Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 6
Data: ....

$K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$

TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, zaś $V \neq \varnothing$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,

suma w V

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

rozdzielność

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

suma w K

iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$ mieszana łączność

v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$ unitarność (1 - el. neutralny mnożenia w ciele K)

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K-liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami*.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

$n=3$ dowolny

$\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-razy}}$

i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$
Dla $u = [u_1, \ldots, u_n], v = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n]$.

ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało
Dla $u = [u_1, \ldots, u_n], v = [v_1, \ldots, v_n] \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
$u \oplus v = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]$, $\alpha \odot u = [\alpha \cdot u_1, \ldots, \alpha \cdot u_n]$.

$K \times \ldots \times K$
$\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$

dodawanie funkcji w $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
dodawanie wartości funkcji (w $\mathbb{R}$)

iii) $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Dla $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
$f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$
Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stale równa zero.

$n=1$
K $\odot$ $\cdot$
$\oplus$ $+$

iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

ustalonego wymiaru

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V, zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K. Wówczas:

liczba — wektor zerowy

$\mathbb{O}$ $\vec{v}$ $\bar{v}$

i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \lor v = \mathbf{0})$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$

iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$

v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$

vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

rozdzielność

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V.

$\tilde{f} := f|_{[0,1)}$

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami $\oplus|_{U\times U} : U\times U \ni (u,v) \mapsto \boxed{u \oplus v \in U}$, $\odot|_{K\times U} : K\times U \ni (\alpha, v) \mapsto \boxed{\alpha \odot v \in U}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K, to $U = (U, \oplus|_{U\times U}, K, \odot|_{K\times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V.

$\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\varnothing \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \land \alpha \odot u_1 \in U$$

wewnętrzność

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w druga stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V. $\square$

$\mathbf{0}$ el. neutr. $\oplus$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V. Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

bo to jest podprz.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \ \wedge \ \alpha \odot u_1 \in U$. W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. □

wewn.

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V. Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

!

kontrapozycja

Przykład 6.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$ $(V, \oplus, K, \cdot)$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

TAK U jest podprzestrzenią liniową V, bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcja ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \ - \ \textit{parzysty}\}$ deg f stopień degree

U **nie** jest podprzestrzenią liniową V. Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f+g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f + g \notin U$.

nieparzysty

+ nie jest wewnętrzne

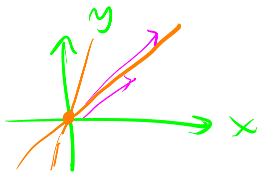
iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V. Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas
$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$
oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$ TAK

Tw. 6.1.6

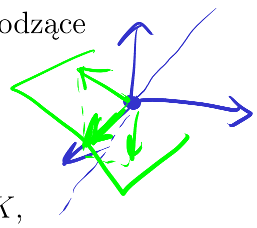
iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq n\}$.
Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V.

$y = a \cdot x$ $\boxed{b = 0}$ $\mathbb{R}$



Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0,0)$.
Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0,0)$.



6.2 Liniowa niezależność wektorów

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$, $v_1, \ldots, v_m \in V$. Niech $W \neq \varnothing$ będzie podzbiorem zbioru V.

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \ldots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$.

$\emptyset \neq W \subset V$

iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k \,:\, \alpha_1, \ldots \alpha_k \in K;\ w_1, \ldots, w_k \in W;\ k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W, nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\mathrm{lin}_K W$ lub krótko $\mathrm{lin} W$.

span W

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ piszemy też $\mathrm{lin}\{w_1, \ldots, w_m\}$.
Czyli $\mathrm{lin}\{w_1, \ldots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m :\ \alpha_1, \ldots \alpha_m \in K\}$.

mogą być zera

Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\varnothing \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\mathrm{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W.

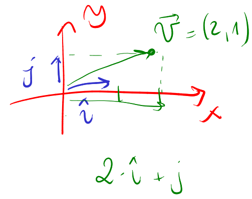
$v_1 = \frac{u}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} v_m$

Wniosek 6.2.3. Jeśli $u = \overset{\neq 0}{\lambda_1} v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$, $|:\lambda_1$ dla pewnych $v_1, \ldots, v_m \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \mathrm{lin}\{u, v_2, \ldots, v_m\}$

$\mathrm{lin}\{u, v\} = \mathrm{lin}\{u+v, v\}$

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\mathrm{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\mathrm{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W.

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{i} = (1, 0)$ oraz $\hat{j} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$.



Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

Definicja 6.2.6. Wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$ nazywamy *liniowo niezależnymi* lub mówimy, że tworzą *układ liniowo niezależny*, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ zachodzi

$$\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_m = 0.$$

choć jedno $\beta_i \neq 0$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy *liniowo zależnymi*.

Twierdzenie 6.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \ldots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

!

$\Leftrightarrow$

Twierdzenie 6.2.8. Wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A, której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \ldots, v_k$, jest równy n.

Wniosek 6.2.9. Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

$\operatorname{lin}\{u,v,w\} \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^3$

Przykład 6.2.10. Czy wektory $u = (1,1,-1)$, $v = (2,1,0)$, $w = (5,2,2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$$\underbrace{(x,y,z)}_{b} = \alpha\underbrace{(1,1,-1)}_{u} + \beta\underbrace{(2,1,0)}_{v} + \gamma\underbrace{(5,2,2)}_{w} = (\alpha+2\beta+5\gamma, \alpha+\beta+2\gamma, -\alpha+2\gamma)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Niewiadomymi są α, β, γ

$b = (x,y,z)$

$(5,7,1)$

Wektory generują $\mathbb{R}^3$, jeśli powyższy układ jest oznaczony.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 2 & 7 & z+x \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_2]{w_3+2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 1 & 3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+2y+z \end{array}\right]$$

Układ oznaczony, posiada rozwiązanie $\gamma = -x+2y+z$, $\beta = x-y-3\gamma = 4x-7y-3z$, $\alpha = x-2\beta-5\gamma = -2x+4y+z$. Zatem układ wektorów u,v,w generuje $\mathbb{R}^3$.

TAK

Przykład 6.2.11. Czy układ $\{A,B,C\}$ jest układem liniowo niezależnym?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) = V$$

Sprawdzamy, czy dowolna kombinacja zerowa jest trywialna.

Niech $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Stąd $\begin{bmatrix} \alpha-\beta & -\alpha \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha-\beta = 0 \end{cases}$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$

komb. trywialna

Zatem macierze A,B,C tworzą układ liniowo niezależny.

żaden z elementów A, B, C nie jest komb. liniową pozostałych

Przykład 6.2.12. Czy wektory $u = (1,2,3,4)$, $v = (1,2,0,-1)$, $w = (0,1,3,1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

komb. liniowa zerowa

Niech $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$.

wektor zerowy w $\mathbb{R}^4$

Stąd $(\alpha+\beta, 2\alpha+2\beta+\gamma, 3\alpha+3\gamma, 4\alpha-\beta+\gamma) = (0,0,0,0)$.

Wektory u,v,w będą liniowo niezależne, gdy powyższy układ jednorodny ma jedyne rozwiązanie $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-3w_1 \\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}w_4]{-\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$\Rightarrow r(U) = r(A) = n = 3$

Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ jest oznaczony. Zatem wektory u,v,w są liniowo niezależne.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

jedyne rozw. ukł. ozn. jednor. to rozw zerowe

Obserwacja: Badanie liniowej niezależności wektorów w $\mathbb{R}^n$ polega na wyliczaniu rzędu macierzy, której kolumnami są podane wektory. Wektory są liniowo niezależne, gdy rząd macierzy równy jest liczbie wektorów.

Wniosek 6.2.13. Niech $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $k > n$, to wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne. Równoważnie, jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq n$.

Twierdzenie 6.2.14. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.

$\alpha \cdot v = 0$

$\alpha \cdot \mathbf{0} = 0$

$\not\Downarrow$

$\alpha = 0$

$\{a, b, c, d, e\}$

ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.

iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.

iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

Definicja 6.2.15. Niech $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci

$$W_{f_1,\ldots,f_n}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą Wrońskiego* układu funkcji $f_1, \ldots, f_n$, a jej wyznacznik *wrońskianem.*

Twierdzenie 6.2.16. Niech $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Jeśli wrońskian układu funkcji $f_1, \ldots, f_n$ nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{R}$, tzn. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W_{f_1,\ldots,f_n}(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Przykład 6.2.17. Zbadaj, czy funkcje $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ tworzą układ liniowo niezależny w $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

Tak, tworzą układ liniowo niezależny.

6.3 Baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś $b_1, \ldots, b_n \in V$.

Definicja 6.3.1. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ nazywamy *bazą* przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \text{lin}\{b_1, \ldots, b_n\}$. "minimalny" zb. generatorów

Uwaga 6.3.2. Baza przestrzeni wektorowej jest maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni.

