

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

## 7.1 Odwzorowania liniowe i ich podstawowe własności

Niech  $V = (V, +, K, \cdot)$  oraz  $W = (W, \oplus, K, \odot)$  będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem  $K$ .

**Definicja 7.1.1.** Odwzorowanie  $\varphi : V \rightarrow W$  spełniające warunki

- i) własność addytywności  $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$
- ii) własność jednorodności  $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$ ,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.

**Twierdzenie 7.1.2.** Niech  $\varphi : V \rightarrow W$ . Wówczas następujące warunki są równoważne.

- i)  $\varphi$  jest liniowe
- ii)  $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$
- iii)  $\forall v_1, \dots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$   
 $\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących  $V$  w  $W$  oznaczamy  $\mathcal{L}_K(V, W)$  lub  $Hom_K(V, W)$  (lub krótko  $\mathcal{L}(V, W)$  lub  $Hom(V, W)$ , gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

**Uwaga 7.1.3.** Często notujemy  $V = (V, +, K, \cdot)$  oraz  $W = (W, +, K, \cdot)$ , to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach  $V$  i  $W$ , mimo że są to różne działania.

**Przykład 7.1.4.** Czy  $\varphi$  jest liniowe?

1)  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = ax$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych  $\alpha \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mamy

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x) &= a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x) \text{ oraz} \\ \varphi(x_1 + x_2) &= a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2).\end{aligned}$$

2)  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = ax + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  ustalone

Jeśli  $b \neq 0$ , to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem

$$\varphi(1 + 1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a + b) + (a + b) = 2a + 2b.$$

3)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , symetria względem osi  $Ox$

Ponieważ  $\varphi(x, y) = (x, -y)$ , zatem dla dowolnych  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y) \text{ oraz}$$

$$\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2).$$

Odwzorowanie jest liniowe.

4)  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.

$$L = \varphi(\alpha(x, y, z)) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$$

$$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - y + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$$

Na ogół  $L \neq P$ . Możemy podać kontrprzykład

$$\varphi(5 \cdot (1, 0, 0)) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$$

**Uwaga 7.1.5.** i) Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  takie, że  $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ .

ii) Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$  takie, że  $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$ .

**Przykład 7.1.6.** Czy odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ , dane wzorem  $\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$ , dla dowolnego  $p \in \mathbb{R}_2[x]$ , jest liniowe?

Sprawdzimy, że  $\varphi$  jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.

Dla dowolnych  $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$  mamy

$$\begin{aligned} \varphi(p+q)(x) &= (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)(p''(x)+q''(x)) + 4(p'(x)+q'(x)) = \\ &= ((3-x)p''(x) + 4p'(x)) + ((3-x)q''(x) + 4q'(x)) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x), \end{aligned}$$

dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$ . Zatem  $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ .

Dla dowolnych  $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$  mamy

$$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha \cdot p''(x) + 4\alpha \cdot p'(x) = \alpha \cdot ((3-x)p''(x) + 4p'(x)) = \alpha \cdot \varphi(p)(x). \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}. \text{ Zatem } \varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p).$$

Niech  $V = (V, +, K, \cdot)$  oraz  $W = (W, \oplus, K, \odot)$ .

**Twierdzenie 7.1.7.** Jeśli odwzorowanie  $\varphi : V \rightarrow W$  jest liniowe, to wówczas

- i)  $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ ,
- ii)  $\forall v \in V \varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

**Wniosek 7.1.8.** Niech  $\varphi : V \rightarrow W$ . Jeśli  $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$ , to  $\varphi$  nie jest liniowe.

**Przykład 7.1.9.** Odwzorowanie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 5$  nie jest liniowe, bowiem  $f(0) = 5 \neq 0$ .

