Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 1
Data: .....

TEMAT: *Metody dowodzenia twierdzeń. Działania i wybrane struktury algebraiczne*

1.1 Notacja

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ podzbiorów zbioru $\{a, b\}$. Dwie pary $(a, b), (c, d)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c \wedge b = d$. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

Przykład 1.1.1. Wyznacz $A \times B$, $B \times A$, B^2.

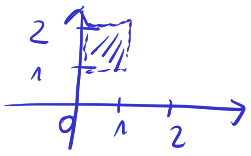
i) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 7\}$

$A \times B = \{(3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 5), (5, 7)\}$
$B \times A = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5)\}$
$B^2 = \{(5, 5), (5, 7), (7, 5), (77)\}$

$A \times B \neq B \times A$!

ii) przedziały $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $B = (1, 2) \subset \mathbb{R}$

$A \times B = \{(x, y) : 0 < x < 1 \wedge 1 < y < 2\}$
$B \times A = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 < y < 1\}$



iii) $A = B = \mathbb{R}$

$A \times B = B \times A = A^2 = B^2$
Oznaczamy $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ - płaszczyzna rzeczywista

Przyjmujemy następującą notację.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych

Oznaczenia kwantyfikatorów

$\forall$	kwantyfikator ogólny (duży)	*dla każdego*
$\exists$	kwantyfikator szczegółowy (mały)	*istnieje*
$\exists!$		*istnieje dokładnie jeden*

Symbol sumy i iloczynu

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ to dowolny ciąg liczb.

Sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ oznaczamy symbolem $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Symbol i to wskaźnik sumowania lub indeks sumowania, m to dolna granica sumowania, zaś n to górna granica sumowania.

Zauważmy że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ oraz $c \in \mathbb{R}$ zachodzą równości
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n)$ oraz
$c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n$, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i, \qquad c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i.$$

Przykład 1.1.2. $\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
$\sum_{i=5}^{9} \frac{i}{i+2} = \frac{5}{7} + \frac{6}{8} + \frac{7}{9} + \frac{8}{10} + \frac{9}{11}$
$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ oznaczamy symbolem $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Symbol i to wskaźnik iloczynu, m to dolny wskaźnik iloczynu, zaś n to górny wskaźnik iloczynu.

Przykład 1.1.3. $\prod_{i=0}^{6}(9 - j) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (-1) \cdot n = n!$
$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ razy}} = \prod_{i=1}^{n} x$

1.2 Metody dowodzenia twierdzeń

Twierdzenie	założenia $\Rightarrow$ teza
	$p \Rightarrow q$, gdzie p, q są zdaniami

Dowód to wykazanie prawdziwość implikacji $p \Rightarrow q$.

Dowód wprost
Przeprowadzając dowód wprost, dowodzimy prawdziwości tezy bezpośrednio poprzez dedukcję z założeń twierdzenia.

Przykład 1.2.1. Udowodnimy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^5 - 5n^3 + 4n$ jest podzielna przez 5. Przekształcamy wyrażenie.

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

Otrzymaliśmy iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych. Zatem jedna z ich jest podzielna przez 5. Stąd iloczyn jest podzielny przez 5.

Dowód nie wprost (łac. reductio ad absurdum – sprowadzenie do sprzeczności, łac. contradictio in contrarium – zaprzeczenie przeciwieństwa)
Przeprowadzając dowód nie wprost, z założenia o nieprawdziwości tezy wyprowadzamy sprzeczność z przyjętymi założeniami.

Przykład 1.2.2. Niech $a \in \mathbb{Z}$. Jeśli a^2 jest liczbą parzystą, to wówczas a również jest liczbą parzystą.

Przypuśćmy, że a jest liczbą nieparzystą. Wówczas istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $a = 2k+1$. Stąd $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Zatem a^2 jest liczbą nieparzystą, co przeczy założeniu twierdzenia. To oznacza, że nasze początkowe przypuszczenie jest fałszywe i a jest liczbą parzystą.