Przykład 6.3.3. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Wnioski

Układ wektorów $\{e_1, \ldots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

generowanie $k \geq m$

Wniosek 6.3.4. Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to wówczas $k = n$.

lin. niezal $k \leq m$

RAZEM $k = m$

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy wniosków 6.2.9 oraz 6.2.13. $\square$

Przykład 6.3.5. Wskaż bazę podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli
$U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\}$.

Podane generatory na pewno nie tworzą bazy U, gdyż układ 5 wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest liniowo zależny.

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{4\times5} \leq 4 \neq 5$$

$W_2 - W_1$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{T} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{-5} & \cancel{0} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{lin. niezal}} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$\det(\ ) = -(1\cdot(-1)\cdot(-1)) \neq 0$

$3 \;\Rightarrow\; U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)\}$
Układ wektorów $(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)$ jest bazą przestrzeni U (porównaj wniosek 6.2.3).

$\text{lin}\{u, v\} = \text{lin}\{u+v, v\} = \text{lin}\{5u, v\}$

Twierdzenie 6.3.6. i) Każda przestrzeń wektorowa różna od $\{\mathbf{0}\}$ posiada bazę.

ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej skończenie wymiarowej są równoliczne. Jeśli baza danej przestrzeni liniowej jest nieskończona, to każda inna jej baza także jest nieskończona.

iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

dimension

Definicja 6.3.7. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy *wymiarem przestrzeni wektorowej* V i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest *n-wymiarowa*. Jeśli żaden skończony układ wektorów nie tworzy bazy przestrzeni V, to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Wniosek 6.3.8. i) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

ii) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.

iii) W przestrzeni liniowej n-wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

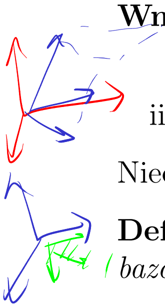
Jeśli znam z góry wymiar $\dim V = n$ i mam układ n wektorów to by spraw. czy to baza

Przykład 6.2.10 - raz jeszcze
Wiemy, że wektory $u = (1,1,-1)$, $v = (2,1,0)$, $w = (5,2,2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wystarczy spr. jeden z warunków z def. bazy

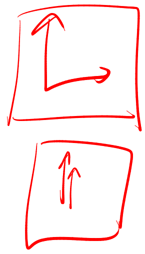
Wniosek 6.3.9. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}), v_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}), \ldots, v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\boxed{\det[v_{ij}] \neq 0}$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 6.2.8 oraz 6.3.8 iii). □



Wniosek 6.3.10. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.



Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 6.3.11. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \ldots, b_n)$ nazywamy *reperem bazowym* lub *bazą uporządkowaną*.

Często mówimy po prostu o *bazie*, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

$\mathbb{R}^3$ $\hat{i} = [1,0,0]$
$\hat{j} = [0,1,0]$
$\hat{k} = [0,0,1]$

$\vec{v} = [1,2,3]$
$1 \cdot \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B}_k^n = \Big(e_1, \ldots, e_n\Big), \text{ gdzie } e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)$$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}_k^n = \Big(1, x, x^2, x^3, \ldots\Big), \qquad \dim \mathbb{R}[x] = \infty, \qquad p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_s \cdot x^s$$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\quad \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

$$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}_k^n = \Big(1, x, x^2, \ldots, x^n\Big), \qquad \dim \mathbb{R}[x] = n+1$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_n[x]$ mamy $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$.

polynomial

4) $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}_k^n = \Big(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{mn}\Big), \text{ gdzie } E_{kl} = [e_{ij}^{kl}], \text{ zaś } e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (k,l) \\ 0 & (i,j) \neq (kl) \end{cases}$$

$\dim M_{m\times n}(K) = m \cdot n$

$\dim_{\mathbb{R}} M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$

Przykład 6.3.12. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 6.3.13. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.

