

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m \times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nazywamy *i -tym wierszem* macierzy A , zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ nazywamy *j -tą kolumną* macierzy A .

Oznaczmy symbolem $M_{m \times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K . Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n* .

Dla $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
 $A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{macierz zerowa wymiaru } m \times n$$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

- diagonalną lub przekątniową, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$
- trójkątną górną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$
- trójkątną dolną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:

$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n

$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n $T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$

$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
 $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
 $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m \times p}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{p \times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
 $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$
Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-razy}}$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
 $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n \times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB , BA , D^2 .

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = AB \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{schemat Falka} \quad \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array} \quad \mathbf{1} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

$$G = BA \in M_3(\mathbb{R}) \quad \begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 4 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \quad AB \neq BA$$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$$CD \in M_2(\mathbb{R}), \quad DC \in M_2(\mathbb{R}), \quad CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}, \quad CD \neq DC$$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m \times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $A + B = B + A$
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$
- iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m \times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemianną z jedyneką.

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\text{tr}(A)$.

Przykład 3.1.12. $\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ ii) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

iii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ iv) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m \times n}(K)$, to wówczas $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

- a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$
- b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)^T\right] = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. \square

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antisymetryczna

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy B_{ij} , dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{array} \right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$ stojące w i -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}$ stojące w j -tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1}a_{11}\det B_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det B_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix} \quad - \left[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2 \right] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K .

i) *Minorem elementu a_{ij}* nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A . Oznaczamy go symbolem M_{ij} .

ii) *Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}* nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2}M_{23} = 17$$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$,
(rozwinięcie względem i -tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}$.
(rozwinięcie względem j -tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rozwijamy względem czwartej kolumny,}$$

a potem względem ostatniego wiersza.

$$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$$

$$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$$

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k -tą kolumnę macierzy A , czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i) $\det A = \det(A^T)$
- ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.
- iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.
- iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$
- v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.
- vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.
- vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K : A_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.
- viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A , to wyznacznik nie zmieni się.
- ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array} \right],$$

gdzie B_1, B_2, \dots, B_n są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, a $?$ dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_n$.

Wniosek 3.2.10. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

- ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$
- iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne: $w_i \leftrightarrow w_j$ zamiana wierszy miejscami
 $\lambda \cdot w_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$ pomnożenie wiersza przez liczbę
 $w_i + \lambda \cdot w_j, \lambda \in K$ dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.11.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \stackrel{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{w_3 - w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{-\frac{1}{3} \cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

3.3 Macierz odwrotna

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1} .

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0 \wedge c = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zatem nie istnieje A^{-1} .

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy *macierzą odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy *macierzą osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją *macierzą nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D .

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemianną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową*.

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. Za pomocą definicji

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a - b & 5a + 2b \\ 3c - d & 5c + 2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 1 \\ 5a + 2b = 0 \\ 3c - d = 0 \\ 5c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij} . Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+i} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

$$[A|I] \xrightarrow[\text{tylko na wierszach!}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa \longrightarrow macierz trójkątna górna $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\begin{aligned}
 [A|I] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{w}_2 \text{ na koniec}]{-\frac{1}{2}w_3} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4+w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_4} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2+w_3} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-2w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
 \text{Zatem } A^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze A^{-1} , A^T , AB , αA , A^r również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

- i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
- iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$
- v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- vi) $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$

Twierdzenie 3.3.11. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną

postaci $A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}$, to A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy

odwracalne są macierze B_1, B_2, \dots, B_k . Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} \end{bmatrix}$.