Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 4
Data: ....

TEMAT: *Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K.

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

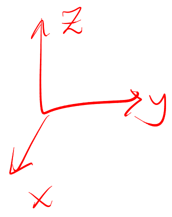
Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi* Jeśli $b_1 = \ldots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jesli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

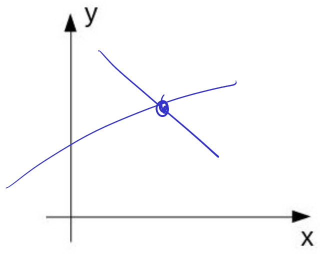
Przykład 4.1.1.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

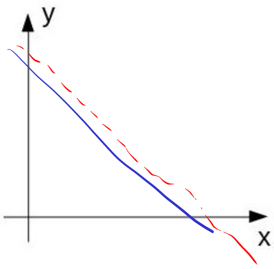
$Ax + By + Cz + D = 0$



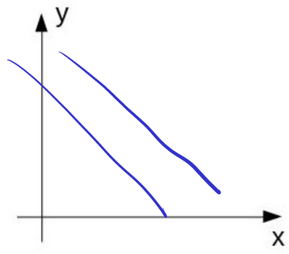
$$\left\{\begin{array}{rcr} x - y & = & 3 \\ 2x + y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x + y & = & 5 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array}\right.$$



układ oznaczony



układ nieoznaczony



układ sprzeczny

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX =$

B, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$A \cdot X = B$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

tyle samo równań co niewiadomych

4.2 Układy Cramera

macierz kwadratowa

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera.*

$A \cdot X = B$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera). Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \ \Leftrightarrow \exists\ A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. ☐

$A^{-1} \,/\, AX = B$

$\underbrace{\underbrace{A^{-1} A}_{I} X}_{} = A^{-1} B$

$X = A^{-1} \cdot B$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

$W = \det A$

$W_x \quad W_y \quad W_z$

$\det A_1 \quad A_2 \quad A_3$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

Dowód. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} D^T B = \frac{1}{\det A} [D_{ji}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$

Stąd $x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} b_i D_{ij} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$ ☐

$n = m = 2$

Przykład 4.2.4.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$ układ jest układem Cramera

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$\frac{1}{\det A}$ mel. dop. alg

A^D

$X = A^{-1}B$, $A^{-1} = ?$

$\det A = 16$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \underbrace{\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}$, $x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{7}{16}$

Wzory Cramera:

$W = \det A = 16 \neq 0$, $W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22$, $W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$,

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}$, $y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$

Wniosek 4.2.5. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.2.6.

Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

choć jeden

Uwaga 4.2.7. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

wszystkie

$n = m$ A - kwadratowa → $\det A$

$n \neq m$ $A \in M_{m \times n}(K)$ nie jest kwadrat. → rząd macierzy $r(A)$

4.3 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Rząd macierzy

Definicja 4.3.1. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. *Minorem stopnia* k macierzy A, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.3.2. *Rzędem macierzy* $A \in M_{m\times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\operatorname{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

wyznacznik

Przykład 4.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3,\quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0,\ r(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$\cdot 3$

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ r(B) = 1,$$ Można zauważyć, że $k_2 = 3k_1$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2,\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ ale } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(C) = 2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3,\ w_2 = 2w_1,\ w_3 = 3w_1,\ r(D) = 1$$

Twierdzenie 4.3.4 (Własności rzędu macierzy)**.** Niech $A \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

!

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Definicja 4.3.5. Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.3.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

te zera

4 schodki — 3 schodki — to nie postać schodkowa

Np. $n = m = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 1 \cdot 7 \cdot 0 = 0$

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątna górną nieosobliwą. ☐

Przykład 4.3.8.

r[ ] = r[ ]

[ ] ≠ [ ]

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

$r(D) \leq 4$

rank

„rz”

$$D \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1\\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4+w_2]{w_3+2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix},\quad r(D) = 3$$

$\xrightarrow{w_4-w_3} [0\ 0\ 0\ 0\ 0]$

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \in M_{m\times(n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

(nie jest sprzeczny tzn - ozn lub nieozn)

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego)**.** Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Wniosek 4.3.10. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny. (kontrapozycja)

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 4.3.11.

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 5 \\ 4x + y + 7z &= 8 \\ 5x + 2y + 8z &= 4 \end{cases}$$

$A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$U \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$

$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right]$, $r(A) \leq 3$, $r(U) \leq 3$

ćw

$\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, zatem $r(A) = 2$

$r(A) = 2$

$$U \xrightarrow[w_3-5w_1]{w_2-4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$r(U) = 3$

$r(U) = 3 \neq r(A) \ \Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

$r(A) > r(U)$ niemożliwe

$r(A) \leq r(U)$ zawsze

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M. Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M, przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładnej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \ldots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$.

Przykład 4.3.12.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 1 \end{cases}$$

$x + y + 2z$

$2z = x + y$

$$U = [A|B] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right] \end{array}, \ r(A) \leq 3, \ r(U) \leq 3$$

$$U \xrightarrow[\textit{zmienne}\ \mathbf{y}\ \ \mathbf{x}\ \ \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+5w_1]{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ \cancel{0} & \cancel{14} & \cancel{2} & \cancel{36} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rr|r|r} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$7x + z = 18$

$14x + 2z = 36$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ minor niezerowy}$$

$\det U \neq 0$ param

$$\begin{cases} -y + 2x = 7 - 3z \\ 7x = 18 - z \end{cases} \text{lub} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

układ nieoznaczony, rozwiązania
$$\begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$A \cdot X = B$ $\qquad$ $U = [A|B]$

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

$0 \cdot x + 0y + 0z = 0$

$x + y = 10$

~~$2x + 2y = 20$~~

$x - z = 5$ $\qquad$ $-z + x = 5$

$\alpha \neq 0, \alpha \in K$

$x - y = 3 \mid \cdot \alpha$

$\alpha x - \alpha y = 3\alpha$

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

A' $\qquad$ B'

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny. Ost. równanie sprzeczne

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

n − liczba niewiad.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

$n - r$ liczba parametr.

