

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \xrightarrow{n \mapsto n} \mathbb{Z} \xrightarrow{n \mapsto \frac{n}{1}} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto (x,0)]{h} \mathbb{C}$$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z \mathbb{Q} , jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
 Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z \mathbb{R} , jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do \mathbb{R}

$$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$$

\mathbb{C} ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych o współczynnikach z \mathbb{C} należą do \mathbb{C}

Zanurzenie \mathbb{R} w \mathbb{C}

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$
 $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$

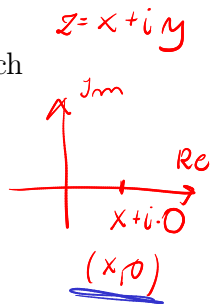
łączność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$
 $[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia

el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem \cdot

rozdzielność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$
 $= (x_1 x_3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to zanurzenie, czyli bijekcja taka, że $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$. *zgodności z działaniami*
Utożsamiamy zbiory \mathbb{R} oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.



Zdefiniujemy $i := (0, 1)$ tzw. *jednostka urojona*. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\text{Re}z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\text{Im}z$. Liczby postaci iy , $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\text{Re}z_1 = \text{Re}z_2 \wedge \text{Im}z_1 = \text{Im}z_2)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

$$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

$$i^2 y_1 y_2 = -y_1 y_2$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \\ x, y \in \mathbb{R}$$

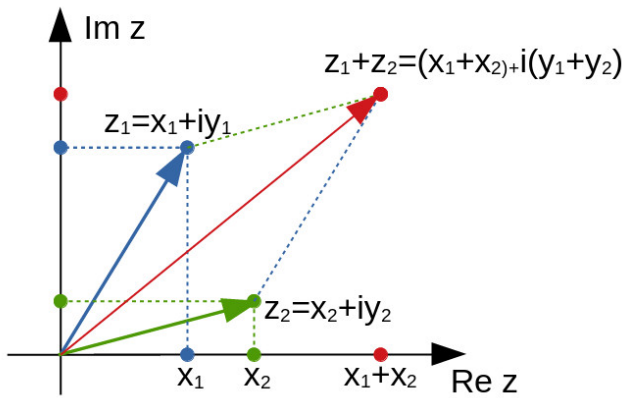
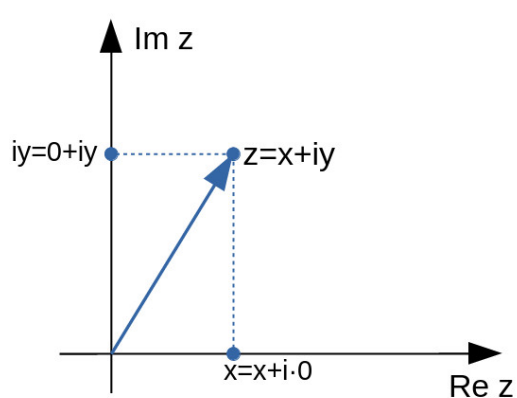
Uwaga 2.1.2. W ciele \mathbb{C} nie można określić porządku liniowego.

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \quad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

$$\bar{z} = x - iy \\ z \cdot \bar{z} = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \\ \text{rzeczywiste} \\ \text{dodatnie} \\ (\text{norma kwadratowa})$$

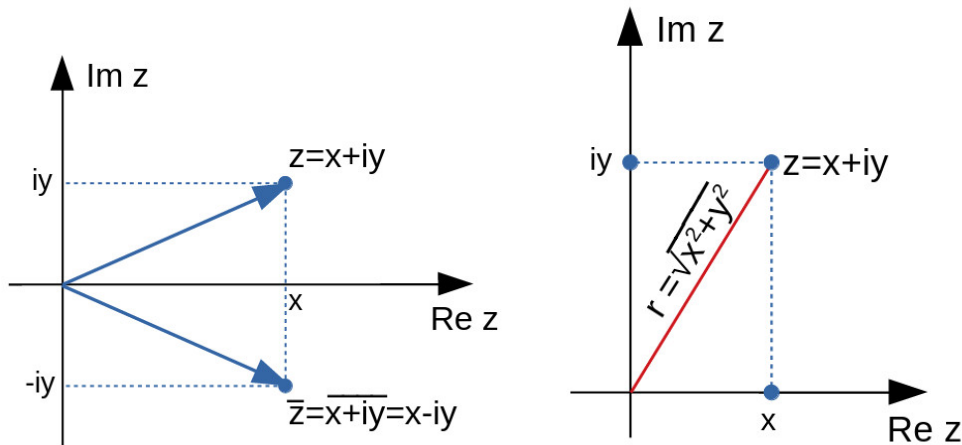
Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0, 0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych \mathbb{C}



Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z . Oznaczamy ją \bar{z} .
- ii) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy modułem liczby z . Oznaczamy ją $|z|$.



$\mathbb{R} : |x| = \begin{cases} x \dots \\ -x \dots \end{cases}$
 $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

 $\mathbb{C} : |z| = 1$

Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2$
- ii) $\operatorname{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- iii) $\overline{\bar{z}} = z$
- iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$
- vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- viii) $\operatorname{Re}z \leq |\operatorname{Re}z| \leq |z|$, $\operatorname{Im}z \leq |\operatorname{Im}z| \leq |z|$
- ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta) $\quad | |z_1| - |z_2| | \leq |z_1 - z_2|$

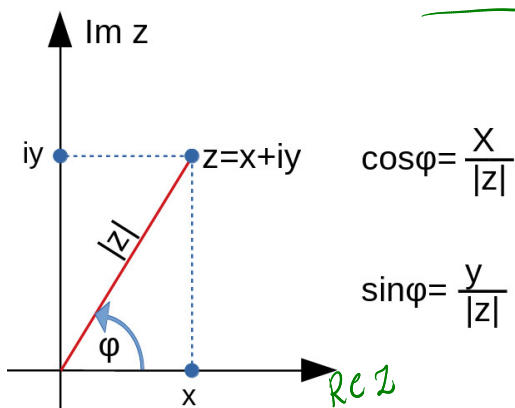
2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej

$$(2+5i)^{66}$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{y}{|z|} \right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



p. trygon.
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z . Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z .

Gdy $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$$z = 7$$

$$z = 7(1 + 0i)$$



$$\varphi = 0 + 2k\pi$$

$$\arg z = 0$$

$$z = 7(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$z = -i$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$z = 1(0 + (-1) \cdot i)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = -1 \end{cases}$$



$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg z = \frac{3}{2}\pi$$

$$-i = 1(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$$

$$z = -\sqrt{27} - 3i$$

$$|z| = \sqrt{27 + 9} = 6$$

$$z = 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

III ćw

$$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,$$

$$\arg z = \frac{7}{6}\pi$$

$$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Wówczas:

- i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$,
- ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$,
- iii) $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ tzw. wzór de Moivre'a

$$z^2 = z \cdot z = |z|^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

Przykład 2.2.3. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right)$$

$$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} &= 2^{10} (\cos(\frac{140}{12}\pi) + i \sin(\frac{140}{12}\pi)) = 2^{10} (\cos(\frac{35}{3}\pi) + i \sin(\frac{35}{3}\pi)) = \\ &= 2^{10} (\cos(12\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(12\pi - \frac{\pi}{3})) = 2^{10} (\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 2^{10} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\ &= 2^9 (1 - \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

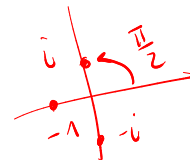
Twierdzenie 2.2.4 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
 Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0$ lub $k = -1$)

ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0$ lub $k = -1$)

iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$



Przykład 2.2.5. $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\arg(-1) = \pi$ $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$

$i = (-1) \cdot (-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z .

Przykład 2.2.6. a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

b) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

najpiękniejszy wzór w matematyce

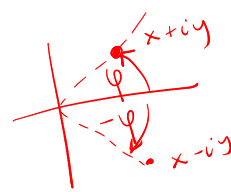
Twierdzenie 2.2.7. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

- i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$, $e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,
- ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,
- iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,
- iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $|e^{i\alpha}| = 1$.

$r = |z|$

Wniosek 2.2.8. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

- i) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\alpha+\beta)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha-\beta)}$,
- ii) $z^k = r^k e^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,
- iii) $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.



Wzory Eulera

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$

Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

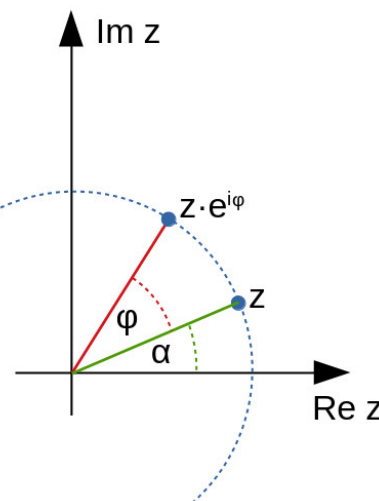
$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Obrót o kąt φ

$z = re^{i\alpha}$

$z \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$

$e^{i\varphi} = 1 \cdot e^{i\varphi} = 1 \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
 $|z| \cdot 1 = |z|$



2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby w*.