**Definicja 7.1.10.** Odwzorowanie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$  nazywamy:

- i) *monomorfizmem*, jeśli  $\varphi$  jest injekcją,
- ii) *epimorfizmem*, jeśli  $\varphi$  jest surjekcją,
- iii) *izomorfizmem*, jeśli  $\varphi$  jest bijekcją,
- iv) *endomorfizmem*, jeśli  $V = W$ ,
- v) *automorfizmem*, jeśli  $V = W$  i  $\varphi$  jest bijekcją,
- vi) *formą liniową*, jeśli  $W = K$ .

**Twierdzenie 7.1.11.** Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem  $K$ . Niech  $(b_1, \dots, b_n)$  będzie bazą przestrzeni  $V$  oraz niech  $w_1, \dots, w_n \in W$  będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  takie, że  $\varphi(b_i) = w_i$ , dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Uwaga 7.1.12.** Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej  $V$  wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni  $V$ .

**Przykład 7.1.13.** Podaj wzór odwzorowania liniowego  $\varphi$ , jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej  $\mathbb{R}_2[x]$  bazą standardową jest  $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ . Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

Stąd  $\varphi(x) = 4$ ,  $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$ ,  $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$ .

Dowolny  $p \in \mathbb{R}_2[x]$  jest postaci  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , dla pewnych  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Zatem  $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$ .

## 7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ .

**Definicja 7.2.1.** i) Zbiór  $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$  nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego  $\varphi$  i oznaczamy  $\text{Ker}\varphi$ .

ii) Zbiór  $\{w \in W : \exists v \in V \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$  nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego  $\varphi$  i oznaczamy  $\text{Im}\varphi$  lub  $\varphi(V)$ .

**Uwaga 7.2.2.** Dla dowolnego odwzorowania liniowego  $\varphi : V \rightarrow W$  zbiory  $\text{Ker}\varphi$  oraz  $\text{Im}\varphi$  są niepuste.

*Dowód.* Ponieważ  $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ , zatem  $\mathbf{0}_V \in \text{Ker}\varphi$  oraz  $\mathbf{0}_W \in \text{Im}\varphi$ .  $\square$

**Twierdzenie 7.2.3.** Dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  zbiór  $\text{Ker}\varphi$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ , zaś zbiór  $\text{Im}\varphi$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $W$ .

Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $K$ .

**Twierdzenie 7.2.4.** Dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i)  $\varphi$  jest injekcją  $\Leftrightarrow \text{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ ,

ii)  $\varphi$  jest surjekcją  $\Leftrightarrow \text{Im}\varphi = W$ .

**Definicja 7.2.5.** Jeśli  $\dim \text{Im}\varphi < \infty$ , to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego  $\varphi : V \rightarrow W$  i oznaczamy  $r(\varphi)$  lub  $\text{rank}(\varphi)$ .

**Twierdzenie 7.2.6.** (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ . Wówczas

$$r(\varphi) + \dim \text{Ker}\varphi = \dim V.$$

**Wniosek 7.2.7.** Dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  mamy  $\dim \text{Im}\varphi \leq \dim V$ .

**Przykład 7.2.8.**

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz  $\varphi$ , ich bazy i wymiary. Podaj własności  $\varphi$ .

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-w_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-w_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ x = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ker}\varphi = \{(-t, 2t, -3t, t), t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-1, 2, -3, 1)\}$$

Układ  $\{(-1, 2, -3, 1)\}$  jest bazą  $\text{Ker}\varphi$  oraz  $\dim \text{Ker}\varphi = 1$ .

Zatem  $\varphi$  nie jest monomorfizmem. Ponadto

$$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3, \text{ zatem } \varphi \text{ jest epimorfizmem.}$$

Stąd  $\text{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$ . Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

$$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$$

$$\text{Im}\varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Im}\varphi = \text{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ  $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$  jest bazą przestrzeni  $\text{Im}\varphi$ .

$$\text{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \text{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Im}\varphi = \mathbb{R}^3.$$

**Twierdzenie 7.2.9.** Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  będzie injekcją, zaś wektory  $v_1, \dots, v_n \in V$  tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$  również tworzą układ liniowo niezależny.

