

## Zadanie domowe nr 4 Przestrzenie wektorowe i odwzorowania liniowe

**Zadanie 1.** Czy  $U$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ ? Odpowiedź uzasadnij.

a)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \{(x, y) : x = 4y^2\}$

b)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^4 = 0\}$

**Zadanie 2.** Niech

$$p = 1 + x, \quad q = 2 - 3x, \quad r = 3 - x + 5x^2.$$

a) Uzasadnij, że układ  $\mathcal{B}' = (p, q, r)$  stanowi bazę przestrzeni  $\mathbb{R}_2[x]$ .

b) Wyznacz macierz przejścia od bazy standardowej  $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$  do bazy  $\mathcal{B}'$ .

b) Wyznacz współrzędne wektora  $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x + 5x^2$  w tejże bazie.

**Zadanie 3.** Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad f(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x).$$

a) Wyznacz macierz  $f$  w bazach standardowych.

b) Wyznacz  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ , ich bazy i wymiary. Podaj własności  $f$  (monomorfizm, epimorfizm).

**Zadanie 4.** Odwzorowanie liniowe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dane jest za pomocą następującego przyporządkowania.

$$f(1, 1, 1) = (2, 2), \quad f(1, 0, 1) = (1, 0), \quad f(0, 1, 1) = (1, 1)$$

a) Podaj wzór odwzorowania  $f$ .

b) Wyznacz macierz  $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  tego odwzorowania w bazach

$$\mathcal{B} = \{b_1 = (3, 1, 1), b_2 = (5, 1, 6), b_3 = (4, -1, 2)\}, \quad \mathcal{C} = \{c_1 = (-1, 1), c_2 = (1, 0)\}.$$

c) Rozważmy w  $\mathbb{R}^2$  bazę  $\mathcal{C}' = \{c'_1 = (1, 1), c'_2 = (2, 1)\}$ . Wyznacz macierz przejścia  $P = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}$  od bazy  $\mathcal{C}$  do bazy  $\mathcal{C}'$ .

d) Wykorzystując macierz  $P$  wyznacz współrzędne wektora  $v \in \mathbb{R}^2$  w bazie  $\mathcal{C}'$ , jeżeli

$$v = [2, 5]_{\mathcal{C}}.$$