$\varphi : V \to W$ liniowe
$\operatorname{Im}(\varphi) \subset W$ podprzestrzeń W
$\dim W = \dim \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow W = \operatorname{Im}\varphi$
$\dim \operatorname{Im}\varphi < \dim W \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subsetneq W$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ jej bazą uporządkowaną. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 6.3.14. Skalary $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \ldots \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

Przykład 6.3.15. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b_1', b_2', b_3')$ inna baza, gdzie $b_1' = (4, 2, 1)$, $b_2' = (-5, 2, 3)$, $b_3' = (1, 3, 0)$

Skalary $4, 2, 1$ to współrzędne b_1' w bazie kanonicznej.
UMOWA: Piszemy $b_1' = (4, 2, 1)$ zamiast $b_1' = [4, 2, 1]_{\mathcal{B}_k^3}$. dla bazy kanonicznej
Ponadto $b_1' = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$.

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczymy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.
Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b_1' + \beta b_2' + \gamma b_3'$. Otrzymujemy
$v = (-3, 15, 7) = \alpha(4, 2, 1) + \beta(-5, 2, 3) + \gamma(1, 3, 0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$.
Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ, należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

układ oznaczony

$\mathcal{B}'$ baza $\Rightarrow \det[\ldots] \neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_2]{-1 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow v = [1, 2, 3]_{\mathcal{B}'}$$

$v = 1 \cdot b_1' + 2 \cdot b_2' + 3 \cdot b_3'$
$= [-3, 15, 7]_{\mathcal{B}_k^3}$
$= (-3, 15, 7)$

"stara" baza "nowa" baza

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ jej dwiema bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\begin{array}{l} b_1' = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \ldots + \alpha_{n1}b_n \\ b_2' = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{n2}b_n \\ \ldots \\ b_n' = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \ldots + \alpha_{nn}b_n \end{array}.$$

$b_1', \ldots, b_n' \in V$

$b_1' = [\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}]_{\mathcal{B}}$

Definicja 6.3.16. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

w kolumnach współrz. wektorów z nowej bazy wzgl. starej bazy

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $\boxed{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

$\det P \neq 0$

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 6.3.17. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x_1', \ldots, x_n']_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$.

$X = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot X'$

$\det P \neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1}$

$\boxed{X' = P^{-1} \cdot X}$

Przykład 6.3.15 - ciąg dalszy
$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b_1', b_2', b_3')$ inna baza, gdzie $b_1' = (4, 2, 1), b_2' = (-5, 2, 3), b_3' = (1, 3, 0)$

Wyznaczymy współrzędne wektora $v = (-3, 15, 7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.

$P = P_{\mathcal{B}_k^3\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $X' = P^{-1}X = ?$.

Wyznaczamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy

$$X' = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$9 + 15 + 70 = 94$

dim $\mathbb{R}_2[x]=3$ 3 elementy czy lin. zal.?

$3 = r\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ niezal. $b_1=(1,1,0)_{\mathcal{B}_k}$

Zb. wielomianów stopnia ≤ 2 $\mathcal{B}_k=(1,x,x^2)$

dim $\mathbb{R}_2[x]=3$

Przykład 6.3.18. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy $\mathcal{B} = (\underbrace{1+x}_{b_1}, \underbrace{x+x^2}_{b_2}, \underbrace{1+x^2}_{b_3})$, $\mathcal{B}' = (\underbrace{1}_{b_1'}, \underbrace{1+x}_{b_2'}, \underbrace{1+x+x^2}_{b_3'})$. Wyznaczmy macierz $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

$b_1' = 1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1+x)+\beta_1(x+x^2)+\gamma_1(1+x^2) = \underbrace{(\alpha_1+\gamma_1)}_{1}+\underbrace{(\alpha_1+\beta_1)}_{0}x+\underbrace{(\beta_1+\gamma_1)}_{0}x^2$

Stąd $\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 = 1 \\ \alpha_1+\beta_1 = 0 \\ \beta_1+\gamma_1 = 0 \end{cases}$ i ostatecznie $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$.

Łatwo zauważyć, że $1+x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1,0,0]_{\mathcal{B}}$. $= \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]_{\mathcal{B}}$

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1+x+x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$

i otrzymujemy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 6.3.19. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

i) $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$,

ii) $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$.

zawsze det $P \neq 0$

$\exists P^{-1}$

w zadaniach

$\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B}' \arrow[d, "P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}"] \\ \mathcal{B}_k^n \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{B}'' \end{tikzcd}$$

wymaga rachunków

$\overbrace{P_{\mathcal{B}_k^n \to \mathcal{B}'}}^{\text{łatwo}} \cdot \overbrace{P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}}^{?} = \underbrace{P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}''}}_{\text{łatwo wypisać}}$

$P^{-1}_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}''}$