y}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3\end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 11\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3\end{array}\right]$$

równoważny układ $\begin{cases} x+2y=11\\ z-\frac{7}{3}t=-3\\ u+\frac{8}{3}t=3\end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x=11-2y\\ z=-3+\frac{7}{3}t\\ u=3-\frac{8}{3}t\\ y,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

$r(A)=r(U)=3<n=5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5-3=2$ parametrów

Uwaga 4.2.7. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.2.8. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x-3y+z-2s+t=-5 \\ 2x-6y-4s+t=-10 \\ 2z+t=0 \end{cases}$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad r:=r(A)=r(U)=2,\ n=5,\ n-r=3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3}=10$ sposobów.
Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
k_1, k_5	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

Uwaga 4.2.9. W przypadku gdy układ równań $AX=B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U=[A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\textbf{na}\quad\textbf{wierszach}]{operacje\quad elementarne} [I|X]$$

Przykład 4.2.10.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2x-y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 5 \end{cases}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x=1,\ y=1,\ z=1$

Przykład 4.2.11. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4-w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\textit{zmienne } \mathbf{x_2\,x_3\,x_1\,x_4}]{k_1 \textit{ za } k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,
skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,
skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 5
Data: ....

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$

5.1 Wektory w przestrzeni

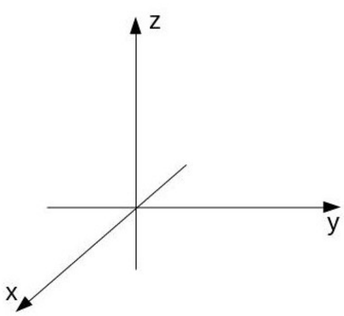
$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

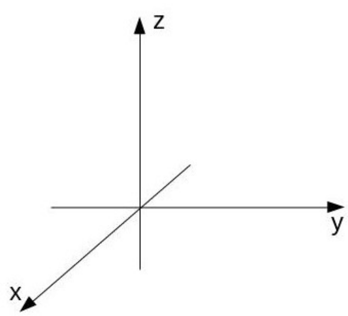
- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{\mathbf{0}} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach
Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$	suma wektorów
$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$	iloczyn wektora przez skalar
$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$	wektor przeciwny do $\vec{u}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$	różnica wektorów





Długość wektora
Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{\imath} = [1,0,0], \hat{\jmath} = [0,1,0], \hat{k} = [0,0,1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

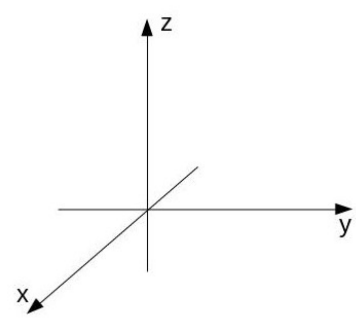
Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{\mathbf{0}}, \quad |\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|, \quad |\vec{u} + \vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right]$ oraz

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.



Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$, Przyjmujemy, że należy on do przedziału $[0, \pi]$.

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$.

Przykład 5.1.3. $[1,4,0] \circ [2,-1,1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.

Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$

ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$

iii) $(\lambda\vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$

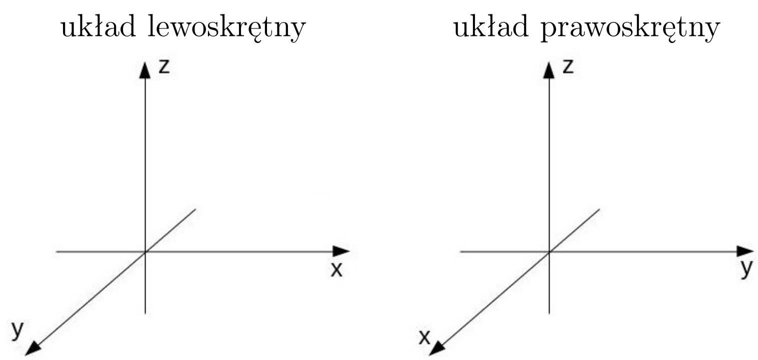
v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) $\vec{u} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} \perp \vec{v}$

Dowód. Wynika wprost z definicji. □

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ ma *orientację zgodną* z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawate są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.6. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

i) $\vec{w} \perp \vec{u}$, $\vec{w} \perp \vec{v}$,

ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$,

iii) orientacja trójki $\big(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\big)$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.

Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u}\times\vec{v}$.
Jeśli $\vec{u}=\vec{0}$ lub $\vec{v}=\vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$.

Przykład 5.1.7. $\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0$
$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k},\quad \hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath},\quad \hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath},\quad \hat{\jmath}\times\hat{\imath}=-\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath},\quad \hat{\imath}\times\hat{k}=-\hat{\jmath}$

Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u}=[u_x,u_y,u_z]$, $\vec{v}=[v_x,v_y,v_z]$, to wówczas

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\ u_x&u_y&u_z\\ v_x&v_y&v_z\end{vmatrix}.$$

Dowód. Niech $\vec{w}=\left[\begin{vmatrix}u_y&u_z\\v_y&v_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_x&u_z\\v_x&v_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}\right]$. Uzasadnimy, że $\vec{w}$ ma ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u}\times\vec{v}$.
Zauważmy, że $\vec{w}\perp\vec{u}$ oraz $\vec{w}\perp\vec{v}$. Istotnie $\vec{w}\circ\vec{u}=u_x\begin{vmatrix}u_y&u_z\\v_y&v_z\end{vmatrix}-u_y\begin{vmatrix}u_x&u_z\\v_x&v_z\end{vmatrix}+u_z\begin{vmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x&u_y&u_z\\u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\end{vmatrix}=0$ i podobnie $\vec{w}\circ\vec{v}=0$.
Ponadto $|\vec{w}|=|\vec{u}\times\vec{v}|$, bowiem $|\vec{w}|^2=(u_yv_z-v_yu_z)^2+(u_xv_z-v_xu_z)^2+(u_xv_y-v_xu_y)^2=$
$=(u_x^2+u_y^2+u_z^2)(v_x^2+v_y^2+v_z^2)-(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\circ\vec{v})^2=$
$=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\big(1-\cos^2\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\big)=\Big(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\Big)^2$.
Jeśli $\vec{u},\vec{v}$ są niewspółliniowe, to $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\neq 0$, skąd wynika, że $|\vec{w}|>0$.
$\begin{vmatrix}u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\\w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}=w_x\begin{vmatrix}u_y&u_z\\v_y&v_z\end{vmatrix}-w_y\begin{vmatrix}u_x&u_z\\v_x&v_z\end{vmatrix}+w_z\begin{vmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}=w_x^2+w_y^2+w_z^2=|\vec{w}|^2$.
Jak zaobserwowaliśmy $|\vec{w}|^2>0$, więc trójka $\big(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\big)$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych. □

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u}=[1,2,-3],\vec{v}=[3,4,5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\imath}&\hat{k}\\1&2&-3\\3&4&5\end{vmatrix}=\hat{\imath}\begin{vmatrix}2&-3\\4&5\end{vmatrix}-\hat{\jmath}\begin{vmatrix}1&-3\\3&5\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=[22,-14,-2]$$

lub metody Sarrusa

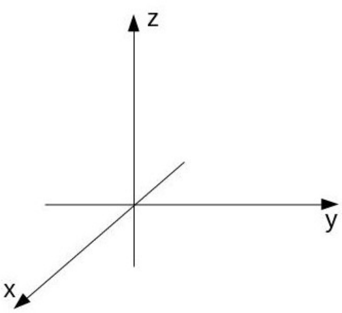
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\imath}&\hat{k}\\1&2&-3\\3&4&5\end{vmatrix}=10\hat{\imath}+4\hat{k}-9\hat{\jmath}-6\hat{k}+12\hat{\imath}-5\hat{\jmath}=22\hat{\imath}-14\hat{\jmath}-2\hat{k}.$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$
iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \left(\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{\mathbf{0}} \vee \vec{v} = \vec{\mathbf{0}}\right)$

Dowód. Własności i),ii),iii),iv) wynikają z odpowiednich własności wyznaczników.
v) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
vi) Jeśli $\vec{u} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$, to $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \sin\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \in \{0, \pi\}$. □

Reguła prawej dłoni:



Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. *Iloczynem mieszanym* uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$.

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$,$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Dowód. $$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$$
$$= [w_x, w_y, w_z] \circ \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right] = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$$ □

Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)|$.

Dowód. Niech $\alpha = \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot d = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. □

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1, 0, 2), B = (5, 1, 5), C = (3, -1, 2), D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ jest równa zero.

$\overrightarrow{AB} = [4, 1, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [2, -1, 0]$, $\overrightarrow{AD} = [0, 3, 3]$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego)**.** Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = -\left(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\right) = \left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right)$

ii) $\lambda\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}\right)$

iii) $\left(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\right) = \left(\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}\right) + \left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\right)$

iv) $|\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)| \le |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

Dowód. i), ii), iii) Teza wynika z odpowiednich własności wyznacznika.
iv) Niech α to kąt między wektorami $\vec{u} \times \vec{v}$ oraz $\vec{w}$. Wówczas
$|\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\cos\alpha| \le |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \le |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. $\square$

5.2 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny π.

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie normalne:	$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Równanie ogólne:	$\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Przykład 5.2.1. $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3]$, $P_0 \in \pi$, $\vec{n} \perp \pi$, $\pi = ?$

$\pi :\ 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 3) = 0$ równanie normalne

$\pi :\ x - y + 3z - 14 = 0$ równanie ogólne

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są *wektorami rozpinającymi* płaszczyznę π.

