Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 7
Data: ....

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

7.1 Odwzorowania liniowe i ich podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K.

Definicja 7.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \to W$ spełniające warunki

i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(\underbrace{u+v}_{w\ V}) = \varphi(u) \underbrace{\oplus}_{w\ W} \varphi(v)$

ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

zgodność z działaniami

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.

Twierdzenie 7.1.2. Niech $\varphi : V \to W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) φ jest liniowe

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$
$\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

rozumowanie indukcyjne

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $Hom_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $Hom(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

Uwaga 7.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W, mimo że są to różne działania.

Przykład 7.1.4. Czy φ jest liniowe?

$\varphi(x) = ax + b$
$b \neq 0$
nie liniowe
$\varphi(2) = 2 \cdot \varphi(1)$

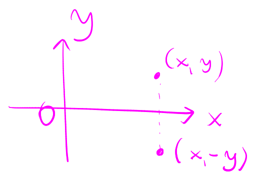
1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych α (β) $\in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in R$ mamy
$\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
$\varphi(x_1 + x_2) \underset{z\ def}{=} a(x_1 + x_2) \underset{rozdz.\ w\ \mathbb{R}}{=} ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

Nie może być translacji

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem
$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b$.



3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\boxed{\varphi(x,y) = (x,-y)}$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y), (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\varphi\big(\alpha(x,y)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y) \overset{\text{wzór}}{=} (\alpha x, -\alpha y) \overset{\text{wł. w } \mathbb{R}^2}{=} \alpha(x,-y) = \alpha\varphi(x,y)$ oraz
$\varphi\big((x_1,y_1) + (x_2,y_2)\big) \underset{+ \text{ w } \mathbb{R}}{=} \varphi(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) = (x_1+x_2, -y_1-y_2) =$
$(x_1,-y_1) + (x_2,-y_2) = \varphi(x_1,y_1) + \varphi(x_2,y_2)$. w $\mathbb{R}^2$
Odwzorowanie jest liniowe. TAK

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.
$L = \varphi\big(\alpha(x,y,z)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$
$P = \alpha\varphi(x,y,z) = \alpha(x - z + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$
Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład
$\varphi\big(5 \cdot (1,0,0)\big) = \varphi(5,0,0) = (5,1) \neq 5 \cdot \varphi(1,0,0) = 5 \cdot (1,1) = (5,5)$

Uwaga 7.1.5. i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x,y) = (ax + by, cx + dy)$.

+ const

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x,y,z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 7.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem
$\varphi(p)(x) = (3-x)p''(x) + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?
+1 −2 −1

Sprawdzimy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.
Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy

pochodna sumy jest suma pochodnych

$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)\Big(p''(x) + q''(x)\Big) + 4\Big(p'(x) + q'(x)\Big) =$
$\Big((3-x)p''(x) + 4p'(x)\Big) + \Big((3-x)q''(x) + 4q'(x)\Big) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$,

Łączność +

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\boxed{\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q).}$
Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$ mamy

Analiza

$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\boxed{\alpha \cdot p''(x)} + 4\boxed{\alpha \cdot p'(x)} = \alpha \cdot \Big((3-x)p''(x) +$
$4p'(x)\Big) = \alpha \cdot \varphi(p)(x)$. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p)$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 7.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, $\quad W: 0_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + 0_V) \underset{add}{=} \varphi(x) + \varphi(0_V)$

ii) $\forall v \in V \ \varphi(-v) = -\varphi(v)$. $\quad \boxed{\alpha = -1}$ jednorodność

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x+3$, $\varphi(0) = 3 \neq 0$ nieliniowe

Wniosek 7.1.8. Niech $\varphi : V \to W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to φ nie jest liniowe.

Przykład 7.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

homomorfizm (morfizm)

Definicja 7.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,

ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,

iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją, $\leftarrow$ i) + ii)

iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$, $\quad \varphi: V \to V$

v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,

vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$. $\quad (V,+,K,\cdot) \to K = (K,+,K,\cdot)$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ $\quad \cdot(x,y)$ $\quad \mathbb{R}^3$

$(x,y) \mapsto (x,y,0)$ monomorfizm injekcja $\quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}$ $\quad (x,y,0)$

na obraz $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\times\{0\}$

Ważne!

