

Energetyka - Kartkówka 3

Zad. 1

b) $(\mathbb{R}, \circ)$ $x \circ y := x + y + 1$

Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$L = x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z + 1) = x + y + z + 1 + 1$$

$L = P$

$$P = (x \circ y) \circ z = (x + y + 1) \circ z = x + y + 1 + z + 1$$

Także

Niech $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \circ y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \circ x$$

przemienne

El. neutralny

Czy $\exists e \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} e \circ x = x \circ e = x$

o przemienne $\Rightarrow$ wystarczy $e \circ x = x$

$$e \circ x = e + x + 1 = x \Leftrightarrow e + 1 = 0 \Leftrightarrow e = -1$$

$-1 \in \mathbb{R}$

TAK
istnieje

Zad. 2

Czy zbiór $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x + 1\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^2$? Odpowiedź uzasadnij.

NIE JEST bożem $(0, 0) \notin U$. $y = 0 \neq 3 \cdot 0 + 1 = 1$

Zad. 3

a) Uzasadnij że układ wektorów $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (0, 0, 1)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$

dim $\mathbb{R}^3 = 3$ $\wedge$ mamy 3 wektory $\Rightarrow$ wystarczy sprawdzić, że są liniowo niezależne

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha) + (\beta, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) = (\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \alpha + \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha = 0$$

W lin. niezależne $\Rightarrow$ baza $\mathbb{R}^3$

Zad. 5

Metoda Gaussa rozwiązuje układ równań

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_1 \leftrightarrow u_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{u_3 - 2u_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{u_3 + u_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$x \quad y \quad z \quad t$

$$\begin{cases} x = 2z - 2t \\ y = 1 - 3z + 3t \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{układ macierzy}$$

Zad.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (-x, 2y)$$

Czy liniowa? TAK

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (-\alpha x, 2\alpha y) = \alpha(-x, 2y) = \alpha f(x, y)$$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$L = f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (-(x_1 + x_2), 2(y_1 + y_2))$$

$$P = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = (-x_1, 2y_1) + (-x_2, 2y_2) = (-x_1 - x_2, 2y_1 + 2y_2)$$

$L = P$