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

Równanie parametryczne: $\quad \pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}$

Przykład 5.2.2. Napisz równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy.

$$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi, \quad \hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi, \quad A \in \pi$$

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s & = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s & = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s & = 4 \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}$$

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci $\pi :\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad gdzie \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodząca przez punkty $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$. Jest to tzw. *równanie odcinkowe* płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty
$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem
$\pi = \{P = (x, y, z) :\ \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) :\ [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}$.

5.3 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{\mathbf{0}}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$

jest prostą przechodząca przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy *wektorem kierunkowym* prostej l.

$$P_0 \in l \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} \ : \ \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ nazywamy *równaniem parametrycznym* prostej l.

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t otrzymujemy równanie postaci $l : \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy *równaniem kierunkowym* prostej l.

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

$$P \in l \quad \Leftrightarrow \quad (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Przykład 5.3.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6, -1, 1] \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

Wówczas $\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1, 13, 19]$ oraz $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

5.4 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n_1} = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{\mathbf{0}}$,
$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.

$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}$.

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

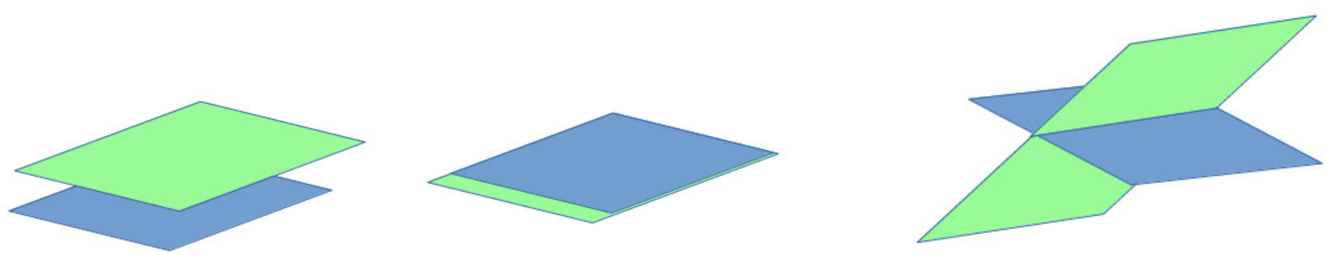
Płaszczyzny mogą być równoległe. $\quad \pi_1 \| \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \| n_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \vec{\mathbf{0}}$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2$, $r(A) = 1$.

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej.
W szczególności mogą być prostopadłe.

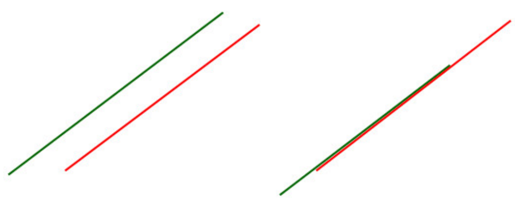
$$\pi_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \circ \vec{n_2} = 0$$



Wzajemne położenie prostych

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2.

Proste mogą być równoległe. $\quad l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{\mathbf{0}}$.
Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \varnothing$.

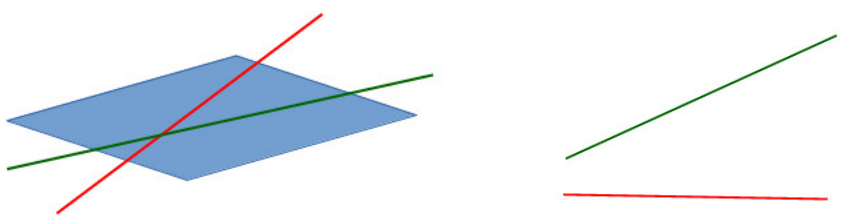


Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. *proste skośne*), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \varnothing$.

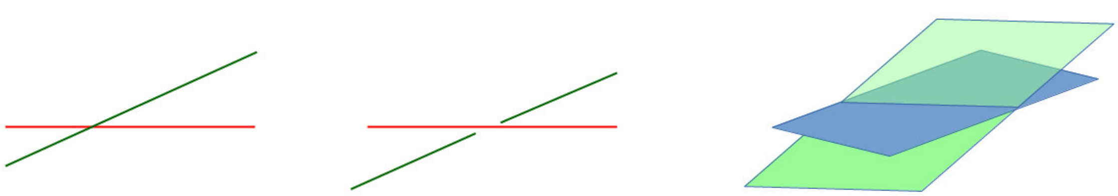
Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}\right) \neq 0$.



Kąty

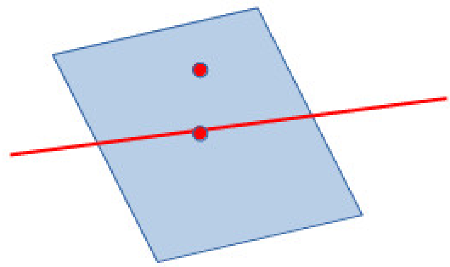
Definicja 5.4.1. i) *Kątem między dwiema prostymi* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) *Kątem między dwiema płaszczyznami* nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.



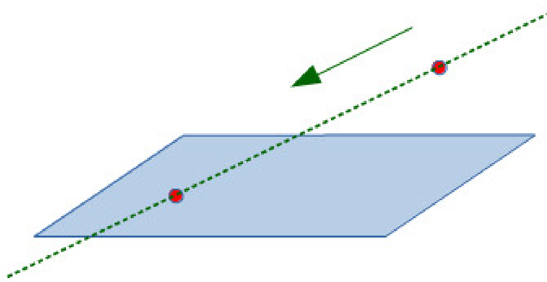
Definicja 5.4.2. i) *Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π* nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

ii) *Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l* nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.

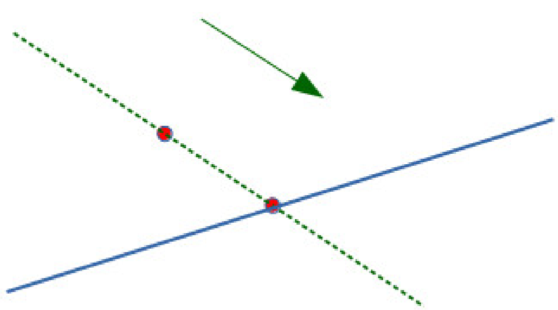


Można zdefiniować *rzut ukośny* w kierunku zadanego wektora.

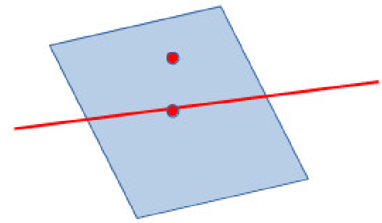
Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:



Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l:

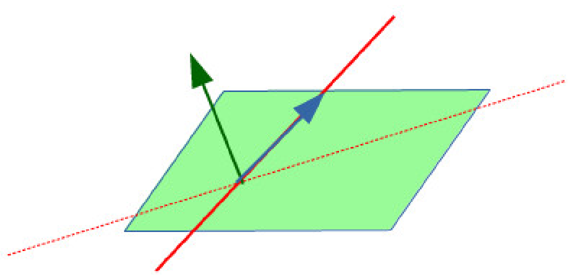


Przykład 5.4.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę
$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$



Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.
$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi$, $\quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi$, $\quad A = (2, 1, 3) \in \pi$
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$
$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad \pi : \ -3(x-2) - (y-1) + 6(z-3) = 0$$
$\pi : \ 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$
$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$

Definicja 5.4.4. *Kątem między płaszczyzną a prostą* nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



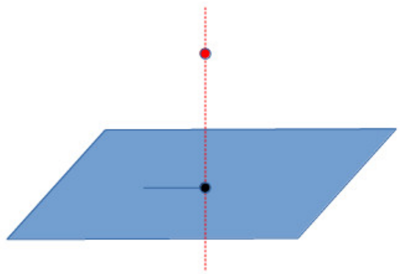
Przykład 5.4.5. Wyznacz kąt między prostą $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$
a płaszczyzną $\pi : \ 3x + y + z + 1 = 0$.

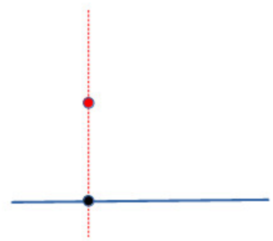
Mamy $\vec{a} = [-1, 0, 2] \parallel l$, $\quad \vec{n} = [3, 1, 1] \perp \pi$. $\quad$ Oznaczmy $\beta = \measuredangle(\vec{n}, \vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.
Obliczamy $\cos\beta = \frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$, $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{55}}$,
albo $\sin\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{55}}$

Odległości

Definicja 5.4.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π. Oznaczamy ją $d(P,\pi)$.

ii) *Odległością punktu P od prostej l*, nazywamy długość odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l. Oznaczamy ją $d(P,l)$.





Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}.$$

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas $k: \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

$\{P_0'\} = k \cap \pi = ?$

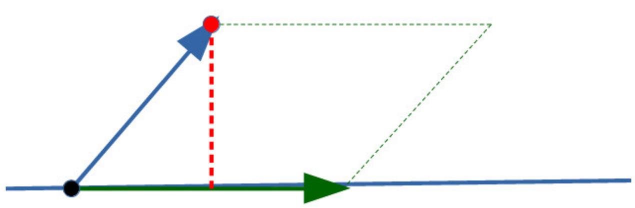
$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$

$d(P,\pi) = |P_0P_0'| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Wzór na odległość punktu od prostej

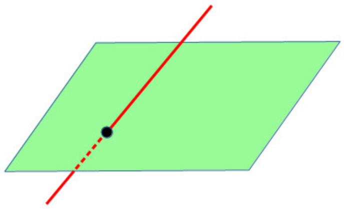
Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodząca przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

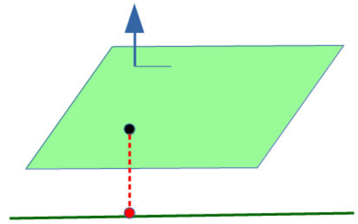
$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$



Odległość prostej od płaszczyzny

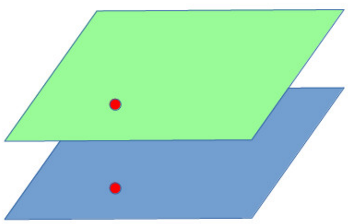
Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π, to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punkty prostej od płaszczyzny.