Twierdzenie 7.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K. Niech $\mathcal{B}$ $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \ldots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Uwaga 7.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V. $\quad v \in V \quad v = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}} = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n \quad \varphi(v) = \varphi(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n) \underset{\varphi\text{-lin}}{=} \varphi(\alpha_1 b_1) + \ldots + \varphi(\alpha_n b_n) = \alpha_1 \varphi(b_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(b_n)$

$\varphi: V \to W$

Przykład 7.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ, jeśli

$x^2 + x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 = [0,1,1]_{\mathcal{B}}$

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(\underbrace{x^2 + x}_{b_1'}) = 6x + 10, \quad \varphi(\underbrace{x - 1}_{b_2'}) = 4, \quad \varphi(\underbrace{2x}_{b_3'}) = 8.$$

BAZA

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = -2 \neq 0$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

Zadać $\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)$

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

WZÓR φ

7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

V φ W

Definicja 7.2.1. i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Ker}\varphi$. Kernel — przeciwobraz zera

Ker φ

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V\ \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$. zbiór wartość

Image

Uwaga 7.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ zbiory $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\varphi$. □

Twierdzenie 7.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\mathrm{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś zbiór $\mathrm{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.

Ker φ ⊂ V
Im φ ⊂ W

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

Silne! z liniowości

i) φ jest injekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\varphi = W$.

Uzasadnienie: zał. φ nie jest injekcją
$\exists v,u \in V\ u \neq v \wedge \varphi(u) = \varphi(v)$
$0_W = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v) \Rightarrow u - v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\neq 0$

Definicja 7.2.5. Jeśli $\dim \mathrm{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\mathrm{rank}(\varphi)$.

Tw. 6.3.13 Porównać!

Twierdzenie 7.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$\underbrace{r(\varphi)}_{\dim \mathrm{Im}(\varphi)} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker}\varphi}_{\text{nullity}} = \dim V.$$

V → W

Wniosek 7.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim V$.

Przykład 7.2.8.

Np. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5)$ aby było epimorfizmem (surjekcja) $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^5 = 5$ — niemożliwe, $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq 3$

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

liniowe

Wyznacz jądro oraz obraz φ, ich bazy i wymiary. Podaj własności φ.

bo to podprzestrzenie — mono? epi?

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$x(1,1,1) + y(1,-1,1) + z(1,1,-1) + t(2,6,-4)$

poprawić

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ x \quad y \quad z \quad t \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

prosta przechodząca przez 0

$t\cdot(-1,2,-3,1)$

$\mathrm{Ker}\varphi = \{(-t, 2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(-1, 2, -3, 1)\}$ $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{0\} \Rightarrow$ nie injekcja

Układ $\{(-1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.

Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto

I: $r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem φ jest epimorfizmem.   Rank-Nullity thm

II: Stąd $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$ $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$

$3 = \dim \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$.   Porównaj   tw. 6.3.13

$\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

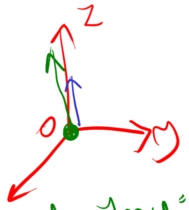
φ - surjekcja, epimorfizm

Twierdzenie 7.2.9. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie $\boxed{\text{injekcją,}}$ zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

bez injektywności FAŁSZ!

Wniosek 7.2.10. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K takimi, że $\dim V = \dim W = n$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni V. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni W.

WW 6.3.8 b/c)



np. Rzut na OXY

$\dim \mathrm{Im}\varphi = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U,V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ $= \{\varphi: V \to W \mid \varphi$ - liniowe$\}$ wraz z działaniami   to samo

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem K. $(\mathcal{L}(V,W), +, \cdot)$

Twierdzenie 7.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.   ← złożenie odwz. liniowych jest odwz. liniowym

$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, $g \circ f$

$K \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} W$

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, U)$. $\exists$

Odwz. odwrotne do liniowego jest liniowe

Oznaczmy przez $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) :\ f-bijekcja\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V.