Przykład 1.2.3. Udowodnimy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.
Wówczas istnieją $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ względnie pierwsze i takie, że $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Stąd wynika, że $2 = \frac{a^2}{b^2}$ lub równoważnie $2b^2 = a^2$.
Zatem a^2 jest liczbą parzystą. Stąd wynika, że również a jest liczbą parzystą, czyli istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $a = 2k$.
Stąd $2b^2 = 4k^2$ oraz $b^2 = 2k^2$. Zatem b^2 jest liczbą parzystą, a więc również b jest liczbą parzystą.
Ułamek $\frac{a}{b}$ nie jest nieskracalny.
Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód indukcyjny
Dowód indukcyjny jest to dowód w którym wykorzystujemy **zasadę indukcji matematycznej**.

Twierdzenie 1.2.4 (Zasada indukcji matematycznej)**.** Niech $\Phi(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz niech $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Jeśli zachodzą warunki

i) $\Phi(n_0)$, ($\Phi(n_0)$ jest prawdziwe)

ii) $\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0 \quad \Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$, (prawdziwa jest implikacja)

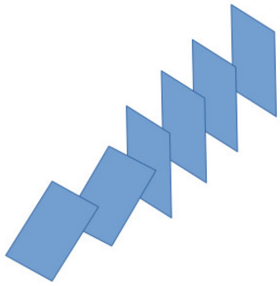
to wówczas $\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0 \quad \Phi(n)$. ($\forall n \in \mathbb{N}_0$ zdanie $\Phi(n)$ jest prawdziwe)

Jeśli jakieś twierdzenie, w którym mowa o liczbach naturalnych,
jest prawdziwe dla określonej liczby naturalnej n_0 oraz
jeżeli dla każdej liczby naturalnej n z założenia, że twierdzenie jest prawdziwe dla n wynika,
że jest ono prawdziwe dla liczby następnej $n+1$,
to twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej nie mniejszej niż n_0.

Kostki domina

Czy wszystkie kostki się przewrócą?

Jeśli przewrócono pierwszą kostkę oraz
kostki są ustawione tak,
że upadek którejkolwiek z nich przewraca następną,
to wszystkie kostki się przewrócą.



Przykład 1.2.5. Sprawdźmy poniższe równości.

$$
\begin{aligned}
1^3 &= \tfrac{1}{4}\cdot 1^2 \cdot 2^2\\
1^3+2^3 &= \tfrac{1}{4}\cdot 2^2 \cdot 3^2\\
1^3+2^3+3^3 &= \tfrac{1}{4}\cdot 3^2 \cdot 4^2\\
1^3+2^3+3^3+4^3 &= \tfrac{1}{4}\cdot 4^2 \cdot 5^2
\end{aligned}
$$

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

I. Warunek początkowy

Sprawdziliśmy już, że dla $n_0 = 1$ wzór jest prawdziwy.

II. Krok indukcyjny (prawo przekazywania)

Niech n oznacza liczbę naturalną. Chcemy uzasadnić, że jeśli wzór jest prawdziwy dla n, to jest on prawdziwy dla $n+1$. Innymi słowy chcemy uzasadnić, że z założenia (tzw. założenie indukcyjne)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

wynika teza

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Dowód przedstawiamy poniżej.

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{z.ind.}{=} (n+1)^3 + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 =$$

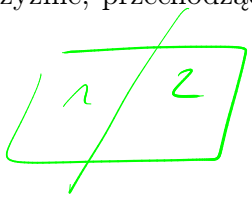
$$= (n+1)^2\left(n+1+\frac{1}{4}n^2\right) = \frac{1}{4}(n+1)^2(4n+4+n^2) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = P$$

Zatem $L = P$, implikacja jest prawdziwa.

III. Wniosek

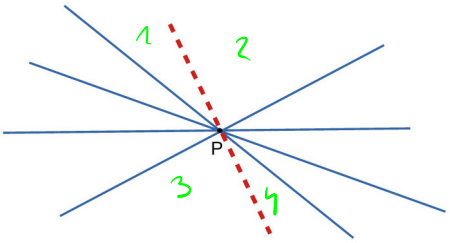
Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej, tj. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Przykład 1.2.6. Udowodnimy, że n różnych prostych na płaszczyźnie, przechodzących przez ustalony punkt P, dzieli płaszczyznę na $2n$ części.