Przykład 4.3.13.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$r(A) = 2$ $\qquad$ $r(U) = 3$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{}^{A}} & B \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

3×4

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

Przykład 4.3.14.

5×5

$$\begin{cases} 2x+4y+9z-5t+6u &= 13\\ x+2y+4z-4t+2u &= 5\\ 3x+6y+7z-11t+2u &= 18\\ 4x+8y+19z-15t+11u &= 20\\ -\frac{1}{2}x-y+z+3t+2u &= -\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$U=\left[\begin{array}{ccccc|c} 2&4&9&-5&6&13\\ 1&2&4&-4&2&5\\ 3&6&7&-11&2&18\\ 4&8&19&-15&11&20\\ -\frac{1}{2}&-1&1&3&2&-\frac{5}{2}\end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2\leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&4&-4&2&5\\ 2&4&9&-5&6&13\\ 3&6&7&-11&2&18\\ 4&8&19&-15&11&20\\ 1&2&-2&-6&-4&5\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-4w_1\\ w_5-w_1}]{\substack{w_2-2w_1\\ w_3-3w_1}}$$

$w_5=-2\cdot w_4$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&4&-4&2&5\\ 0&0&1&3&2&3\\ 0&0&-5&1&-4&3\\ 0&0&3&1&3&0\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{-6}&\cancel{-2}&\cancel{-6}&\cancel{0}\end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2 \text{ za } k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&4&-4&2&2&5\\ 0&1&3&2&0&3\\ 0&-5&1&-4&0&3\\ 0&3&1&3&0&0\end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

$w_3=-2\cdot w_4$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&4&-4&2&2&5\\ 0&1&3&2&0&3\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{16}&\cancel{6}&\cancel{0}&\cancel{18}\\ 0&0&-8&-3&0&-9\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&4&-4&2&2&5\\ 0&1&3&2&0&3\\ 0&0&8&3&0&9\end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\ z\ u\ t\ y}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

$/\cdot(-1)$

wyznacz parametry

minor niezerowy

$1\cdot 1\cdot 3\neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1&4&2&-4&2&5\\ 0&1&2&3&2&3\\ 0&0&3&8&0&9\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1&4&2&-4&2&5\\ 0&1&2&3&2&3\\ 0&0&1&\frac{8}{3}&0&3\end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1&4&0&-\frac{28}{3}&2&-1\\ 0&1&0&-\frac{7}{3}&0&-3\\ 0&0&1&\frac{8}{3}&0&3\end{array}\right]$$

$/:3$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1&0&0&0&2&11\\ 0&1&0&-\frac{7}{3}&0&-3\\ 0&0&1&\frac{8}{3}&0&3\end{array}\right]$$

x z u t y

równoważny układ $\begin{cases} x+2y=11\\ z-\frac{7}{3}t=-3\\ u+\frac{8}{3}t=3\end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x=11-2y\\ z=-3+\frac{7}{3}t\\ u=3-\frac{8}{3}t\\ y,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ ← parametry

$r(A)=r(U)=3<n=5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5-3=2$ parametrów

Uwaga 4.3.15. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.3.16. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x-3y+z-2s+t=-5\\ 2x-6y-4s+t=-10\\ 2z+t=0\end{cases}$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&1&-2&1&-5\\2&-6&0&-4&1&-10\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{w_2-2w_1}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&1&-2&1&-5\\0&0&2&0&1&0\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\to\begin{array}{cccccc}x&y&z&s&t&\\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&1&-2&1&-5\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right]\qquad r:=r(A)=r(U)=2,\ n=5,\ n-r=3\text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3}=10$ sposobów.
Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1,k_3	$\{y,s,t\}$
k_1,k_5	$\{y,z,s\}$
k_2,k_3	$\{x,s,t\}$
k_2,k_5	$\{x,z,s\}$
k_4,k_3	$\{x,y,t\}$
k_4,k_5	$\{x,y,z\}$
k_3,k_5	$\{x,y,s\}$

7 możliwych

Uwaga 4.3.17. W przypadku gdy układ równań $AX=B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U=[A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$r(A)=r=n$

$$[A|B]\xrightarrow[\textbf{na}\quad\textbf{wierszach}]{operacje\quad elementarne}[I|X]$$

$\det A\neq 0$

Przykład 4.3.18.

$$\begin{cases} x+y+z&=&3\\ 2x-y-z&=&0\\ x+3y+z&=&5\end{cases}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&-1&0\\1&3&1&5\end{array}\right]\xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-3&-6\\0&2&0&2\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1-w_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\cancel{2}\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]1$$

!

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x=1,\ y=1,\ z=1$

$x=2$
$y=1$
$z=1$

Przykład 4.3.19. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4-w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\textit{zmienne}\ \mathbf{x_2\,x_3\,x_1\,x_4}]{k_1\ za\ k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

4 schodki

Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
4-3=1
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.