Definicja 5.4.7. *Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych* nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

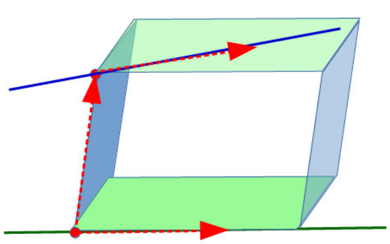
Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : \ Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : \ Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n_2} = [A, B, C] \neq \vec{\mathbf{0}}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.



Definicja 5.4.8. *Odległością dwóch prostych skośnych* nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l, przechodzącej przez punkt P_1, zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k, przechodzącej przez punkt P_2. Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas

$$d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$



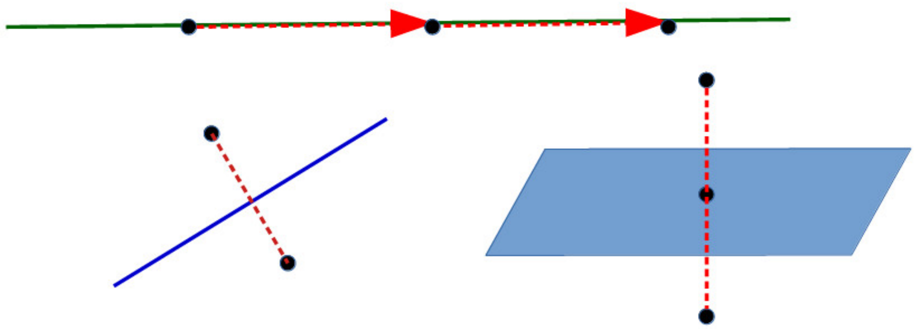
Symetrie

Definicja 5.4.9. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

i) Punkt P_s jest *punktem symetrycznym* do punktu P względem punktu S, jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.

ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l, jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π, jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.



Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 6
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, zaś $V \neq \varnothing$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K-liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami*.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$
Dla $u = [u_1, \ldots, u_n], v = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n]$.

ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało
Dla $u = [u_1, \ldots, u_n], v = [v_1, \ldots, v_n] \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha \cdot u_1, \ldots, \alpha \cdot u_n]$.

iii) $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Dla $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}\ f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}\ f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$
Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stale równa zero.

iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (C, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V, zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K. Wówczas:

i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$

iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$

v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$

vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

Dowód. Niech $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$ będą dowolne.
i) Ponieważ $\mathbf{0} + 0 \cdot v = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = (0 \cdot v) + (0 \cdot v)$, zatem $\mathbf{0} = 0 \cdot v$.
Ponadto $\mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = (\alpha \cdot \mathbf{0}) + (\alpha \cdot \mathbf{0})$, zatem $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}$.
ii) Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Załóżmy, że $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ oraz $\alpha \neq 0$. Ponieważ $\alpha \neq 0$, zatem istnieje $\alpha^{-1} \neq 0$. Mamy $v = 1 \cdot v = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot v = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Zatem $v = \mathbf{0}$.
iii) Na mocy i) mamy $(-\alpha) \cdot v + \alpha \cdot v = (-\alpha + \alpha) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0}$. Stąd $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v)$.
iv) Na mocy iii) mamy $-1 \cdot v = 1 \cdot (-v) = -(1 \cdot v) = -v$.
v) Na mocy iii) mamy $(\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha + (-\beta)) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$.
vi) Na mocy iii) mamy $\alpha \cdot (u - v) = \alpha \cdot (u + (-v)) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$. $\square$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V.

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami
$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U$, $\odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K, to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V.

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\varnothing \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \ \wedge \ \alpha \odot u_1 \in U$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w druga stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V. $\square$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V. Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \ \wedge \ \alpha \odot u_1 \in U$. W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. $\square$

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V. Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Przykład 6.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

U jest podprzestrzenią liniową V, bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcja ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \ - \ parzysty\}$

U **nie** jest podprzestrzenią liniową V. Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f+g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f + g \notin U$.

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V. Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas
$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$
oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$

iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \ \deg p \leq n\}$.
Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V.

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0, 0)$.
Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0, 0)$.

6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$, $v_1, \ldots, v_m \in V$. Niech $W \neq \varnothing$ będzie podzbiorem zbioru V.

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \ldots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

iv) Zbiór $\big\{v = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k \,:\, \alpha_1, \ldots \alpha_k \in K;\, w_1, \ldots, w_k \in W;\, k \in \mathbb{N}\big\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W, nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\mathrm{lin}_K W$ lub krótko $\mathrm{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ piszemy też $\mathrm{lin}\{w_1, \ldots, w_m\}$.
Czyli $\mathrm{lin}\{w_1, \ldots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \ldots \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\varnothing \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\mathrm{lin}W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W.

Dowód. Suma kombinacji liniowych elementów W jest kombinacją liniową elementów W. Podobnie iloczyn kombinacji liniowej elementów W przez skalar jest kombinacją liniową elementów W. $\square$

Wniosek 6.2.3. Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$, dla pewnych $v_1, \ldots, v_m \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$

Dowód. Inkluzja $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \supseteq \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$ wynika z faktu, że u jest kombinacją liniową $v_1, \ldots, v_m$. Jeśli $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} u - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} v_m$, zatem $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$. $\square$

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\mathrm{lin}W$, zaś podprzestrzeń $\mathrm{lin}W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W.

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{\imath} = (1, 0)$ oraz $\hat{\jmath} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

Definicja 6.2.6. Wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$ nazywamy *liniowo niezależnymi* lub mówimy, że tworzą *układ liniowo niezależny*, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ zachodzi

$$\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_m = 0.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy *liniowo zależnymi.*

Twierdzenie 6.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy, że wektory $v_1, \ldots, v_m$ są liniowo zależne, czyli istnieją $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$ nie wszystkie równe zeru, takie że $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$.
Załóżmy teraz, że v_1 jest kombinacja liniową $v_2, \ldots, v_m$, czyli istnieją $\beta_2, \ldots \beta_m \in K$ takie, że $v_1 = \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m$. Wówczas $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m = 0$, gdzie $\beta_1 = -1 \neq 0$. □

Twierdzenie 6.2.8. Wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A, której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \ldots, v_k$, jest równy n.

Dowód. Wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, gdy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ układ $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$, w którym niewiadomymi są $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$, ma jedyne rozwiązanie. □

Wniosek 6.2.9. Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

Przykład 6.2.10. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 10) + \gamma(5, 2, 2) = (\alpha + 2\beta + 5\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + 2\gamma)$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
Wektory generują $\mathbb{R}^3$, jeśli powyższy układ jest oznaczony.
$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 2 & 7 & z+x \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_2]{w_3+2w_2} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 1 & 3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+2y+z \end{array}\right]$$
Układ oznaczony, posiada rozwiązanie $\gamma = -x + 2y + z$, $\beta = x - y - 3\gamma = 4x - 7y - 3z$, $\alpha = x - 2\beta - 5\gamma = -2x + 4y + z$. Zatem układ wektorów u, v, w generuje $\mathbb{R}^3$.

Przykład 6.2.11. Czy układ $\{A, B, C\}$ jest układem liniowo niezależnym?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Sprawdzamy, czy dowolna kombinacja zerowa jest trywialna.
Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Stąd $\begin{bmatrix} \alpha - \beta & -\alpha \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$

Zatem macierze A, B, C tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 6.2.12. Czy wektory $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 2, 0, -1)$, $w = (0, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$.
Stąd $(\alpha + \beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + 3\gamma, 4\alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0)$.
Wektory u, v, w będą liniowo niezależne, gdy powyższy układ jednorodny ma jedyne rozwiązanie $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3 - 3w_1 \\ w_4 - 4w_1}]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}w_4]{-\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow\ r(U) = r(A) = n = 3$
Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ jest oznaczony. Zatem wektory u, v, w są liniowo niezależne.

Obserwacja: Badanie liniowej niezależności wektorów w $\mathbb{R}^n$ polega na wyliczaniu rzędu macierzy, której kolumnami są podane wektory. Wektory są liniowo niezależne, gdy rząd macierzy równy jest liczbie wektorów.

Wniosek 6.2.13. Niech $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $k > n$, to wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne. Równoważnie, jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq n$.

Twierdzenie 6.2.14. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.

ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.

iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.

iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

Definicja 6.2.15. Niech $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci

$$W_{f_1,\dots,f_n}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & & \dots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą Wrońskiego* układu funkcji $f_1, \dots, f_n$, a jej wyznacznik *wrońskianem.*

Twierdzenie 6.2.16. Niech $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Jeśli wrońskian układu funkcji $f_1, \dots, f_n$ nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{R}$, tzn. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W_{f_1,\dots,f_n}(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $f_1, \dots, f_n$ są liniowo zależne. Wówczas istnieją $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x) = 0$. Różniczkując równanie stronami $n-1$ razy otrzymujemy układ równań $\begin{bmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ & \dots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Ponieważ $f_1, \dots, f_n$ są liniowo zależne, zatem wyznacznik główny układu jest równy zero. $\square$

Przykład 6.2.17. Zbadaj, czy funkcje $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ tworzą układ liniowo niezależny w $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

Tak, tworzą układ liniowo niezależny.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $b_1, \dots, b_n \in V$.

Definicja 6.2.18. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ nazywamy *bazą* przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \operatorname{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Uwaga 6.2.19. Baza przestrzeni wektorowej jest maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni.

