Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Metody algebry liniowej w fizyce
Wykład nr 8
Data: ....

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi*.

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, K, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

Dowód. i), ii) Wynikają z twierdzeń 7.3.1 oraz 7.3.2. iii) Wynika z odpowiednich związków dla macierzy odwzorowań $f, g, f \circ g, \alpha f, \alpha g$. $\square$

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko φ*-niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \; \varphi(u) \in U.$$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : \; t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.
Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ-niezmiennicza.

2) Niech V, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \mathrm{Ker}\varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem U jest φ-niezmiennicza.

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$, czyli $\varphi|_U \in End(U)$.

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V. Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ wynika, że $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$, gdzie $A_1 \in M_k(K), A_2 \in M_{n-k}(k), B \in M_{k\times(n-k)}(K), 0 \in M_{(n-k)\times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \to U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in End(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in K$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

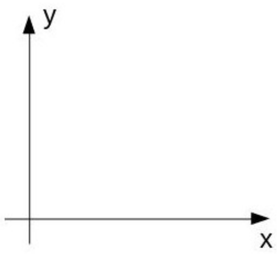
ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

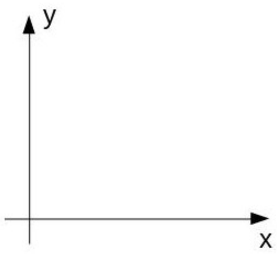
iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Przykład 8.1.5. Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

Uwaga 8.1.6. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Przykład 8.1.7. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ.
Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$





Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ.
Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ, uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Twierdzenie 8.1.8.

i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ-niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Definicja 8.1.9. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ, odpowiadającą wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.10. Na mocy uwagi 8.1.6 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i}, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.11. Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in K$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Wniosek 8.1.12. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\mathcal{B}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.1.13. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

Definicja 8.1.14. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ.

Uwaga 8.1.15.

i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała K to wartości własne endomorfizmu φ.

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.13 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 8.1.16.

i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in K[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A.

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy *wartością własną* macierzy A. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $Spec(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.17. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ (lub $\varphi \in End(\mathbb{C}^n)$) są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ (odpowiednio $A \in M_n(\mathbb{C})$), będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (odpowiednio $\mathbb{C}^n$).

Niech V będzie przestrzenią liniową n-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

Definicja 8.1.18. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ.

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ.

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi.* Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym.*

Twierdzenie 8.1.19. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V. Wówczas

i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$,

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$.

Przykład 8.1.20. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^3_k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste
$E_{\lambda_3} = E_{-1} =?$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 3y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}$$

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$E_{-1} = \{(0, 0, z) :\ z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(0, 0, 1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$
Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.19 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.19 i) mamy

$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2}. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.21. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $A \in M_n(K)$, $\lambda \in Spec(A)$ oraz niech $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\lambda^k \in Spec(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k.

ii) $c{\cdot}\lambda \in Spec(c{\cdot}A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c \cdot \lambda$.

iii) $p(\lambda) \in Spec\big(p(A)\big)$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$.

iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in Spec(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$.

v) $Spec(A) = Spec(A^T)$

vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin Spec(A)$.

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$, $Spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Wówczas

i) $\det(A) = \chi_A(0) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,

ii) Jeśli $\lambda \in Spec(A)$, ale wielomian charakterystyczny χ_A macierzy A ma współczynniki rzeczywiste, to $\overline{\lambda} \in Spec(A)$. Ponadto wektor $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$ taki, że $\overline{w_i} = v_i$ jest wektorem własnym odpowiadającym $\overline{\lambda}$.

iii) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

iv) $r(A)$ jest sumą krotności niezerowych wartości własnych.

8.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

i) Jeśli φ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V.

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

iii) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \ldots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ. Dokładniej mówiąc, $\varphi \in End(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele K (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$
Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ.

Uwaga 8.2.6. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że każdy operator liniowy na zespolonej przestrzeni liniowej ma wektory własne.

Macierz diagonalizująca

Definicja 8.2.7. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ *są podobne*, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Twierdzenie 8.2.8 (o niezmiennikach macierzy podobnych)**.** Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

i) $r(A) = r(B)$,

ii) $\det A = \det B$

iii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

Jeżeli $\varphi \in End(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ zmiany bazy przestrzeni V.

Definicja 8.2.9. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *diagonalizowalną*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A.

Wniosek 8.2.10. Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A.

