

Zadanie domowe nr 5

Diagonalizacja endomorfizmu, ortogonalizacja bazy, rzutowanie

Zadanie 1. Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu φ .

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi(p)(x) = 3xp'(x) + (x^2 - 1)p(1) + xp(2)$$

Zadanie 2. Dany jest $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ taki, że

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \quad \varphi(1, 1, 0) = (-1, -1, 0), \quad \varphi(1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Oblicz $\varphi^{100}(3, 6, 9)$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni (krotność geometryczną). Czy podany endomorfizm jest diagonalizowalny? Jeśli tak, dokonaj diagonalizacji reprezentującej go macierzy.

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y - 2z, x + 3z, x + 3y)$$

Zadanie 4. Dana jest podprzestrzeń liniowa U przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

$$U = \text{lin}\{b_1 = (1, 1, -1, 0), b_2 = (0, 2, -1, 1), b_3 = (1, 5, -3, 0)\}$$

a) Metodą Grama-Schmidta zortogonalizuj bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ przestrzeni U .

b) Wyznacz rzut ortogonalny $u = \pi_U(v)$ wektora $v = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ na podprzestrzeń U .