Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

Zadanie domowe nr 4
Przestrzenie wektorowe i odwzorowania liniowe

Zadanie 1. *Czy U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V? Odpowiedź uzasadnij.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) : x = 4y^2\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^4 = 0\}$

Zadanie 2. *Niech*

$$p = 1 + x, \quad q = 2 - 3x, \quad r = 3 - x + 5x^2.$$

a) *Uzasadnij, że układ $\mathcal{B}' = (p, q, r)$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.*
b) *Wyznacz macierz przejścia od bazy standardowej $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ do bazy $\mathcal{B}'$.*
b) *Wyznacz współrzędne wektora $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x = 5x^2$ w tejże bazie.*

Zadanie 3. *Dane jest odwzorowanie liniowe*

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad f(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x).$$

a) *Wyznacz macierz f w bazach standardowych.*

b) *Wyznacz $Ker f$, $Im f$, ich bazy i wymiary. Podaj własności f (monomorfizm, epimorfizm).*

Zadanie 4. *Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dame jest za pomocą następującego przyporządkowania.*

$$f(1, 1, 1) = (2, 2), \quad f(1, 0, 1) = (1, 0), \quad f(0, 1, 1) = (1, 1)$$

a) *Podaj wzór odwzorowania f.*

b) *Wyznacz macierz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ tego odwzorowania w bazach*

$$\mathcal{B} = \{b_1 = (3, 1, 1), b_2 = (5, 1, 6), b_3 = (4, -1, 2)\}, \qquad \mathcal{C} = \{c_1 = (-1, 1), c_2 = (1, 0)\}.$$

c) *Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{C}' = \{c_1' = (1, 1), c_2' = (2, 1)\}$. Wyznacz macierz przejścia $P = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}'}$ od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{C}'$.*

d) *Wykorzystując macierz P wyznacz współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^2$ w bazie $\mathcal{C}'$, jeżeli*

$$v = [2, 5]_{\mathcal{C}}.$$