**Wniosek 7.2.10.** Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$  takimi, że  $\dim V = \dim W = n$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  będzie injekcją, zaś wektory  $v_1, \dots, v_n \in V$  tworzą bazę przestrzeni  $V$ . Wówczas wektory  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$  tworzą bazę przestrzeni  $W$ .

### 7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech  $U, V, W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $K$ .

**Twierdzenie 7.3.1.** Zbiór  $\mathcal{L}(V, W)$  wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ , jest przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ .

**Twierdzenie 7.3.2.** i) Jeśli  $f \in \mathcal{L}(U, V)$  oraz  $g \in \mathcal{L}(V, W)$ , to wówczas  $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$ .

ii) Jeśli  $f \in \mathcal{L}(V, W)$  jest bijekcją, to  $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ .

Oznaczmy przez  $\text{Aut}_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) : f \text{--bijekcja}\}$  zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej  $V$ .

**Wniosek 7.3.3.** Zbiór  $\text{Aut}_K(V)$  wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemianną.

Grupa  $\text{Aut}_K(V)$  bywa też oznaczana symbolem  $GL(V)$  i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej  $V$* .

**Przykład 7.3.4.** Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dane wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$$

jest automorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

## 7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$  oraz  $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$  będą ustalonymi bazami przestrzeni  $V$  i  $W$  odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$ .

**Definicja 7.4.1.** *Macierzą (lub reprezentacją macierzową) odwzorowania liniowego  $\varphi$  w bazach  $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$  nazywamy macierz  $A \in M_{m \times n}(K)$ , której kolejne kolumny to współrzędne wektorów  $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$  w bazie  $\mathcal{B}_W$ . Oznaczamy ją symbolem  $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ .*

**Przykład 7.4.2.** Wyznacz macierz odwzorowania liniowego  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ , gdy rozważamy

a) w  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^2$  bazy kanoniczne

$$\varphi(1, 0, 0) = (3, 0), \varphi(0, 1, 0) = (0, 2), \varphi(0, 0, 1) = (0, 1), \quad M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

b) bazy  $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$ ,  $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

$$\varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) = [\alpha_1, \beta_1]_{\mathcal{C}}, \quad (3, 4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2, \varphi(b_1) = [3, -2]_{\mathcal{C}}$$

$$\varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) = [\alpha_2, \beta_2]_{\mathcal{C}}, \quad (3, 3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3, \varphi(b_2) = [3, -3]_{\mathcal{C}}$$

$$\varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_{\mathcal{C}}, \quad (0, 1) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \varphi(b_3) = [0, 1]_{\mathcal{C}}$$

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Obserwacja:** Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

**Uwaga 7.4.3.** Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas  $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$ .

**Przykład 7.4.4.** Wyznacz macierz odwzorowania liniowego  $f : \mathbb{C}_1[z] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ ,  $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$ , względem baz standardowych danych przestrzeni

$(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$  oraz  $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$ .

Weźmy dowolny  $p \in \mathbb{C}_1[z]$ . Jest on postaci  $p(z) = \alpha z + \beta$ .

Rozważamy bazę  $\mathcal{B} = (1, z)$  przestrzeni  $\mathbb{C}_1[z]$  oraz bazę  $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  przestrzeni  $M_2(\mathbb{C})$ .

$$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$$

$$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2 + i, 1, 3, 4 - i]_{\mathcal{C}}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2, \dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4, \Rightarrow M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4 \times 2}(\mathbb{C}), M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 + i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 - i \end{bmatrix}$$

**Twierdzenie 7.4.5.** Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$  oraz  $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$  będą ustalonymi bazami przestrzeni  $V$  i  $W$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  oraz  $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ . Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie  $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$ ,  $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$ . Wówczas

$$\varphi(v) = w \Leftrightarrow AX = Y.$$

**Uwaga 7.4.6.** Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego  $\varphi$  w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

**Wniosek 7.4.7.** Rząd macierzy  $A$  przekształcenia liniowego  $\varphi$  nie zależy od wyboru baz  $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ . Ponadto  $\text{rank}(\varphi) = \text{rank}A$ .