I. Warunek początkowy, dla $n_0 = 1$
Jedna prosta dzieli płaszczyznę na $2n_0 = 2$ części.

II. Krok indukcyjny
Niech $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że n prostych przechodzących przez ustalony punkt P, dzieli płaszczyznę na $2n$ części. Chcemy uzasadnić, że wówczas $n+1$ prostych dzieli płaszczyznę na $2(n+1) = 2n+2$ części.



Poprowadźmy dodatkową prostą. W miejsce dwóch obszarów powstają cztery. A zatem mamy $2n+2$ obszary.

III. Wniosek: Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby prostych.

Przykład błędnego rozumowania indukcyjnego można znaleźć tutaj.

1.3 Działania wewnętrzne i ich własności

Niech A będzie zbiorem niepustym.

Definicja 1.3.1. Dowolną funkcję $h : A \times A \to A$ nazywamy *działaniem wewnętrznym* w zbiorze A. Wartość funkcji $h(a,b) \in A$ nazywamy *wynikiem* działania dla pary argumentów $a, b \in A$.

Przykład 1.3.2. i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

ii) Odejmowanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.

iii) Dodawanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Własności działań wewnętrznych

Definicja 1.3.3. Niech $* : A \times A \to A$ będzie działaniem wewnętrznym.

i) Działanie $*$ nazywamy *przemiennym*, jeśli $\forall\, a, b \in A \quad a * b = b * a$.

ii) Działanie $*$ nazywamy *łącznym*, jeśli $\forall\, a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.

iii) Element $e \in A$ nazywamy *elementem neutralnym* działania $*$, jeśli $\forall\, a \in A \quad a * e = e * a = a$.

Przykład 1.3.4. i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemiennym w $\mathbb{R}$. 0 jest elementem neutralnym.

ii) Mnożenie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemiennym w $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 jest elementem neutralnym.

Twierdzenie 1.3.5. Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $e_1, e_2 \in A$ będące elementami neutralnymi w A. Wówczas $e_2 = e_1 * e_2 = e_1$. □

Przykład 1.3.6. Niech X to dowolny zbiór.

i) Zbiór pusty $\varnothing$ jest elementem neutralnym w $\big(P(X), \cup\big)$.

ii) Zbiór X jest elementem neutralnym w $\big(P(X), \cap\big)$.

Definicja 1.3.7. Niech $* : A \times A \to A$ będzie działaniem wewnętrznym, posiadającym element neutralny $e \in A$. Dla dowolnego $a \in A$ każdy element $a' \in A$ taki, że $a * a' = a' * a = e$, nazywamy *elementem symetrycznym* do a względem działania $*$.

Przykład 1.3.8. i) W $(\mathbb{R}, +)$ elementem symetrycznym do 5 jest -5 (tzw. element przeciwny).

ii) W $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ elementem symetrycznym do 5 jest $\frac{1}{5}$ (tzw. element odwrotny).

iii) W $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + 1$, elementem neutralnym jest -1, zaś elementem symetrycznym do x jest $-2 - x$.

Twierdzenie 1.3.9. Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

1.4 Podstawowe struktury algebraiczne

Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $* : G \times G \to G$ działaniem wewnętrznym w G.

Definicja 1.4.1. i) Parę $(G, *)$ nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie jest łączne.

ii) Parę $(G, *)$ nazywamy *grupą*, jeżeli działanie jest łączne, posiada element neutralny oraz każdy element G posiada element symetryczny względem $*$ w G.

Jeśli dodatkowo działanie $*$ jest przemienne, to mówimy o *półgrupie przemiennej, grupie przemiennej (abelowej).*

Przykład 1.4.2. Oznaczmy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{Z}, \cdot)$	$(\mathbb{Q}, +)$	$(\mathbb{Q}, \cdot)$	$(\mathbb{R}^*, +)$	$(\mathbb{R}^*, \cdot)$
wewnętrzność	✓	✓	✓	✓	nie $-1+1=0$ $0 \notin \mathbb{R}^*$	✓
łączność	✓	✓	✓	✓		✓
przemienność	✓	✓	✓	✓		✓
el. neutralny	brak $0 \notin \mathbb{N}$	✓ $1 \in \mathbb{Z}$	✓ $0 \in \mathbb{Z}$	✓ $1 \in \mathbb{Z}$		✓ $1 \in \mathbb{R}^*$
el. symetryczny		brak $2 \cdot b = 1$ $b = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	✓ $a + a' = 0$ $a' = -a \in \mathbb{Q}$	brak $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ nie dla $a = 0$		✓ $a \cdot a' = 1$ $a' = \frac{1}{a}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
	półgrupa przemienna bez el. neutr.	półrupa przemienna z el. neutr.	grupa abelowa	półrupa przemienna z el. neutr.		grupa abelowa

Przykład 1.4.3. Niech $X = \{1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś działanie $\circ$ to mnożenie liczb. Czy $(X, \circ)$ jest półgrupą/grupą (abelową)?

Jeśli $a, b, c \in X$, to istnieją $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ takie, ze $a = 2^n, b = 2^m, c = 2^k$.

wewnętrzne $a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} \in A$

przemienne $a \circ b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = b \circ a$

łączne $(a \circ b) \circ c = 2^{n+m} \cdot 2^k = 2^{n+m+k} = 2^n \cdot 2^{m+k} = a \circ (b \circ c)$

el. neutralny $e = 2^s, s \in \mathbb{N}_0 \quad a \circ e = a \Leftrightarrow 2^{n+s} = 2^n \Rightarrow s = 0, e = 1 \in X$

brak el. odwrotnego $a \circ b = 1 \Leftrightarrow 2^{n+m} = 2^0 \Leftrightarrow m = -n \Rightarrow m = -n \notin \mathbb{N}_0$

Wniosek: półgrupa przemienna z elementem neutralnym

Definicja 1.4.4. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \to A$, $* : A \times A \to A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \ \wedge \ c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedynką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemiennym* lub *komutatywnym*.

	Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna
$\circ \,/\, +$	dodawanie	$* \,/\, \cdot$	mnożenie
$a + b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e = 0$	zero	$e = 1$	jedynka
$a' = -a$	element przeciwny	$a' = a^{-1}$	element odwrotny

	$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}, \ n \in \mathbb{N}$	$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$
	$0 \cdot a = 0$	$a^0 = e = e = 1$
$m \in \mathbb{Z}, m < 0$	$ma = \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{m}$	$a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{n}$

Definicja 1.4.5. Zespół $(K, \circ, *)$ złożony ze zbioru K zawierającego co najmniej dwa elementy i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : K \times K \to K$, $* : K \times K \to K$ nazywamy *ciałem*, jeśli

- $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$),
- $(K \setminus \{e_\circ\}, *)$ jest grupą abelową,
- działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.

Zatem ciało to pierścień przemienny z jedynką (różną od zera, tj. $1 = e_* \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne.

Zatem w ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący:

$$\frac{a}{b} := a * b^{-1}, \quad a, b \in K, \ b \neq 0.$$

Przykład 1.4.6. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych
$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała
$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych

iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

iv) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
$+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem (tzw. ciało reszt modulo p). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Przykład 1.4.7. Zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Definicja 1.4.8. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy *liczbami zespolonymi*.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 2
Data: .....

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow[n\mapsto n]{} \mathbb{Z} \xhookrightarrow[n\mapsto \frac{n}{1}]{} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x\mapsto(x,0)]{h} \mathbb{C}$$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność:
$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$$

łączność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$$
$$[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot x_3, 0 = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia
el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$$
$$= (x_1 x + 3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

Niech $h : \mathbb{R} \to \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$.
Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujmy $i := (0,1)$ tzw. *jednostka urojona*. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y, \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Re}z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Im}z$. Liczby postaci iy, $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_1 \wedge \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2\right)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

$$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \qquad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0,0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$