

Zadanie domowe nr 1

Zasada indukcji matematycznej, struktury algebraiczne, liczby zespolone

Zadanie 1. *Postępując się zasadą indukcji matematycznej, udowodnij poniższe stwierdzenia.*

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

b) *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6.*

Zadanie 2. a) *Czy działanie \circ określone wzorem*

$$x \circ y = x + (-1)^x \cdot y$$

jest działaniem łącznym w zbiorze \mathbb{Z} ?

b) *Czy $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ jest półgrupą/monoidem/grupą (przemienną)?*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad x \circ y := x + y + xy$$

Zadanie 3. *Rozwiąż równania.*

a)

$$z^4 = \frac{i-1}{\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}}$$

b)

$$9iz^3 = (\bar{z})^5$$

c)

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$$

Zadanie 4. *Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory.*

a)

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}) \leq \left| \frac{1}{2}i\bar{z} - 2 + 6i \right| < |\sqrt{3} + i|^2\}$$

b)

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^6) < 0\}$$