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Przykład 8.2.11. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.12. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5.$

Wielomian charakterystyczny to wielomian zespolony o współczynnikach rzeczywistych. Posiada zatem dwa sprzężone pierwiastki zespolone.

Mamy $\chi_A(t) = (t - \frac{3-\sqrt{11}i}{2})(t - \frac{3+\sqrt{11}i}{2})$. Macierz zespolona A jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.13. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,1,1) = (-1,-1,-1)$, $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,0,2)$ jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne

$\lambda_1 = -1, v_1 = (1,1,1),\ \lambda_2 = 1, v_1 = (0,1,1),\ \ \lambda_3 = 2, v_1 = (0,0,1).$

Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.14. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem

$\varphi(x,y,z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$
$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$
$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}$, $k_1 = 3$
$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : (A+I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$
$$\dim E_{-1} = 3 - r(A+I) = 3 - r \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq k_1 = 3.$$
Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

Przykład 8.2.15. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$
$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-$$
$t)^2\big((1-t)^2 - 1\big) = (2-t)^2(t^2 - 2t) = -t(2-t)^3$
$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 3$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$

Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ 2d & = 0 \end{cases}$$

Zatem $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \operatorname{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}$, $O_{2\times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \ldots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = \big(v_1 \ldots, v_n\big)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P. Oblicz $\varphi^{101}(1, 2, 3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$Spec\varphi = \{\lambda_1 = 1 \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1,\, k_2 = 2, \quad \dim E_1 = 1, \quad 1 \le \dim E_2 \le 2$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

$$\dim E_2 = 3 - r(A - 2I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$$(A - I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$

$E_1 = \{(-2z, -2z, z) :\, z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(-2, -2, 1)\}$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A - 2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x,\ x, y \in \mathbb{R}$

$E_2 = \{(x, y, y - x) :\, x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \big(v_1 = (-2, -2, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, 1)\big)$

$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczymy $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D. Niech $v := (1, 2, 3) = [a, b, c]_{\mathcal{C}}$.

Wówczas $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, skąd $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $v = [2, 5, 6]_{\mathcal{C}}$.

$$D^{101}\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{101}&0\\0&0&2^{101}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\cdot 2^{101}\\6\cdot 2^{101}\end{bmatrix}$$
$\varphi^{101}(v)=[2,5\cdot 2^{101},6\cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}}=2v_1+5\cdot 2^{101}v_2+6\cdot 2^{101}v_3=$
$=(-4+5\cdot 2^{101},-4-6\cdot 2^{101},2+2^{101})$

METODA II: Obliczamy
$$A^{101}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=PD^{101}P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-2&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{101}&0\\0&0&2^{101}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\3&-2&2\\2&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}3\cdot 2^{101}-2&2-2^{102}&2^{102}-2\\2^{102}-2&2-2^{101}&2^{102}-2\\1-2^{101}&-1+2^{101}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+5\cdot 2^{101}\\-4-6\cdot 2^{101}\\2+2^{101}\end{bmatrix}$$

Relacje rekurencyjne

Niech $K=\mathbb{R}$ lub $K=\mathbb{C}$.

Definicja 8.3.3. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zdefiniowanym następująco
i) $a_1=r_1,a_2=r_2,\ldots,a_k=r_k,$ gdzie $r_1,r_2,\ldots,r_k\in K$, $k\geq 1$.
ii) $a_n=p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\ldots+p_ka_{n-k},$ gdzie $p_1,p_2,\ldots,p_k\in K$, $p_k\neq 0$, $n\geq k+1$.
Równanie ii) nazywamy *jednorodną liniową relacją rekurencyjną rzędu k*, zaś równania i) nazywamy *warunkami początkowymi rekurencji.*

Niech $X_n=[a_n,a_{n-1},\ldots,a_{n-k+1}]^T$. Wówczas powyższy układ równań można zapisać w postaci
$$\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\\\vdots\\a_{n-k+1}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}p_1&p_2&p_3&\ldots&p_k\\1&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\&\ldots&&\ldots&\\0&0&&1&0\end{bmatrix}}_{A_k}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\\a_{n-3}\\\vdots\\a_{n-k}\end{bmatrix},$$
czyli $X_n=A_kX_{n-1}$, dla $n\geq k+1$.

Zauważmy, że $X_n=A_kX_{n-1}=A_k^2X_{n-2}=A_k^3X_{n-3}=\ldots=A_k^{n-k}X_k$, czyli
$$\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\\\vdots\\a_{n-k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1&p_2&p_3&\ldots&p_k\\1&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\&\ldots&&\ldots&\\0&0&&1&0\end{bmatrix}^{n-k}\begin{bmatrix}r_k\\r_{k-1}\\r_{k-2}\\\vdots\\r_1\end{bmatrix}.$$

OBSERWACJA: Aby znaleźć wzór ogólny a_n, należy wyznaczyć potęgę macierzy A_k. Jeśli A_k jest diagonalizowalna, możemy wykorzystać metodę z poprzedniego przykładu.

Przykład 8.3.4. Znajdziemy n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie $a_1 = 0, a_2 = 8$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

Otrzymujemy układ $\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Diagonalizujemy macierz $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Obliczamy $\det(A_2 - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$.
$Spec(A_2) = \{-1, 3\}$ widmo proste, macierz diagonalizowalna
Wybieramy bazę wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = -1$.
$(A_2 + I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = (-1, 1)$
Rozważmy $\lambda_2 = 3$.
$(A_2 - 3I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = (3, 1)$
Macierz diagonalizująca to $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Stąd
$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1} \\ 2 \cdot (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$
Zatem $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1}$.

8.4 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie 8.4.1 (Cayleya-Hamiltona)**.** Każda macierz kwadratowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Przykład 8.4.2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wiemy, że $\chi_A(t) = t^2 - 2t - 3$.
Na mocy powyższego twierdzenia $A^2 - 2A + 3I = 0$. Sprawdzimy to bezpośrednim rachunkiem.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wniosek 8.4.3. Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Niech $\chi_A(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A.

i) Jeśli A jest odwracalna, to wówczas
$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(c_n A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \ldots + c_2 A + c_1 I)$

ii) $A^n = -\frac{1}{c_n}(c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1A + c_0I)$

iii) Dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia n można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$.

Przykład 8.4.4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy macierz odwrotną A^{-1}.
$\det A = -5 \neq 0$ macierz jest odwracalna
$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 4A - 5I = 0$
$A^{-1}(A^2-4A-5I) = A-4I-5A^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5}(A-4I) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$
$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Przykład 8.4.5. Dana jest macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy B^9.
Obliczamy $\chi_B(t) = \det(B-tI) = \begin{vmatrix} -t & 2 & 6 \\ 2 & -8-t & -26 \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix} \overset{w_1-w_3, w_2+w_3}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & -18-t \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix}$
$\overset{k_3-3k_2}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & 2t \\ -2 & 2 & 2-t \end{vmatrix} \overset{w_3+w_1}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & 2t \\ -t & 2 & 0 \end{vmatrix} =$
$= (2-t)(6+t)t - 4t(2-t) = -t^3 + 4t.$
Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona $B^3 = 4B$, skąd
$B^9 = 4^3B^3 = 4^4B = 256\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$

Przykład 8.4.6. Dana jest macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy $C^5 + C^3$ oraz C^{50}.

Oznaczmy $p(t) = t^5 + t^3$. Obliczamy $\chi_C(t) = (1-t)^2$. Dzielimy wielomian p przez wielomian χ_C (na ogół z resztą). Zatem istnieją wielomiany q_1, r_1 takie że $p(t) = q_1(t)\chi_C(t) + r_1(t)$ oraz $\deg(r_1) < \deg(\chi_C)$. Wykonując dzielenie, otrzymujemy $q_1(t) = t^3 + 2t^2 + 4t + 6, r_1(t) = 8t - 6$.

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona
$p(C) = \chi_C(C)q_1(C) + r_1(C) = r_1(C) = 8C - 6I = 8\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Oznaczmy $w(t) = t^{50}$. Istnieją wielomiany q_2, r_2 takie że $w(t) = q_2(t)\chi_C(t) + r_2(t)$ oraz $\deg(r_2) < \deg(\chi_C) = 2$. Oznaczmy $r_2(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Różniczkując obustronnie

otrzymujemy $w'(t) = q_2'(t)\chi_C(t) + q_2(t)\chi_C'(t) + r_2'(t)$. Do układu równań $\begin{cases} t^{50} &= q_2(t)(1-t)^2 + at + b \\ 50t^{49} &= q_2'(t)(1-t)^2 - 2q_2(t)(1-t) + a \end{cases}$ podstawiamy $t = 1$.
Stąd $\begin{cases} 1 &= a + b \\ 50 &= a \end{cases}$. Zatem $r_2(t) = 50t - 49$ oraz $C^{50} = 50C - 49I = \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.