$V \xrightarrow[1:1]{f} V$

Wniosek 7.3.3. Zbiór $Aut_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

$(Aut_K(V), \circ)$

Grupa $Aut_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej V*.

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}): \det A \neq 0\}$

Przykład 7.3.4. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dane wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Np. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x,y) = \varphi\big(x\cdot(1,0) + y(0,1)\big) = x\,\varphi(1,0) + y\,\varphi(0,1)$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \ldots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$.

dim $V = n$ $\quad$ dim $W = m$

$\varphi(b_1)\ \varphi(b_2) \ldots$

$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ m

$\varphi(b_1) \in W$

$= \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_m c_m$

Definicja 7.4.1. *Macierzą* (lub *reprezentacją macierzową*) *odwzorowania liniowego* φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 7.4.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x, y, z) = (\underbrace{3x}_{u}, \underbrace{2y + z}_{v})$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

obrazy wektorów bazowych

$$\varphi(\overset{i}{1,0,0}) = (3, 0),\ \varphi(0, \overset{j}{1}, 0) = (0, 2),\ \varphi(0, 0, \overset{k}{1}) = (0, 1), \quad M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ $\quad \varphi(x,y,z) = (u,v)$

b) bazy $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1)\big)$

$\varphi(x,y,z) = (3x, 2y+z)$

$\varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) = [\alpha_1, \beta_1]_\mathcal{C}, \qquad (3, 4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$

$\varphi(1,2,0) = (3\cdot 1, 2\cdot 2 + 0)$ w bazie kanonicznej (i, j) $\qquad \Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2,\ \varphi(b_1) = [3, -2]_\mathcal{C} = 3\cdot c_1 - 2\cdot c_2$

$\varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) = [\alpha_2, \beta_2]_\mathcal{C}, \qquad (3, 3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$

$\qquad \Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3,\ \varphi(b_2) = [3, -3]_\mathcal{C}$

$\varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_\mathcal{C}, \qquad \overset{(0,1)}{\cancel{(3, 4)}} = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$

$1\cdot c_2 + 0\cdot c_1 \qquad \Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1,\ \varphi(b_3) = [0, 1]_\mathcal{C}$

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}^n_k, \mathcal{B}^m_k)$.

$v \in \mathbb{C}_1[z]$ $\quad v = \alpha z + \beta$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Przykład 7.4.4. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \to M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 + i & 1 \\ 3 & 4 - i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni

zb. wielomianów o współczyn. z $\mathbb{C}$ i deg ≤ 1 $\quad \mathbb{C}_1[z]$

$\mathbb{R}_n[x]$

$b_2 \quad b_1$

$\alpha(z) + \beta \cdot (1)$

$(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.
Rozważamy bazę $\mathcal{B} = (1, z)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ przestrzeni $M_2(\mathbb{C})$.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f(b_1) = $ $f(1) = \overset{\alpha}{0} \cdot A + \overset{\beta}{1} \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$ $= 1 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{22}$

$\varphi(b_1) = \varphi(1) \quad \varphi(b_2) = \varphi(z)$

$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2 + i, 1, 3, 4 - i]_{\mathcal{C}}$

$1 \cdot z + 0$ $\quad (2+i)E_{11} + E_{12} + 3E_{21} + (4-i)E_{22}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4$, $\Rightarrow$ $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4\times 2}(\mathbb{C})$, $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$

$\| \quad A \quad 4 \times 2$

$\alpha(z) + \beta(1)$

$w = \alpha z + \beta$

$w = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}$

$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = ?$

Twierdzenie 7.4.5. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \ldots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \ldots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \Leftrightarrow AX = Y.$$

Uwaga 7.4.6. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.7. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank} A$.

$\| \ \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$

Wniosek 7.4.8. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.5. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow$ $r(A) = m$, $\quad \dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim W$ surjekcja

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$. $\quad$ iniekcja

$V \xrightarrow{\varphi} W$

$\Downarrow$ $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - r(\varphi) = n - n = 0$

$\dim V = n \quad \dim W = m$

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy
Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$ oraz za pomocą $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Czy φ jest monomorfizmem /epimorfizmem?