Przykład 6.2.20. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Układ wektorów $\{e_1, \dots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Wniosek 6.2.21. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to wówczas $k = n$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy wniosków 6.2.9 oraz 6.2.13. $\square$

Przykład 6.2.22. Wskaż bazę podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli $U = \text{lin}\{(1,3,2,1),(1,2,1,1),(1,1,0,1),(1,2,2,1),(3,4,1,3)\}$.

Podane generatory na pewno nie tworzą bazy U, gdyż układ 5 wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest liniowo zależny.

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \le 4 \neq 5$$

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$3 \Rightarrow U = \text{lin}\{(1,3,2,1),(0,-1,-1,0),(0,-1,0,0)\}$

Układ wektorów $(1,3,2,1),(0,-1,-1,0),(0,-1,0,0)$ jest bazą przestrzeni U (porównaj wniosek 6.2.3).

Twierdzenie 6.2.23. i) Każda przestrzeń wektorowa różna od $\{\mathbf{0}\}$ posiada bazę.

ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej są równoliczne. Jeśli baza danej przestrzeni liniowej jest nieskończona, to każda inna jej baza także jest nieskończona.

iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Definicja 6.2.24. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy *wymiarem przestrzeni wektorowej* V i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest *n-wymiarowa.* Jeśli żaden skończony układ wektorów nie tworzy bazy przestrzeni V, to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Wniosek 6.2.25. i) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

ii) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.

iii) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

Przykład 6.2.10 - raz jeszcze
Wiemy, że wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wniosek 6.2.26. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}), v_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}), \ldots, v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det[v_{ij}] \neq 0$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 6.2.8 oraz 6.2.25 iii). □

Wniosek 6.2.27. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 6.2.28. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \ldots, b_n)$ nazywamy *reperem bazowym* lub *bazą uporządkowaną*.

Często mówimy po prostu o *bazie*, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(e_1, \ldots, e_n\Big), \text{ gdzie } e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(1, x, x^2, x^3, \ldots\Big), \quad \dim \mathbb{R}[x] = \infty, \quad p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_s \cdot x^s$$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot), \quad \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(1, x, x^2, \ldots, x^n\Big), \quad \dim \mathbb{R}[x] = n + 1$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_n[x]$ mamy $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$.

4) $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{mn}\Big), \text{ gdzie } E_{kl} = [e_{ij}^{kl}], \text{ zaś } e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (k,l) \\ 0 & (i,j) \neq (kl) \end{cases}$$

$\dim M_{m\times n}(K) = m \cdot n$

Przykład 6.2.29. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

Twierdzenie 6.2.30. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ jej bazą uporządkowaną. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 6.2.31. Skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \ldots \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

Przykład 6.2.32. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b_1', b_2', b_3')$ inna baza, gdzie $b_1' = (4, 2, 1), b_2' = (-5, 2, 3), b_3' = (1, 3, 0)$

Skalary $4, 2, 1$ to współrzędne b_1' w bazie kanonicznej.
UMOWA: Piszemy $b_1' = (4, 2, 1)$ zamiast $b_1' = [4, 2, 1]_{\mathcal{B}_k^3}$.
Ponadto $b_1' = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$.

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczymy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.
Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b_1' + \beta b_2' + \gamma b_3'$. Otrzymujemy
$(-3, 15, 7) = \alpha(4, 2, 1) + \beta(-5, 2, 3) + \gamma(1, 3, 0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$.
Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ, należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_2]{-1 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow v = [1, 2, 3]_{\mathcal{B}'}$$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\begin{array}{l} b'_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \ldots + \alpha_{n1}b_n \\ b'_2 = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{n2}b_n \\ \ldots \\ b'_n = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \ldots + \alpha_{nn}b_n \end{array}.$$

Definicja 6.2.33. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 6.2.34. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x'_1, \ldots, x'_n]_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$.

Przykład 6.2.32 - ciąg dalszy
$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1), b'_2 = (-5, 2, 3), b'_3 = (1, 3, 0)$

Wyznaczymy współrzędne wektora $v = (-3, 15, 7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.
$P = P_{\mathcal{B}_k^3\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $X' = P^{-1}X =?$.
Wyznaczamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy
$X' = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Przykład 6.2.35. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, 1+x^2)$, $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$. Wyznaczmy macierz $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

$1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1+x) + \beta_1(x+x^2) + \gamma_1(1+x^2) = (\alpha_1+\gamma_1) + (\alpha_1+\beta_1)x + (\beta_1+\gamma_1)x^2$

Stąd $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases}$ i ostatecznie $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$.

Łatwo zauważyć, że $1 + x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}}$.

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1 + x + x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$

i otrzymujemy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 6.2.36. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

i) $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$,

ii) $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 7
Data: ....

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

7.1 Definicja i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K.

Definicja 7.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \to W$ spełniające warunki

i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$

ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.

Twierdzenie 7.1.2. Niech $\varphi : V \to W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) φ jest liniowe

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$
$\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Dowód. i)$\Rightarrow$ ii) Jeśli φ jest liniowe, to wówczas $\varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \varphi(\alpha \cdot u) \oplus \varphi(\beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$ dla dowolnych $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$.
ii) $\Rightarrow$ i) Przyjmując $\alpha = \beta = 1$ otrzymujemy własność addytywności, zaś przyjmując $\alpha = 0, \beta \neq 0$ otrzymujemy własność jednorodności.
ii)$\Leftrightarrow$ iii) Wystarczy przeprowadzić dowód indukcyjny. $\square$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $Hom_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $Hom(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

Uwaga 7.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W, mimo że są to różne działania.

Przykład 7.1.4. Czy φ jest liniowe?

1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in R$ mamy
$\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
$\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie <u>nie</u> jest liniowe, bowiem
$\varphi(1 + 1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a + b) + (a + b) = 2a + 2b$.

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y)$ oraz
$\varphi\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) =$
$(x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$.
Odwzorowanie jest liniowe.

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie <u>nie</u> jest liniowe.
$L = \varphi\big(\alpha(x, y, z)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$
$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - z + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$
Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład
$\varphi\big(5 \cdot (1, 0, 0)\big) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$

Uwaga 7.1.5.

i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 7.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem
$\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?

Sprawdzimy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.
Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy
$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x)+4(p+q)'(x) = (3-x)\Big(p''(x)+q''(x)\Big)+4\Big(p'(x)+q'(x)\Big) =$
$\Big((3 - x)p''(x) + 4p'(x)\Big) + \Big((3 - x)q''(x) + 4q'(x)\Big) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$,
dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.
Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha \cdot p''(x) + 4\alpha \cdot p'(x) = \alpha \cdot \Big((3-x)p''(x) + 4p'(x)\Big) = \alpha \cdot \varphi(p)(x)$. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p)$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 7.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

ii) $\forall v \in V\ \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Dowód. i) Ponieważ $\mathbf{0}_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}_V) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0}_V)$, zatem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. □

Wniosek 7.1.8. Niech $\varphi : V \to W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to φ nie jest liniowe.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. □

Przykład 7.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

Definicja 7.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,

ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,

iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją,

iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,

v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,

vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.

Twierdzenie 7.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K. Niech $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \ldots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dowód. Dla dowolnego $v \in V$ istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Ponieważ φ jest liniowe, zatem $\varphi(v) = \varphi(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n) = \alpha_1\varphi(b_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(b_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$. Zatem φ jest określone na całej przestrzeni V w sposób jednoznaczny. □

Uwaga 7.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V.

Przykład 7.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ, jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 7.2.1.

i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Ker}\varphi$.

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V \, \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$.

Uwaga 7.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ zbiory $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\varphi$. $\square$

Twierdzenie 7.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\mathrm{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś zbiór $\mathrm{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i) φ jest injekcją $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi = W$.

Definicja 7.2.5. Jeśli $\dim \mathrm{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\mathrm{rank}(\varphi)$.

Twierdzenie 7.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$r(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim V.$$

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Wniosek 7.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim V$.

Przykład 7.2.8.

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z,t) = (x+y+z+2t, x-y+z+6t, x+y-z-4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz φ, ich bazy i wymiary. Podaj własności φ.

$$\varphi(x,y,z,t) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+2t = 0 \\ x-y+z+6t = 0 \\ x+y-z-4t = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ x = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\varphi = \{(-t, 2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(-1,2,-3,1)\}$
Układ $\{(-1,2,-3,1)\}$ jest bazą $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.
Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto
$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem φ jest epimorfizmem.
Stąd $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.
$\varphi(x,y,z,t) = x(1,1,1) + y(1,-1,1) + z(1,1,-1) + t(2,6,-4)$
$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(2,6,-4)\}$

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1,1,1),(0,-2,0),(0,0,-2)\}$$

Układ $\{(1,1,1),(0,-2,0),(0,0,-2)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$.
$\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U,V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V,W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W)$$

określonymi wzorami $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Twierdzenie 7.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U,V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V,W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U,W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V,W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W,U)$.

Oznaczmy przez $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V,V) : \ f-bijekcja\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V.

Wniosek 7.3.3. Zbiór $Aut_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

Grupa $Aut_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej* V.

Przykład 7.3.4. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ oraz $\mathcal{B}_W = \big(c_1, \ldots, c_m\big)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$.

Definicja 7.4.1. *Macierzą* (lub *reprezentacją macierzową*) *odwzorowania liniowego* φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 7.4.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

$$\varphi(1,0,0) = (3,0),\ \varphi(0,1,0) = (0,2),\ \varphi(0,0,1) = (0,1), \qquad M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y+z \end{bmatrix}$$

b) bazy $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,0), b_2 = (1,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,2), c_2 = (0,1)\big)$

$$\varphi(b_1) = \varphi(1,2,0) = (3,4) = [\alpha_1, \beta_1]_\mathcal{C}, \qquad (3,4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2,\ \varphi(b_1) = [3, -2]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_2) = \varphi(1,1,1) = (3,3) = [\alpha_2, \beta_2]_\mathcal{C}, \qquad (3,3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$$
$$\Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3,\ \varphi(b_2) = [3, -3]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_3) = \varphi(0,0,1) = (0,1) = [\alpha_3, \beta_3]_\mathcal{C}, \qquad (3,4) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$$
$$\Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1,\ \varphi(b_3) = [0, 1]_\mathcal{C}$$
$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Przykład 7.4.4. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \to M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.
Rozważamy bazę $\mathcal{B} = \big(1, z\big)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = \big(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\big)$ przestrzeni $M_2(\mathbb{C})$.
$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_\mathcal{C}$
$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2+i, 1, 3, 4-i]_\mathcal{C}$
$\dim_\mathbb{C} \mathbb{C}_1[z] = 2$, $\dim_\mathbb{C} M_2(\mathbb{C}) = 4$, $\Rightarrow$ $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4\times 2}(\mathbb{C})$, $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$

Twierdzenie 7.4.5. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ oraz $\mathcal{B}_W = \big(c_1, \ldots, c_m\big)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \ldots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y.$$

Uwaga 7.4.6. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.7. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\mathrm{rank}(\varphi) = \mathrm{rank} A$.

Wniosek 7.4.8. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.5. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$,

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$.

Dowód. i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi = W$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim W = m$.
ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\varphi = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 0$. Na mocy twierdzenia o rzędzie $\dim \mathrm{Ker}\varphi = n - \dim \mathrm{Im}\varphi$, zatem $\mathrm{Ker}\varphi = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$. $\square$

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy
Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k)$ oraz za pomocą $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Czy φ jest monomorfizmem /epimorfizmem?

Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$
Sprawdzenie $\varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$
$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 0) + 3(0, 0, 1) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3 = [1, 0, 3]_\mathcal{B}$
$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
Stąd $\varphi(1, 2, 3) = [3, 1]_\mathcal{C} = 3c_1 + c_2 = 3(1, 2) + (0, 1) = (3, 7)$.
Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.
Ponadto $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.9. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 7.4.10. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

i) f jest izomorfizmem

ii) $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\mathrm{Im} f = W$

iv) $r(A) = \dim V$

v) $\det A \neq 0$

Wniosek 7.4.11. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Dowód. Jeśli f jest izomorfizmem, to $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$, skąd $\dim V = \dim W$. Na mocy twierdzenia 7.4.10 mamy $\det A \neq 0$. Zatem istnieje A^{-1}, skąd $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$. □

Twierdzenie 7.4.12. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

Przykład 7.4.13. Dane są odwzorowania liniowe
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z)$,
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - 3z, x + y)$,
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y, x - y)$.
Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania
$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)$ i oblicz $\varphi(1, 2, 3)$.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),\ M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),\ M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy h jest odwracalne?

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}),\ M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h$ jest odwracalne

$$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = \big(M_h\big)^{-1} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),$$

$$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}^2 M_{f+g} = \tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$\varphi(x, y, z) = ?$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = (\tfrac{2}{3}x - \tfrac{10}{9}y - \tfrac{10}{9}z, \tfrac{2}{3}x + \tfrac{32}{9}y - \tfrac{14}{9}z)$$

$\varphi(1, 2, 3) = ?$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1, 2, 3) = (-\tfrac{44}{9}, \tfrac{112}{9})$$

7.5 Zmiana baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W. Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \to \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \to \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dowód. Ponieważ $X = PX'$, $Y = QY'$, $AX = Y$, $A'X' = Y'$, zatem $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. $\square$

Przykład 7.4.2 raz jeszcze
Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczymy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ w bazach $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1)\big)$.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = P_{\mathcal{B}_k^2 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga 7.5.2. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\mathrm{id} : V \to V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases} \mathrm{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \ldots + a_{n1}b_1 \\ \ldots \\ \mathrm{id}(b'_n) = b'_1 = a_{n1}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M_{\mathrm{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 8
Data: ....

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru n. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi.*

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

Dowód. i), ii) Wynikają z twierdzeń 7.3.1 oraz 7.3.2. iii) Wynika z odpowiednich związków dla macierzy odwzorowań $f, g, f \circ g, \alpha f, \alpha g$. $\square$

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko φ*-niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \; \varphi(u) \in U.$$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : \, t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.
Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ-niezmiennicza.

2) Niech V, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \mathrm{Ker}\varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem U jest φ-niezmiennicza.

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$.
Gdy U jest φ-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$, czyli $\varphi|_U \in End(U)$.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in End(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

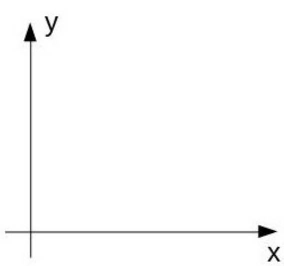
iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

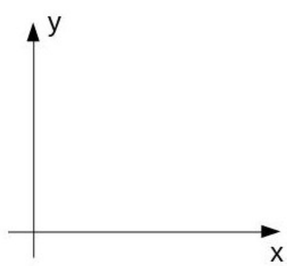
Przykład 8.1.5. Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

Uwaga 8.1.6. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Przykład 8.1.7. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ.
Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$





Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ.
Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ, uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Twierdzenie 8.1.8. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ-niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Dowód. i) Dla dowolnych $v, w \in E_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w)$, czyli $\alpha v + \beta w \in E_\lambda$.
ii) Na mocy i) jeśli $v \in E_\lambda$, to $\varphi(v) = \lambda v \in E_\lambda$.
iii) $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(v) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = \mathbf{0}_V$
□

Definicja 8.1.9. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ, odpowiadającą wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.10. Na mocy uwagi 8.1.6 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i}, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.11. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Dowód. i) $\Leftrightarrow$ ii) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$, czyli $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \lambda v = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v)$. Stąd $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. I odwrotnie, jeśli $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = \mathbf{0}_V$, czyli $\varphi(v) = \lambda v$.
ii) $\Leftrightarrow$ iii) Niech $v \in V$ oraz niech X oznacza kolumnę współrzędnych wektora v w ustalonej bazie przestrzeni V. Niech A będzie macierzą φ w tejże bazie. Wówczas $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = \mathbf{0}$. Układ jednorodny $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Wniosek 8.1.12. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\mathcal{B}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.1.13. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

Dowód. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ będą dwiema różnymi bazami przestrzeni V. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Na mocy twierdzenia 7.5.1 mamy $A' = P^{-1}AP$. Ponadto $\det(A' - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) = \det\big(P^{-1}(A - \lambda I)P\big) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$, bowiem $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}$. $\square$

Definicja 8.1.14. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ.

Uwaga 8.1.15.

i) Rzeczywiste pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ to dokładnie wartości własne endomorfizmu φ.

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.13 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definicja 8.1.16.

i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A.

ii) Każdy rzeczywisty pierwiastek wielomianu χ_A nazywamy *wartością własną* macierzy A. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $Spec(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.17. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

Definicja 8.1.18. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ.

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ.

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

Twierdzenie 8.1.19. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V. Wówczas

i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$,

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$.

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].
ii) Ponieważ $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, zatem
$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

Przykład 8.1.20. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste
$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 2y & = 0 \\ 3y & = 0 \\ -2x - 2y & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}$$

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 0, 1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$
Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.19 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.19 i) mamy
$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2}. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

8.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

i) Jeśli φ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V.

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

iii) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1}(t - \lambda_2)^{k_2} \ldots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

Dowód. i) Wynika z twierdzenia 8.2.1.
ii) Jeśli $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, to wówczas $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 = [\lambda_1, 0, 0 \ldots, 0]_\mathcal{B}$, $\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2 = [0, \lambda_2, 0 \ldots, 0]_\mathcal{B}, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n = [0, 0 \ldots, 0, \lambda_n]_\mathcal{B}$,

skąd $D = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$.
iii) Równość $k_i = \dim E_{\lambda_i}$ oznacza, że jeśli λ_i jest k_i-krotnym pierwiastkiem wielomianu χ_φ, to istnieje k_i liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających λ_i. Z kolei fakt, że χ_φ rozkłada się na iloczyn czynników liniowych, implikuje równość $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} = n = \dim V$. $\square$

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ.

Macierz diagonalizująca

Definicja 8.2.5. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą *diagonalizowalną*, gdy istnieje macierz nieosobliwa $P \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A.

Wniosek 8.2.6. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych A.

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie pewną baza przestrzeni V oraz niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, dla pewnego $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że istnieje baza $\mathcal{B}'$ przestrzeni V, złożona z wektorów własnych φ. Oznaczmy $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$. Wówczas $A' = D = P^{-1}AP$, gdzie $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. $\square$

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Przykład 8.2.7. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$
Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem
$Spec(A) = \varnothing$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.8. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,1,1) = (-1,-1,-1)$, $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,0,2)$ jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne
$\lambda_1 = -1, v_1 = (1,1,1),\ \lambda_2 = 1, v_1 = (0,1,1),\ \ \lambda_3 = 2, v_1 = (0,0,1)$.
Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.9. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$\varphi(x,y,z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$
$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$$
$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}$, $k_1 = 3$
$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : \ (A+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$
$$\dim E_{-1} = 3 - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq k_1 = 3.$$
Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

Wniosek 8.2.10. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \dots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = \big(v_1 \dots, v_n\big)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$
$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(P^{-1}P)D\dots(PP^{-1})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. $\square$

Przykład 8.2.11. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P. Oblicz $\varphi^{101}(1,2,3)$.
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$
$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$Spec\varphi = \{\lambda_1 = 1 \lambda_2 = 2\}$, $\quad k_1 = 1,\ k_2 = 2, \quad \dim E_1 = 1, \quad 1 \leq \dim E_2 \leq 2$
φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

$\dim E_2 = 3 - r(A-2I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x - y & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$

$E_1 = \{(-2z, -2z, z) :\ z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(-2,-2,1)\}$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-x + y - z = 0 \Rightarrow\ z = y - x,\ x, y \in \mathbb{R}$
$E_2 = \{(x, y, y-x) :\ x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$
Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \big(v_1 = (-2,-2,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1)\big)$

$D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, macierz diagonalizująca $P := P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Obliczymy $\varphi^{101}(1,2,3)$ na dwa różne sposoby.
METODA I: Wykorzystamy macierz D. $\quad$ Niech $v := (1,2,3) = [a,b,c]_{\mathcal{C}}$.

Wówczas $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, skąd $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $v = [2,5,6]_{\mathcal{C}}$.

$$D^{101} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$

$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}} = 2v_1 + 5 \cdot 2^{101} v_2 + 6 \cdot 2^{101} v_3 =$
$= (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$

METODA II: Obliczamy

$$A^{101}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=PD^{101}P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-2&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{101}&0\\0&0&2^{101}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&-2&2\\2&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3\cdot 2^{101}-2&2-2^{102}&2^{102}-2\\2^{102}-2&2-2^{101}&2^{102}-2\\1-2^{101}&-1+2^{101}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+5\cdot 2^{101}\\-4-6\cdot 2^{101}\\2+2^{101}\end{bmatrix}$$

Przykład 8.2.12. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$$f\in End(M_2(\mathbb{R})),\quad f(A)=A+A^T$$

$\mathcal{B}=\left(E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$ baza $M_2(\mathbb{R})$

$f(E_{11})=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$

$f(E_{12})=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$f(E_{21})=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$f(E_{22})=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$

$A=M_f(\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$

$\chi_f(t)=\det(A-tI)=(2-t)\begin{vmatrix}1-t&1&0\\1&1-t&0\\0&0&2-t\end{vmatrix}=(2-t)^2\begin{vmatrix}1-t&1\\1&1-t\end{vmatrix}=(2-t)^2\big((1-t)^2-1\big)=(2-t)^2(t^2-2t)=-t(2-t)^3$

$Spec(f)=\{\lambda_1=0,\lambda_2=2\}$, $k_1=1,k_2=3$, $\dim E_0=1$, $1\le\dim E_2\le 3$

$E_{\lambda_1}=E_0=\mathrm{Ker}(f)=\{B\in M_2(\mathbb{R}):\ B+B^T=O\}$

Niech $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, gdzie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$B+B^T=O\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a&=0\\b+c&=0\\2d&=0\end{cases}$

Zatem $B=\begin{bmatrix}0&b\\-b&0\end{bmatrix}$ oraz $E_0=\left\{\begin{bmatrix}0&b\\-b&0\end{bmatrix}:\ b\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_2}=E_2=\mathrm{Ker}(f-2\cdot\mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})})=\{B\in M_2(\mathbb{R}):\ B+B^T=2B\}$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a,b,c,d]_{\mathcal{B}},\ O_{2\times 2} = [0,0,0,0]_{\mathcal{B}}$

$$(A-2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c,\quad a,b,d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} :\ a,b,d \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 9
Data: ....

TEMAT: *Formy kwadratowe*

9.1 Definicja formy kwadratowej

Przypomnienie: Każdą macierz kwadratową D można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej $D = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(D + D^T)$, $C = \frac{1}{2}(D - D^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$.

Obserwacja: $X^T DX = X^T BX$
Istotnie $X^T DX = X^T(B + C)X = X^T BX + X^T CX$ oraz
$X^T CX = X^T \frac{D-D^T}{2} X = \frac{1}{2}\left(X^T DX - X^T D^T X\right) = \frac{1}{2}\left(X^T DX - (X^T D^T X)^T\right) = \frac{1}{2}\left(X^T DX - X^T DX\right) = O$

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną, tzn. $A = A^T$.
Na mocy powyższej obserwacji możemy przyjąć to założenie bez straty dla ogólności.

Definicja 9.1.1. Funkcję $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daną wzorem $\gamma(x) = X^T AX$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nazywamy *formą kwadratową*. Macierz symetryczną A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* γ.

Uwaga 9.1.2. i) Jeśli $A = [a_{ij}]$, to wówczas $\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$.

ii) γ jest wielomianem n zmiennych jednorodnym stopnia 2.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \gamma(\lambda x) = \lambda^2\gamma(x)$

Dowód. i) $[x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} =$
$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$
ii) Na mocy *i)* każdy jednomian γ jest stopnia 2.
iii) Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas na mocy i) mamy $\gamma(\lambda x) = \gamma(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\lambda x_i)(\lambda x_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$. $\square$

Przykład 9.1.3. Poniższe odwzorowania to formy kwadratowe.

i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^3$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ii) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem, zaś $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją taką, że $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Niech $P_0 \in \Omega$. Różniczka rzędu drugiego funkcji f w punkcie P_0

$$d^2_{P_0} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d^2_{P_0} f(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$$

jest formą kwadratową. Jej macierz ma postać

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \ldots & & \ldots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}.$$

Jest to tak zwana *macierz Hessego*. Jej wyznacznik nazywamy *hesjanem*.

9.2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej γ mamy $\gamma(\mathbf{0}) = 0$.

Definicja 9.2.1. Formę kwadratową $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T A X$ nazywamy

i) *dodatnio określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) > 0$,

ii) *ujemnie określoną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \gamma(x) < 0$,

iii) *dodatnio półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \geq 0$,

iv) *ujemnie półokreśloną*, gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \gamma(x) \leq 0$,

v) *nieokreśloną*, jeśli przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.

Terminologia ta przenosi się na macierze. Macierz symetryczna A jest dodatnio określona, gdy forma kwadratowa $\gamma(x) = X^T A X$ jest dodatnio określona itd.

Przykład 9.2.2. i) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest dodatnio określona

ii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2$ jest ujemnie określona

iii) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ jest nieokreślona, bowiem $\gamma(1,0,1) = 2 > 0$, zaś $\gamma(0,1,0) = -1 < 0$.

iv) $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_3^2$ jest dodatnio półokreślona. $\forall x_2 \in \mathbb{R} \;\; \gamma(0, x_2, 0) = 0$

Badanie określoności formy kwadratowej

Definicja 9.2.3. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

i) *Minorem głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ wierszy i kolumn o tych samych indeksach.

ii) *Minorem wiodącym głównym* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstłej przez skreślenie $n-k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k.

Symbolem $D_{i_1 \dots i_k}$ oznaczamy minor główny stopnia k, powstały przez skreślenie wierszy i kolumn poza tymi o indeksach $i_1 < \ldots < i_k$.

Przykład 9.2.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

minory wiodące główne: $\Delta_1 = D_{11} = 1$, $\Delta_2 = D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$,

$\Delta_3 = D_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_4 = D_{1234} = \det A = 0$

minory główne: $D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 12$, $D_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 0$

Twierdzenie 9.2.5 (Kryterium Sylvestera)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną.

i) A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne są dodatnie, tzn. $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \; \Delta_k > 0$.

ii) A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory wiodące główne parzystego stopnia są dodatnie, a nieparzystego ujemne,
tzn. $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \; (-1)^k \Delta_k > 0$.

Bez dowodu.

Przykład 9.2.6. i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona.

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -3 < 0.$$

ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ jest półokreślona ujemnie, gdyż $\gamma(x_1, x_2) = -x_2^2 \leq 0$.

Uwaga 9.2.7. Z warunku $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\Delta_k \geq 0$ nie wynika dodatnia półokreśloność A.

Twierdzenie 9.2.8. Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T AX$, gdzie $A = A^T$.

i) Forma kwadratowa γ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne,
tzn. $\forall\, 1 \leq k \leq n \quad \forall\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \quad D_{i_1 \ldots i_k} \geq 0$.

ii) Forma kwadratowa γ jest ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy minory główne macierzy A przyjmują następujące znaki
$\forall\, 1 \leq k \leq n \quad \forall\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \quad (-1)^k D_{i_1 \ldots i_k} \geq 0$.

Bez dowodu.

Przykład 9.2.9. Forma kwadratowa $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ jest dodatnio półokreślona.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

$D_2 = 0, \ D_3 = 1, \ D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ D_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Oczywiste bowiem $\gamma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 \geq 0$.

Uwaga 9.2.10. i) Jeśli $\Delta_2 = D_{12} < 0$, to macierz jest nieokreślona.

ii) Rzeczywista macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Dowód. i) $\Delta_2 = D_{12}$ to minor stopnia 2. Jeśli $D_{12} = (-1)^2 D_{12} < 0$, to na mocy kryterium Sylvestera, macierz nie jest dodatnio określona ani ujemnie określona. Na mocy twierdzenia 9.2.8 nie jest półokreślona dodatnio ani półokreślona ujemnie.
ii) Dowód można znaleźć w [4]. $\square$

Twierdzenie 9.2.11 (Kryterium wartości własnych)**.** Niech $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = X^T AX$, gdzie $A = A^T$ oraz niech $Spec(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wówczas forma kwadratowa γ jest

i) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \dots n\} \quad \lambda_i > 0$,

ii) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \dots n\} \quad \lambda_i < 0$,

iii) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \dots n\} \quad \lambda_i \geq 0$,

iv) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall\, i \in \{1, 2, \dots n\} \quad \lambda_i \leq 0$,

iv) nieokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists\, i, j \in \{1, 2, \dots n\} \quad \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$.

Dowód. Niech $\lambda \in Spec(A)$ oraz niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym λ. Oczywiście $v \neq \mathbf{0}_V$, więc $|v| \neq 0$. Obliczamy $v^T Av = \gamma(v) = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda |v|^2$. Zatem $\lambda(v) > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, co dowodzi podpunktu i). Analogicznie w pozostałych przypadkach. $\square$

Przykład 9.2.12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest dodatnio półokreślona.

