Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

Zadanie domowe nr 6
Przestrzenie euklidesowe

Zadanie 1. *Czy* $g : V \times V \to \mathbb{R}$ *jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej* $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$*?*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + 7x_2y_2$
b) $V = \mathbb{R}_1[x]$, $g(p, q) = p(1)q(1) + 2p(2)q(2)$

Zadanie 2. *Niech* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Oblicz normy podanych wektorów.*

a) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $f = 2\sin x - \cos x$
b) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$*;* $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. *Dana jest podprzestrzeń* $W = \mathrm{lin}\{w_1 = (3, 2, 0, 1, -4), w_2 = (1, 2, -2, 0, 1), w_3 = (3, -2, 6, -2, 5)\}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^5$*. Wyznacz bazę przestrzeni* $W^{\perp}$*.*

Zadanie 4. *Uzasadnij, że* $\mathcal{B} = \big(b_1(x) = 2, b_2(x) = x + x^2, b_3(x) = x + 2x^2, b_4(x) = 3x^3\big)$ *jest bazą ortogonalną przestrzeni* $\mathbb{R}_3[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = aa_1 + (b-c)(b_1-c_1) + (2c-b)(2c_1 - b_1) + dd_1$*, gdzie* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*,* $q(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$*. Ponadto wyznacz współrzędne wektora* $v(x) = x^2 - x + 1$ *w tejże bazie.*

Zadanie 5. *Dana jest podprzestrzeń liniowa* U *przestrzeni* $\mathbb{R}^4$*.*

$$U = \mathrm{lin}\{b_1 = (1, 1, -1, 0), b_2 = (0, 2, -1, 1), b_3 = (1, 5, -3, 0)\}$$

a) Metodą Grama-Schmidta zortogonalizuj bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ *przestrzeni* U*.*

b) Wyznacz rzut ortogonalny $u = \pi_U(v)$ *wektora* $v = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ *na podprzestrzeń* U*.*

Zadanie 6. *Układ wektorów* $v_1 = (1, 1, 1, 0), v_2 = (0, 1, -1, 1)$ *uzupełnij do bazy ortogonalnej przestrzeni* $\mathbb{R}^4$*.*

Zadanie 7. *Wyznacz macierz odpowiadającą izometrii liniowej* $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ *płaszczyzny* $\mathbb{R}^2$*, gdzie* φ_1 *jest obrotem (rotacją) o kąt* 30° *przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,* φ_2 *jest odbiciem (symetrią ortogonalną) względem prostej tworzącej z dodatnią półosią* Ox *kąt* 120°*, zaś* φ_3 *jest obrotem o kąt* 210° *przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.*

Zadanie 8. *Dana jest macierz* $A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$*. Jaką izometrię liniową reprezentuje?*