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\varphi(1,2,3) = ?$ $\quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = ?$

Sprawdzenie $\varphi(1,2,3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3,7)$

$\varphi(x,y,z) = (3x, 2y+z)$

w bazie kanon.

$(1,2,3) = 1(1,2,0) + 3(0,0,1) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3 = [1,0,3]_\mathcal{B}$

$$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\varphi(1,0,3) = [3,1]_\mathcal{C}$ $\quad \varphi(1,2,3) = (3, 4+3)$

Stąd $\varphi(1,2,3) = [3,1]_\mathcal{C} = 3c_1 + c_2 = 3(1,2) + (0,1) = (3,7)$.

$A' \cdot [\ ]_\mathcal{B} = [\ ]_\mathcal{C}$

Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.
Ponadto $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Twierdzenie 7.4.9. Przy powyższych założeniach

$V \xrightarrow{f,\ g} W$

$$M_f(\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W) + M_g(\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W) = A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 7.4.10. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

Hom. $\quad$ m

i) f jest izomorfizmem

ii) $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\mathrm{Im} f = W$

iv) $r(A) = \dim V$ $\quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

v) $\det A \neq 0$ $\quad$ (bijekcja) $\iff \det A \neq 0$, $\exists A^{-1}$

$V \xrightarrow{f} W$, $W \to V$

Wniosek 7.4.11. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

$\dim V = \dim W$

Twierdzenie 7.4.12. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$M_g \circ M_f = B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, $\quad U \xrightarrow{g \circ f} W$ ← liniowe

Przykład 7.4.13. Dane są odwzorowania liniowe
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z)$,
$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - 3z, x + y)$,
$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y, x - y)$.
Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f,\ g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$, $\quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h^{-1}} \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f+g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h^{-1}} \mathbb{R}^2$

$f(1,0,0) = (1,0)$

$f(0,1,0) = (0\cdot 1+0,\ 2\cdot 1+0)$

$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f+g)$ i oblicz $\varphi(1,2,3)$.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ \Rightarrow\ M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ \ M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ \Rightarrow\ M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ \ M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \qquad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Czy h jest odwracalne?

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \Rightarrow\ M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}),\ \ M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det M_h = -3 \neq 0 \ \Rightarrow\ h$ jest odwracalne (h izomorfizm)

$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \qquad M_{h^{-1}} = \big(M_h\big)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f+g)$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ \Rightarrow\ M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),$

$2h^{-1}$

$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}^2 M_{f+g} = \frac{2}{9}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{h^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{h^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{f+g} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$

$2M_{h^{-1}}$

$\varphi(x,y,z) = ?$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \varphi(x,y,z) = (\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}y - \frac{10}{9}z, \frac{2}{3}x + \frac{32}{9}y - \frac{14}{9}z)$

$\varphi(x,y,z) = ?$

$\varphi(1,2,3) = ?$

$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \varphi(1,2,3) = (-\frac{44}{9}, \frac{112}{9})$

7.5 Zmiana macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W. Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \to \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \to \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

$AX = Y$

$PX' = X$

$QY' = Y$

$Y = QY'$

$AX = APX'$

$Y' = Q^{-1}APX'$, A'

$B_V \xrightarrow{P} B'_V$, $V \xrightarrow{\varphi} W$, $B_W \xrightarrow{Q} B'_W$

Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczymy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z) = (3x, 2y + z)$ w bazach $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,0), b_2 = (1,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,2), c_2 = (0,1)\big)$.

już zrobione

$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$ $\qquad A' = Q^{-1}AP$

$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \end{array}, \ Q = P_{\mathcal{B}_k^2 \to \mathcal{C}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ c_1 \ \ c_2 \end{array}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ $M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$

Uwaga 7.5.2. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\mathrm{id} : V \to V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

$(V, \mathcal{B}') \to (V, \mathcal{B})$

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases} \mathrm{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \ldots + a_{n1}b_1 \\ \ldots \\ \mathrm{id}(b'_n) = b'_1 = a_{n1}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = M_{\mathrm{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \qquad \square$$

$\varphi = \mathrm{id}$

$\varphi(b'_1) = \mathrm{id}(b'_1) = b'_1$

$= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots$