Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 3
Data: ....

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

3.1 Macierze i ich własności

Ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $f(n)=a_n\in\mathbb{R}$
$a_1, a_2, a_3, \ldots$

Niech $K=\mathbb{R}$ lub $K=\mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\to K$, $A(i,j)=a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K=\mathbb{R}$, zespoloną gdy $K=\mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

$m \uparrow$ $\quad \rightarrow n$

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

matrix

Ciąg $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m=n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A\in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n.*

$m\times n$

Dla $A,B\in M_{m\times n}(K)$, $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ mamy
$A=B \Leftrightarrow \forall i\in\{1,2,\ldots,m\}\ \forall j\in\{1,2,\ldots,n\}\ a_{ij}=b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A\in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2\\ 3 & -3 & 4 & 4\\ 5 & -5 & 6 & -6\end{bmatrix}$

$$B\in M_3(\mathbb{R}),\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

przekątna
diagonala

$$\mathbf{0}_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0\\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$$ macierz zerowa wymiaru $m\times n$

$A\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$A+0=A$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ ← nr wiersza i ≠ nr. kolumny j

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n $\qquad T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

diagonalne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

L U

lower
upper triangular

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ wyraz za wyrazem
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1)\cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$. $= A + (-1)\cdot B$
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
  $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$

odpowiada złożeniu odwz.

- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

zmienia wymiar

$c_{12} = a_{21}$

1 wiersz → 1 kolumna
2 wiersz - 2 kolumna

$C + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

Przykład 3.1.5.

2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2×3   3×2

$A \cdot B \in M_{2\times 2}$

$B \cdot A \in M_{3\times 3}$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

3×2   3×2

B

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array} \qquad 1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)$$

A

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 4 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

B

$AB \neq BA$

$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

A   2×3

C   2×2

$CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$CD \in M_2(\mathbb{R}),\ DC \in M_2(\mathbb{R}),\ CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix},\ DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix},\ CD \neq CD$$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $A + B = B + A$ przemienność   "+" wyraz za wyrazem

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączność

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$ el. neutralny m dodawania macierzy

dodaw. liczb

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ rozdzielność

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

$-A$ el. przeciwny

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ mieszana łączność

liczb   skalar · macierz

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

ust. wymiar

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

jak składanie $f \circ g$

nieprzemienne!

i) $(AB)C = A(BC)$ łączność

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

rozdzielność !

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

el. neutralny

I

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

ust.

$BI = ?$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}$$

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

$r = 2$
$(A^2)^T = (A \cdot A)^T$
$= A^T \cdot A^T = (A^T)^2$

+ indukcja

$A \cdot B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
2×5 5×2

$B^T \cdot A^T \in M_{2\times 2}$
2×5 5×2

$(AB)^T \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

kwadratowa

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\text{tr}(A)$.

trace

Przykład 3.1.12. $\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ ii) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

iii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ iv) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(BA^T)$.

$\text{tr}(C) = \text{tr}(C^T)$

$\text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) =$
$= \text{tr}(B^T \cdot (A^T)^T)$
$= \text{tr}(B^T \cdot A)$

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$ $\quad A^T = [a_{ji}]$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$ $\quad a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} = 0$

symetria wzgl. przekątnej głównej $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 10 \\ 3 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy B_{ij}, dla $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

definiujemy tylko dla macierzy kwadratowych

$K = \mathbb{R} \lor K = \mathbb{C}$

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

liczba

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$ $\quad A = [5]$
- gdy $n \ge 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

$a_{12} = 2 \quad A_{12} = [7]$

$a_{11} = 1 \quad A_{11} = [8]$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad (-1)^2 \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \cdot \det A_{12}$

$\det A = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 7$ $\quad 1 \cdot 1 \cdot 8 - 1 \cdot 2 \cdot 7$

macierz

liczba (wyznacznik)

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinant

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \overbrace{\det B_{11}}^{D_{11}} + \overbrace{(-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12}}^{D_{12}} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{array} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$-\Big[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2\Big] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$ $\qquad b_{32} = -6$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $\quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

mamy wybór

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$,

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwijamy względem czwartej kolumny, a potem względem ostatniego wiersza.

D_{54}

$$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$$

ćw. (met. Sarrusa)

$$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonalna

$$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$$

$5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$

el. nad przekątną

Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k-tą kolumnę macierzy A, czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$. A_1

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

$\det A = 3$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$\det B = 15 - 6 = 9$

$3 \cdot 3$

$\det A = \det B + \det C$

$A \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

i) $\det A = \det(A^T)$

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$. $k_1 \longleftrightarrow k_5$ (zamienię miejscami)

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$. kolumny proporcjonalne

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K: \ A_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$. $k_5 = 2 \cdot k_1 - 3 \cdot k_2 + 7 k_3 - k_4$

!

viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A, to wyznacznik nie zmieni się.

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. tw. Cauchy'ego

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array}\right],$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, a ? dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \ldots \cdot \det B_n$.

Wniosek 3.2.10. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

$\det A = \det A^T$

$A \in M_n(K)$

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

np. $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = (\det A) \cdot (\det A) = (\det A)^2$ ← dowód ind.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

(między sobą)

Operacje elementarne:

zmieniają wyzn.	$w_i \leftrightarrow w_j$	zamiana wierszy miejscami
	$\lambda \cdot w_i,\ \lambda \in K, \lambda \neq 0$	pomnożenie wiersza przez liczbę
	$w_i + \lambda \cdot w_j,\ \lambda \in K$	dodanie do w_i wielokrotności w_j — nie zmienia wyzn.

Przykład 3.2.11.

[ ] macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad w_1 \leftrightarrow w_2$$

macierze się zmieniają

det

wyzn. bez zmian

2 2 10 2

$$\det A \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_4-w_1 \\ w_3-3w_1}}{\overset{w_2-2w_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3-w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$-20-(-17)$

$$\overset{-\frac{1}{3}\cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_4+5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

3.3 Macierz odwrotna

m. kwadratowa

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1}.

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$A \cdot A^{-1} = I_2$

$$AA^{-1} = I \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ c = 0 \wedge \ \ c = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zatem nie istnieje A^{-1}.

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

(jako d-symet. do działania)

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

koniec

$a_{ij} \longrightarrow D_{ij}$