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

I sposób:
postać wykładnicza

II sposób:
postać algebraiczna

III sposób:
postać algebraiczna

? $z = |z|e^{i\varphi}, w = 8 + 6i$
 $|z|^2 e^{2i\varphi} = w$
 $|w| = 10$
 $w = 8 + 6i = 10(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5})$
 $\varphi = \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi$
 $|z| = \sqrt{10}$
 $\varphi_k = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + k\pi$
 $z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k}, k \in \{0, 1\}$

$8^2 + 6^2 = 100$
 $\sqrt{100} = 10$

$z = x + iy, w = 8 + 6i$
 $z^2 = w$
 $(x + iy)^2 = 8 + 6i$
 $x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$
 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$
 $y \neq 0$ (gdy $y = 0$, to $z = x, x^2 \neq 8 + 6i$)
 $x = \frac{3}{y}, \frac{9}{y^2} - y^2 = 8$
 $y^4 + 8y^2 - 9 = 0, \Delta = 100$
 $y^2 = 1, y = \pm 1$
 $z = 3 + i \vee z = -3 - i$

$8 + 6i = \sqrt{9} + 6i - \sqrt{1} =$
 $= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 =$
 $= (3 + i)^2$
 $z = 3 + i \vee z = -3 - i$

Wzór składowo mnożenia

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$X^m - 15 = 0$ $z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$

$k = n$
 $\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, wówczas

$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Otrzymujemy $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $\alpha_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1.$ □

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}.$ Zbiór!

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Obliczamy $|w| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Zatem

$z^5 = w \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases} / :5$

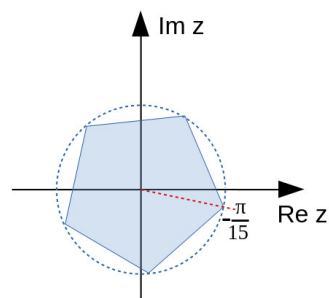
Stąd $\rho = \sqrt{2}, \alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Wzór składowo mnożenia

$\sqrt[5]{w} = \sqrt[5]{\sqrt{8} - i\sqrt{24}} = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby z_0, z_1, \dots, z_{n-1} będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n -kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

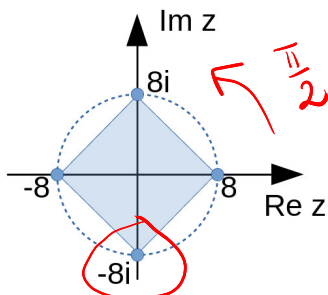
Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3 . Będą one wierzchołkami kwadratu.

$$z^4 = ((\sqrt{3} - i)^3)^4$$

Niech $z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$.

Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

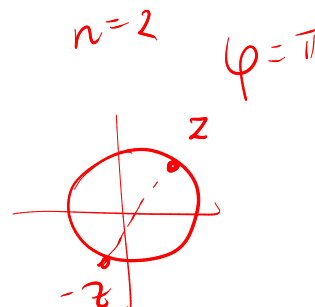
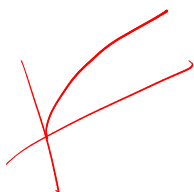
$$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad z_3 = z_2 \cdot i = -8$$



Handwritten notes:
 $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$
 $z_1 = z_0 \cdot i$

Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w \mathbb{R} i w \mathbb{C}

w \mathbb{R}	w \mathbb{C}
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$



Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n .

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy pierwiastkiem wielomianu W , jeżeli $W(z_0) = 0$.

Handwritten notes:
 $X^n = a$
 $X^n - a = 0$

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout). Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Definicja 2.3.9. Niech $k \in \mathbb{N}$. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W* , jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z - 1) - (z - 1) = (z - 1)(z^2 - 1) = (z - 1)^2(z + 1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w \mathbb{C} .

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w \mathbb{C} , licząc z krotnościami.

Trójmian kwadratowy $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.
Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2, \sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.
Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Twierdzenie 2.3.14. Niech $k \in \mathbb{N}$. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$0 = (z - 1)(z^2 - 2z + 4) = (z - 1)[(z - 1)^2 + 3] = (z - 1)[(z - 1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] =$
 $= (z - 1)(z - 1 - \sqrt{3}i)(z - 1 + \sqrt{3}i)$ - (-3) - (3i^2)
 rozwiązania $z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i, \quad \bar{z}_2 = z_3$

Schemat Hornera

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2 + i)z^3 + (7 + 2i)z^2 + (12 + i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$$(z - 2i)(z^3 + (2 + 3i)z^2 + (1 + 6i)z + 3i) = 0$$

$$(z - 2i)(z + 1)(z^2 + (1 + 3i)z + 3i) = (z - 2i)(z + 1)^2(z + 3i) = 0$$

rozwiązania $z_1 = 2i, z_2 = z_3 = -1, z_4 = -3i$

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)|$$

Handwritten notes:
 $z_1 = 3$
 $r = 5$
 $|2 - 3| = 5$

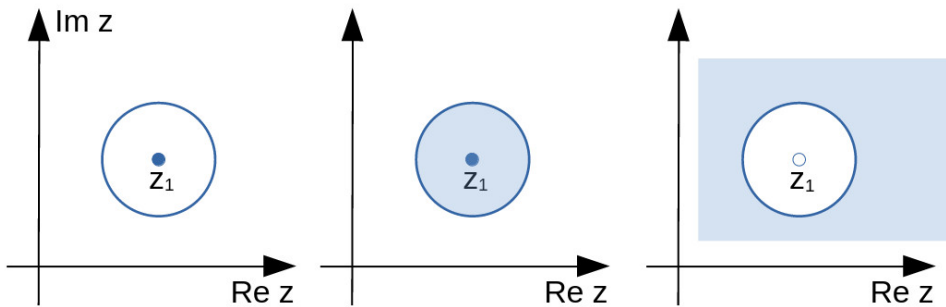
2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

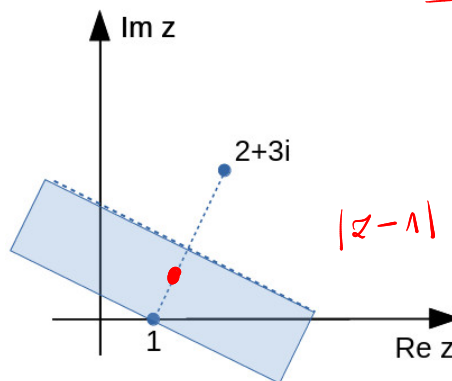
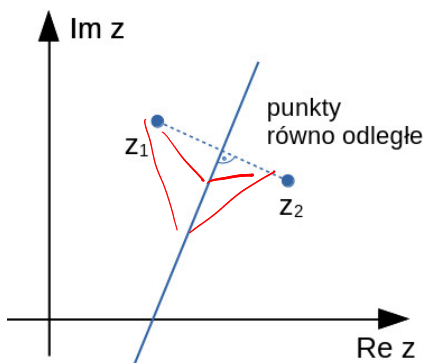
$|z - z_1| = r$ okrąg

$|z - z_1| \leq r$ koło

$|z - z_1| \geq r$ zewnętrzne koła



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2



Handwritten note: ustalony

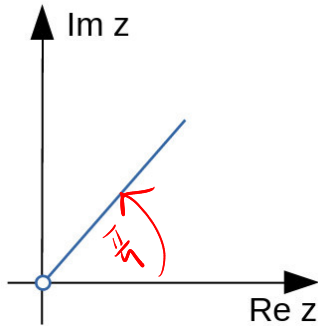
$$|z - i| = |z - 3|$$

$$|z - 1| < |z - 2 - 3i|$$

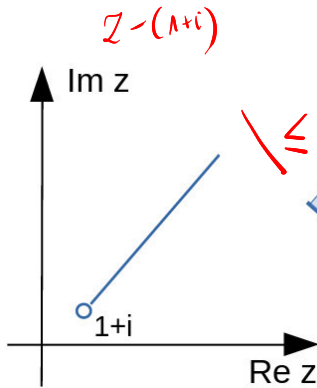
4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

Przykład 2.4.1.

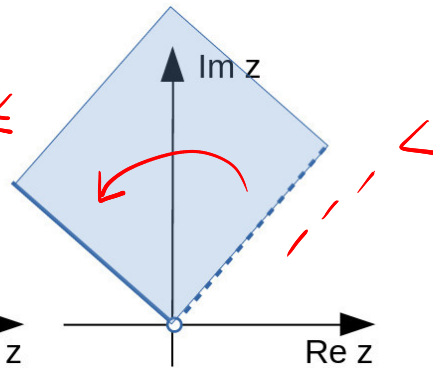
$\arg z = \frac{\pi}{4}$



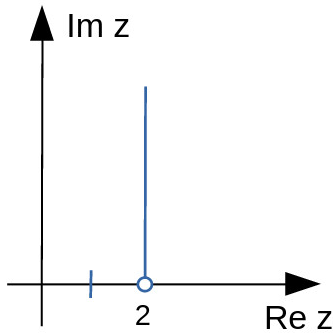
$\arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$



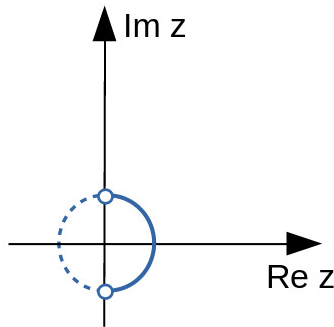
$\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$



$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}$



$\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$



5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i] \cdot [x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2 - xyi + xi + xyi + xi + y^2 - 1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \operatorname{Im} w > 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

$w = \operatorname{Re}(w) + i \cdot \operatorname{Im}(w)$

$w = a + bi$
 $a = \operatorname{Re}(w)$
 $b = \operatorname{Im}(w)$
 $a = ?$
 $b = ?$