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t\big(1 - (1-t)^2\big) = t(2t - t^2) = t^2(2-t)$

$Spec(A) = \{\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra wyższa
Wykład nr 10
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

10.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 10.1.1. Funkcję $s : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$,

ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$.

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

Przykład 10.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w* $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że
$\forall u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle ., . \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$,
$\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ liczby ustalone

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.
Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Nie oznacza to jeszcze, że p jest wielomianem zerowym.

Niech $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Załóżmy, że $\langle p, p\rangle = 0$. Wówczas $p(x_0) = p(x_1) = \ldots = p(x_n) = 0$, skąd otrzymujemy $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.
Wyznacznik główny W tego układu, to *wyznacznik Vandermonde'a.*
$W = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) \neq 0$, bowiem $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, co oznacza, że p jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad \langle ., .\rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$

Na mocy twierdzenia 3.1.13, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 10.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0$,

iii) $\forall u, v \in V \quad \Big(s(u, v)\Big)^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v)$ *nierówność Schwarza*

Dowód. i) $s(u, \alpha v + \beta w) = s(\alpha v + \beta w, u) = \alpha s(v, u) + \beta s(w, u) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$
ii) Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $s(v, \mathbf{0}_V) = s(v, \alpha\mathbf{0}_V) = \alpha s(v, \mathbf{0}_V)$. Stąd $s(v, \mathbf{0}_V) = 0$.
iii) Załóżmy, że $v \neq \mathbf{0}_V$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $s(u-\alpha v, u-\alpha v) \geq 0$. Równoważnie $s(u, u) - 2\alpha s(u, v) + \alpha^2 s(v, v) \geq 0$. Biorąc $\alpha = \frac{s(u,v)}{s(v,v)}$, otrzymujemy $s(u, u) - 2\frac{[s(u,v)]^2}{s(v,v)} + \frac{[s(u,v)]^2}{s(v,v)} \geq 0$. Stąd $s(u, u) + s(v, v) \geq [s(u, v)]^2$. $\square$

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 10.1.4. Funkcję $||.|| : V \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad ||v|| \geq 0 \quad \wedge \quad ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$,

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$,

iii) $\forall u, v \in V \quad ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$. $\qquad$ tzw. warunek trójkąta

Liczbę $||v|| \geq 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora* v. Parę $(V, ||.||)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną.*

Twierdzenie 10.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $||.||_s : V \to \mathbb{R}$ dane wzorem
$$\forall v \in V \quad ||v||_s = \sqrt{s(v,v)}$$
jest normą w przestrzeni V. Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny.*

Dowód. Ponieważ dla dowolnego $v \in V$ mamy $s(v,v) \geq 0$ oraz $s(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$, zatem $||v||_s = \sqrt{s(v,v)} \geq 0$ oraz $||v||_s = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $||\alpha v||_s = \sqrt{s(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 s(v,v)} = |\alpha|\sqrt{s(v,v)} = |\alpha| \cdot ||v||_s$. Ponadto na mocy nierówności Schwarza $||u+v||_s = s(u+v, u+v) = s(u,u) + 2s(u,v) + s(v,v) = ||u||_s^2 + 2s(u,v) + ||v||_s^2 \leq ||u||_s^2 + 2\sqrt{s(u,u)}\sqrt{s(v,v)} + ||v||_s^2 = ||u||_s^2 + 2||u||_s||v||_s + ||v||_s^2 = (||u||_s + ||v||_s)^2$, skąd otrzymujemy nierówność trójkąta. $\square$

Przykład 10.1.6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 10.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

10.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v.
Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{||v||}$ jest wersorem, bowiem $||\hat{v}|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1$.

Miara kąta między wektorami
W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy
$|\langle u,v \rangle| \leq \sqrt{\langle u,u \rangle}\sqrt{\langle v,v \rangle} = ||u|| \cdot ||v|| \ \Rightarrow \ \frac{|\langle u,v \rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1 \ \Leftrightarrow \ -1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1$.
Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α. Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem
$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}, \quad \measuredangle(u,v) = \arccos \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 10.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle .,. \rangle)$, gdzie $\langle p, q\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)$. Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$\langle u, v\rangle = u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18$
$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$
$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{18}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}}$

Definicja 10.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \ldots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad i \neq j \ \Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & ; \ i \neq j \\ 1 & ; \ i = j \end{cases} .$$

Uwaga 10.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

Przykład 10.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}), \langle ., .\rangle)$, gdzie $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdzimy, czy wektory $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\big(- 1 - (-1)\big) = 0$
$\langle f, f\rangle = ||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$
Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

Twierdzenie 10.2.5 (Pitagorasa)**.** Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Dowód. $||u + v||^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \overset{\langle u,v\rangle=0}{=} ||u||^2 + ||v||^2$ □

Twierdzenie 10.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Dowód. Załóżmy, że $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jest układem ortogonalnym oraz $\alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}_V$, dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, k\}$ mamy $0 = \langle \mathbf{0}_V, v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j\rangle = \alpha_j ||v_j||^2$. Ponieważ $v_j \neq \mathbf{0}_V$, zatem $||v_j|| \neq 0$ i stąd $\alpha_j = 0$. Jest to prawdą dla dowolnego j, zatem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ i układ jest liniowo niezależny. □

Wniosek 10.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 10.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Przykład 10.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$
baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = \big(\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1)\big)$
Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{i}$, $v_y = v \circ \hat{j}$, $v_z = v \circ \hat{k}$.
Z dokładnością do znaku skalary v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 10.2.10. Niech $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$. Niech $v \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{||b_1||^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{||b_2||^2} + \ldots \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{||b_n||^2}.$$

Dowód. Ponieważ $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$, zatem $\langle v, b_1 \rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_1 \rangle + \alpha_2 \langle b_2, b_1 \rangle + \ldots \alpha_n \langle b_n, b_1 \rangle = \alpha_1 ||b_1||^2$. Stąd $\alpha_1 = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{||b_1||^2}$. Analogiczne rachunki przeprowadzamy dla $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Jeśli $v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i$, $w = \sum_{i=1}^n \frac{\langle w, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i$, to wówczas $\langle v, v \rangle = \big\langle \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i, \sum_{j=1}^n \frac{\langle w, b_j \rangle}{||b_j||^2} b_j \big\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{||b_i||^2 ||b_j||^2} \langle v, b_i \rangle \langle w, b_j \rangle \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{||b_i||^4} \langle v, b_i \rangle \langle w, b_i \rangle ||b_i||^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, b_i \rangle \langle w, b_i \rangle}{||b_i||^2}$ □

Wniosek 10.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \ldots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 10.2.10 przyjąć $||b_i|| = 1$. □

Wniosek 10.2.12. Niech $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle .,. \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \ldots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i^n \alpha_i\beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$. □

10.3 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 10.3.1. Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \ldots b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \ldots c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \ldots b_m\} = \text{lin}\{c_1, \ldots c_m\}$.

Bez dowodu. Metoda dowodowa jest analogiczna do tej przedstawionej w przykładzie 10.3.3 poniżej.

Wniosek 10.3.2. i) Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa rożna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Dowód. i) Na mocy twierdzenia 6.2.23 i) skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa rożna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę. Na mocy twierdzenia 10.3.1, bazę tę można zortogonalizować. Ponadto możemy unormować wektory otrzymanej bazy ortogonalnej.
ii) Na mocy wniosku 10.2.7 układ ortonormalny jest liniowo niezależny. Na mocy twierdzenia 6.2.23 iii) układ liniowo niezależny może być uzupełniony do bazy. □

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 10.3.3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$, tj. $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dana jest baza $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)\big)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B}$.

Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$. Wówczas oczywiście $\text{lin}\{c_1\} = \text{lin}\{b_1\}$.

II KROK: Aby zagwarantować, że $\text{lin}\{c_1, c_2\} = \text{lin}\{b_1, b_2\}$, poszukujemy c_2 w postaci $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzemy α w taki sposób, by $c_2 \circ c_1 = 0$.
Obliczamy $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1)$.
Aby $c_2 \circ c_1 = 0$, wystarczy przyjąć $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$.
W naszym przykładzie $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (5, 5, 1) \circ (1, -2, 0) + \alpha \cdot (1, -2, 0) \circ$

$(1,-2,0) = -5+5\alpha$, skąd $\alpha = 1$. Zatem $c_2 = b_2 + c_1 = (6,3,1)$.

III KROK: Aby zagwarantować, że $\text{lin}\{c_1,c_2,c_3\} = \text{lin}\{b_1,b_2,b_3\}$, poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzemy β_1, β_2 w taki sposób, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.
Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1(c_1 \circ c_1) + \beta_2(c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2$, skąd $\beta_1 = -\frac{b_3 \circ c_1}{||c_1||^2}$. Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1(c_1 \circ c_2) + \beta_2(c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2$, skąd $\beta_2 = -\frac{b_3 \circ c_2}{||c_2||^2}$.

W naszym przykładzie $\begin{cases} 0 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (5,4,4) \circ (1,-2,0) + \beta_1(1+4+0) = -3 + 5\beta_1 \\ 0 = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (5,4,4) \circ (6,3,1) + \beta_2(36+9+1) = 46 + 46\beta_2 \end{cases}$.
Skąd $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = -1$.
Zatem $c_3 = b_3 + \frac{3}{5}c_1 - c_2 = (5,4,4) + \frac{3}{5}(1,-2,0) - (6,3,1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)$.
$\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,-2,0), c_2 = (6,3,1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\big)$ jest bazą ortogonalną.

Ponieważ $||c_1|| = \sqrt{5}$, $||c_2|| = \sqrt{46}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$, zatem bazą ortonormalną jest
$\mathcal{C}' = \Big(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1,-2,0), c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot (6,3,1), c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \sqrt{\frac{5}{46}} \cdot (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\Big)$.