**Wniosek 7.4.8.** Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.5. Wówczas

i)  $\varphi$  jest epimorfizmem  $\Leftrightarrow r(A) = m$ ,

ii)  $\varphi$  jest monomorfizmem  $\Leftrightarrow r(A) = n$ .

**Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy**

Oblicz  $\varphi(1, 2, 3)$  dwoma sposobami, za pomocą macierzy  $M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$  oraz za pomocą  $M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ . Czy  $\varphi$  jest monomorfizmem /epimorfizmem?

Oznaczmy  $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ .

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie  $\varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$

$$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 0) + 3(0, 0, 1) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3 = [1, 0, 3]_{\mathcal{B}}$$

$$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd  $\varphi(1, 2, 3) = [3, 1]_{\mathcal{C}} = 3c_1 + c_2 = 3(1, 2) + (0, 1) = (3, 7)$ .

Dodatkowo zauważmy, że  $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ , zatem  $\varphi$  jest epimorfizmem.

Ponadto  $\dim \text{Ker} \varphi = 3 - 2 = 1$ , więc  $\varphi$  nie jest monomorfizmem.

Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B}_V$  oraz  $\mathcal{B}_W$  będą ustalonymi bazami. Ponadto niech  $\alpha \in K$ ,  $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$  oraz  $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ ,  $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ .

**Twierdzenie 7.4.9.** Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

**Twierdzenie 7.4.10.** Jeśli  $\dim V = \dim W$ , to wówczas następujące warunki są równoważne.

- i)  $f$  jest izomorfizmem
- ii)  $\text{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$
- iii)  $\text{Im} f = W$
- iv)  $r(A) = \dim V$
- v)  $\det A \neq 0$

**Wniosek 7.4.11.** Niech  $f \in \mathcal{L}(V, W)$  będzie izomorfizmem oraz niech  $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ . Wówczas  $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$ .

**Twierdzenie 7.4.12.** Niech  $U, V, W$  będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$  będą ustalonymi bazami. Ponadto niech  $f \in \mathcal{L}(U, V)$ ,  $g \in \mathcal{L}(V, W)$  oraz  $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$ ,  $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ . Wówczas

$$B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

**Przykład 7.4.13.** Dane są odwzorowania liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (x - 3z, x + y),$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania



$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)$  i oblicz  $\varphi(1, 2, 3)$ .

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy  $h$  jest odwracalne?

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_h := M_h(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h$  jest odwracalne

$$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = (M_h)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}M_{f+g} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x, y, z) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}y - \frac{10}{9}z, \frac{2}{3}x + \frac{32}{9}y - \frac{14}{9}z\right)$$

$$\varphi(1, 2, 3) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1, 2, 3) = \left(-\frac{44}{9}, \frac{112}{9}\right)$$

## 7.5 Zmiana macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz

**Twierdzenie 7.5.1.** Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B}_V$  oraz  $\mathcal{B}_W$  będą bazami przestrzeni  $V$  i  $W$ . Rozważmy nowe bazy  $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$  oraz odwzorowanie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$ . Niech  $P = P_{\mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}'_V}$ ,  $Q = P_{\mathcal{B}_W \rightarrow \mathcal{B}'_W}$  oraz  $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ ,  $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$ . Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

### Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczmy macierz  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$  w bazach  $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$ ,  $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$ .

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = P_{\mathcal{B}_k^2 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Uwaga 7.5.2.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś  $\mathcal{B}$  oraz  $\mathcal{B}'$  jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego  $\text{id} : V \rightarrow V$  przestrzeni  $V$  z bazą  $\mathcal{B}'$  w przestrzeń  $V$  z bazą  $\mathcal{B}$ .

*Dowód.* Niech  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ . Wówczas

$$\begin{cases} \text{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \dots + a_{n1}b_n \\ \dots \\ \text{id}(b'_n) = b'_n = a_{n1}b_1 + \dots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\text{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$