Wniosek 10.3.4. Jeśli $\mathcal{B} = \Big(b_1, b_2, \ldots, b_n\Big)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle .,. \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = \big(c_1, c_2, \ldots, c_n\big)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \qquad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 \qquad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{||c_2||^2} c_2 \quad \ldots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{||c_i||^2} c_i$$

Przykład 10.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = \big(1, x, x^2\big)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.
Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1+1+1) = 3\alpha$.
Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.
Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.
Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3} c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.
$\mathcal{C} = \left(c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3}\right)$ jest bazą ortogonalną.

$||c_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $||c_2|| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Bazą ortonormalną jest układ wektorów
$\mathcal{C}' = \left(c'_1 = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2} x, c'_3 = \frac{c_3}{||c_3||} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2} x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 10.3.6. Niech $u_1, \ldots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \ldots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Bez dowodu. Dowód można znaleźć w [4].

Przykład 10.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.
Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 1 & 5 & 5 \\ & & & -2 & 5 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \qquad A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A \cdot A^T|A] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5} w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array}\right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.
Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $||c_1||^2, ||c_2||^2, ||c_3||^2$.
Zatem $||c_1|| = \sqrt{5}, ||c_2|| = \sqrt{46}, ||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

10.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 10.4.1. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \ \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru* S w przestrzeni euklidesowej V. Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora* $x \in V$.

Twierdzenie 10.4.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrznią liniową.

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Dowód. i) Niech $x, y \in U^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego $w \in U$ mamy $\langle \alpha x + \beta y, w \rangle = \alpha \langle x, w \rangle + \beta \langle y, w \rangle = 0$. Zatem $\alpha x + \beta y \in U^\perp$.
ii) Niech $x, y \in \{u\}^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas $\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle = 0$. Zatem $\alpha x + \beta y \in \{u\}^\perp$. $\square$

Przykład 10.4.3. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : \ x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 10.4.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni* U i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 10.4.5. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U, u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_\mathcal{B}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \ldots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 10.4.6. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$
$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x\Big|_0^1 = 0$
$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 0$ Zatem $w \perp U$.

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 10.4.7. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,

ii) $U^\perp = (\text{lin}U)^\perp$,

iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.

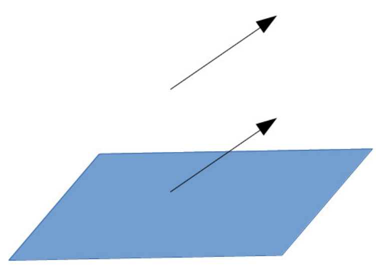
Dowód. i) $x \in U_2^\perp \Leftrightarrow \forall y \in U_2\ x \perp y \overset{U_1 \subseteq U_2}{\Rightarrow} \forall y \in U_1\ x \perp y \Leftrightarrow x \in U_1^\perp$
ii) Wynika z uwagi 10.4.5.
iii) Niech $u \in U$. Wówczas $\langle u, x\rangle = 0$ dla dowolnego $x \in U^\perp$. Stąd $u \perp x$ dla dowolnego $x \in U^\perp$, czyli $x \in$. $\square$

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 10.4.8. Operator liniowy $\pi \in End(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V\ \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad v - u \perp U,$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U. Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U.



Twierdzenie 10.4.9 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego)**.** Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U.

i) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U, wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \langle v, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k\rangle \end{bmatrix}. \tag{1}$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest bazą ortogonalną, wówczas rzut ten określony jest wzorem

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2} b_2 + \ldots + \frac{\langle v, b_k\rangle}{||b_k||^2} b_k.$$

iii) Jeśli baza $\mathcal{B}$ jest bazą <u>ortonormalną</u>, wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \ldots + \langle v, b_k\rangle b_k.$$

Dowód. Jeśli $u = \pi(v)$, to $v - u \perp U$, co na mocy uwagi 10.4.5 jest równoważne $v - u \perp b_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Zatem $\langle v - u, b_i\rangle = 0$ lub równoważnie $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$. Ponieważ $u \in U$, zatem istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in R$ takie, że $u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$.
i) Otrzymujemy układ równań $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle = \langle \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k, b_i\rangle = \alpha_1\langle b_1\rangle + \ldots + \alpha_k\langle b_k, b_i\rangle$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, który jest równoważny układowi (1).
ii) Na mocy twierdzenia 10.2.10 mamy $\alpha_i = \frac{\langle v, b_i\rangle}{||b_i||^2}$.
iii) Na mocy wniosku 10.2.11 mamy $\alpha_i = \langle v, b_i\rangle$. $\square$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów $\big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$.

Przykład 10.4.10. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \mathrm{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U, bowiem $r\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I
$u := \pi_U(v) =?$, $\quad w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$
$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas
$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$

Otrzymujemy układ dwóch równań
$0 = \langle w, b_1\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha$,
$0 = \langle w, b_2\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta$.
Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz
$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$

METODA II
Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.
Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 10.2.10 mamy $u = \left[\frac{\langle u, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle u, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Ale $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$, zatem $u = \left[\frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Obliczamy $\langle v, b_1\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4$, $\langle v, b_2\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1$ oraz $||b_1||^2 = 10$, $||b_2||^2 = 11$. Stąd $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}$.

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

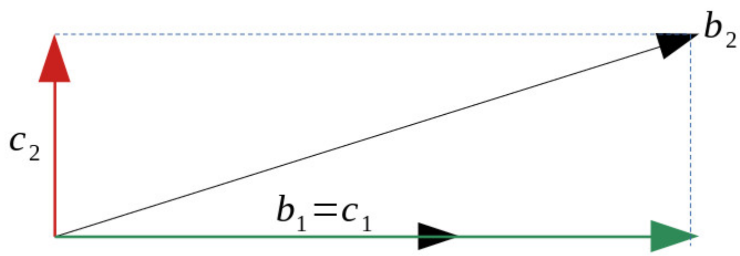
Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta
Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

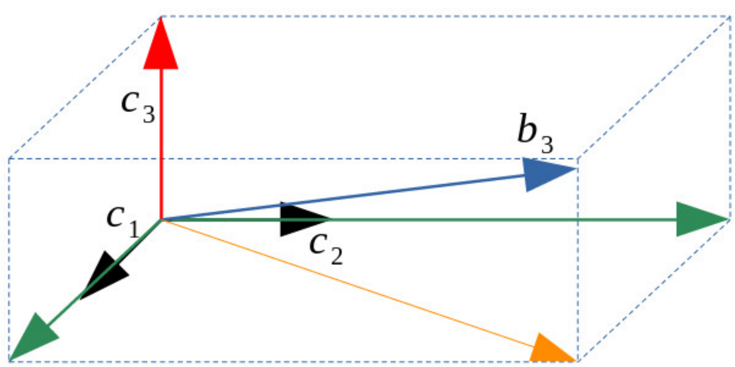
KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1\rangle}{||c_1||^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_1)$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1\rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2\rangle}{||c_2||^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Przykładowy egzamin z przedmiotu Algebra wyższa

Łącznie można otrzymać 100 punktów. Aby otrzymać z egzaminu ocenę pozytywną, należy uzyskać nie mniej niż 50 punktów.

Zadanie 1. *(20 pkt)*

a) Czy zbiór $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ *wraz z działaniami dodawania i mnożenia liczb tworzy pierścień (przemienny, z jedynką)? Czy jest to ciało? Odpowiedź uzasadnij.*

b) Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych podane równanie.

$$z^3 = (\sqrt{12} - 2i)^{21}(i - 1)^{13}$$

Zadanie 2. *(20 pkt)*

a) Podaj wszystkie możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_6(\mathbb{R})$ *takiej, że*

$$3A - \left(A^T\right)^7 = O.$$

b) Dana jest płaszczyzna $\pi_1 : 4x + 2y - z + 2 = 0$. *Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny* π *przechodzącej przez punkty* A, B, C, *jeżeli* $A = (2, 4, 6)$, *zaś* B *i* C *to końce odcinka symetrycznego do odcinka*
$DE : \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -3 + 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, t \in [0, 1]$ *względem płaszczyzny* π.

Zadanie 3. *(20 pkt)*

a) Podaj definicję endomorfizmu diagonalizowalnego.

b) Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ *dany będzie wzorem*

$$\varphi(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Uzasadnij, że φ *jest diagonalizowalny i oblicz* $\varphi^{103}(2, 1, 0)$.

<u>Zadanie</u> 4. *(20 pkt) Dane jest odwzorowanie liniowe*

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z,t)=(2x+3y+z+t,-3x+y+4z-7t,x+2y+z).$$

a) *Wyznacz* $Ker f$*, jego bazę i wymiar. Czy* f *jest monomorfizmem / epimorfizmem?*

b) *W* $\mathbb{R}^4$ *rozważmy standardowy iloczyn skalarny. Wyznacz rzut ortogonalny wektora* $(1,1,-2,-1)$ *na* $Ker f$*.*

c) *Podaj macierz* $M_f(\mathcal{B},\mathcal{B}_k^3)$*, gdy* $\mathcal{B}=\Big((1,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\Big)$ *i korzystając z macierzy* A *oblicz* $f(1,1,-2,-1)$*.*

<u>Zadanie</u> 5. *(20 pkt) Dana jest przestrzeń wektorowa* $(\mathbb{R}_2[x],+,\mathbb{R},\cdot)$*. W przestrzeni tej definiujemy iloczyn skalarny*

$$\Big(p(x),q(x)\Big)=aa'+bb'+cc',\quad dla\quad p(x)=ax^2+bx+c,\ q(x)=a'x^2+b'x+c'$$

a) *Udowodnij, że* $\mathcal{B}=(p,q,r)$ *jest bazą* $\mathbb{R}_2[x]$*, gdy* $p(x)=x^2+x, q(x)=x^2, r(x)=x-1$*.*

b) *Metodą Grama-Schmidta przeprowadź ortogonalizację bazy* $\mathcal{B}$*.*

Contents