Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 1
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
październik 2023r.

Zasada indukcji matematycznej
Podstawowe struktury algebraiczne

Notacja:
$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \mathbb{Q}_+ = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0\}$ $\quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

1 Zasada indukcji matematycznej

Zadanie 1. *Rozwiń i oblicz sumy.*

a) $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ *b)* $\sum_{k=1}^{3} k^3$ *c)* $\sum_{n=1}^{3} \frac{n}{n+2}$ *d)* $\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=2}^{3} j^i$ *e)* $\sum_{i=1}^{3} (x+i)^{(i+4)}$

f) $\sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$

Zadanie 2. *Zapisz za pomocą znaku „ Σ ” podane sumy.*

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ *b)* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ *c)* $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 3x}{8} + \ldots + \frac{\sin 8x}{256}$

d) $14 + 19 + 24 + 29 + 34$

Zadanie 3. *Rozwiń i oblicz iloczyny.*

a) $\Pi_{j=0}^{4}(5-j)$ *b)* $\Pi_{i=0}^{3} 2^i$ *c)* $\Pi_{k=-2}^{2} \frac{k}{k+4}$ *d)* $\frac{\Pi_{i=3}^{6} 2i}{\Pi_{i=1}^{4} 2^i}$ *e)* $\frac{1}{2^{10}} \Pi_{i=1}^{3} \Pi_{j=1}^{5} (i+j)$

Zadanie 4. *Zapisz za pomocą znaku „ Π ” podane iloczyny.*

a) $(x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \cdot x_4) \cdot (x_2 \cdot x_5)$ *b)* $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$

Zadanie 5. *Posługując się zasadą indukcji matematycznej, udowodnij poniższe stwierdzenia.*

a) n różnych prostych na płaszczyźnie, przechodzących przez ustalony punkt P, dzieli płaszczyznę na $2n$ części.

b) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ liczba diagonalnych w n-kącie wypukłym jest nie większa niż $\frac{1}{2}n(n-3)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

d) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

f) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

g) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

h) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

i)* $\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

j) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *liczba* $10^n - 4$ *jest podzielna przez* 6.

k) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *liczba* $n^3 - n$ *jest podzielna przez* 6.

l) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ *zachodzi nierówność* $2^n \geq 2n + 1$.

m) $\forall n \in \mathbb{N} \quad k^2 + k + 1$ *dzieli* $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}$

n) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n \cdot (n!)^2$ *dla* $n \geq 0$

o) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *dla dowolnych* $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ *(tzw. nierówność Bernoulliego)*

p) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \det A = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, *gdzie* $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{bmatrix}_{n \times n}$

q) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = 1$

WSKAZÓWKI: i) $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$

2 Działania i ich własności

<u>Zadanie</u> 6. *Uzupełnij tabelę wpisując TAK lub NIE w odpowiednim polu w zależności od tego czy* $+, -, \cdot, :$ *jest lub nie jest działaniem wewnętrznym w danym zbiorze.*

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$+$							
$-$							
$\cdot$							
$:$							

<u>Zadanie</u> 7. *a) Czy dodawanie jest działaniem w zbiorze liczb niewymiernych?*
b) Czy potęgowanie liczb jest działaniem łącznym w $\mathbb{N}$*?*

c) Czy zwykłe dodawanie i mnożenie są działaniami w zbiorze $\{-1,0,1\}$*?*
d) W którym spośród zbiorów $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{-1,0,1\}, \{0,1,\}, \{0\}$ *wzór* $a \circ b = a^2 - b^2$ *określa działanie?*
e) Czy działanie dane wzorem $x \circ y = \sqrt{xy}$ *jest działaniem wewnętrznym w zbiorze* $\mathbb{Q}_+$*?*

Zadanie 8. *Sprawdź, że* $\circ$ *jest działaniem wewnętrznym w zbiorze* A *i zbadaj jego własności (przemienność, łączność, element neutralny, element symetryczny, idempotenty).*

a) $A = \mathbb{Q}, \quad \forall a, b \in A \quad a \circ b = \frac{a+b}{2}$
b) $A = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = x + y + 1$
c) $A = (-1,1) \subset \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$
d) $A = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = e^{x+y}$
e) $A = \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in A \quad x \circ y = x^y$
f) $A = \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in A \quad a \circ b = ab + a + b$
g) $A = \mathbb{R}^2, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \quad (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

Zadanie 9. *a) Wyznacz elementy neutralne działań* $\wedge$ *oraz* $\vee$ *określonych w przedziale* $[4,5] \subset \mathbb{R}$ *wzorami*

$$\forall a, b \in (4,5) \quad a \wedge b = \max(a,b), \qquad a \vee b = \min(a,b).$$

b) Działanie $\square$ *jest określone zbiorze* $\mathbb{R}_+$ *wzorem* $a \square b = 5^{\log_5 a \cdot \log_5 b}$*. Sprawdź, czy jest ono łączne i przemienne. Znajdź element neutralny tego działania. Wyznacz elementy symetryczne do tych liczb* $a \in \mathbb{R}_+$*, które taki element mają.*

c) W zbiorze dzielników naturalnych liczby 6 określamy działania $\circ, \square$ *następująco*

$$a \circ b = NWW(a,b), \quad a \square b = NWD(a,b).$$

Zbadaj własności tych działań. Zbadaj, czy działanie $\circ$ *jest rozdzielne względem działania* $\square$*.*

d) W zbiorze $\mathbb{R}$ *określamy działania* $\odot$ *oraz* $\oplus$ *następująco*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \odot b = ab + a + b, \qquad a \oplus b = a + b + 1.$$

Zbadaj, czy działanie $\odot$ *jest rozdzielne względem działania* $\oplus$*.*

e) Niech X *będzie zbiorem, zaś* $\mathcal{P}(X)$ *rodziną wszystkich jego podzbiorów (tzw. zbiór potęgowy). Wyznacz element neutralny działań* $\cap, \cup, \div$ *(tj. przecięcie, suma i różnica symetryczna zbiorów) w zbiorze* $\mathcal{P}(X)$*.*

f) W zbiorze $\{a, b, c, d\}$ *działanie* $*$ *zdefiniowano za pomocą tabeli.*

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Czy działanie to jest przemienne, łączne, czy ma element neutralny? Podać elementy symetryczne do poszczegolnych elementów zbioru (o ile istnieją).

<u>Zadanie</u> 10. *Niech A będzie zbiorem nieskończonym i niech $a_0 \in A$. Czy można w zbiorze A tak określić działanie $\circ$, by każdy element zbioru $A \setminus \{a_0\}$ miał nieskończenie elementów symetrycznych względem tego działania?*

WSKAZÓWKA: Jeśli działanie wewnętrzne w zbiorze A jest łączne i posiada element neutralny, to wówczas jeśli istnieje element symetryczny do danego elementu $a \in A$, to jest on jedyny.

3 Podstawowe struktury algebraiczne

<u>Zadanie</u> 11. *Czy dany zbiór z działaniem dodawania, bądź mnożenia liczb jest półgrupą (przemienną)/monoid (abelową)?*

a) $(\mathbb{N},+)$ *b)* $(\mathbb{Z},+)$ *c)* $(\mathbb{Q},+)$ *d)* $(\mathbb{R},+)$ *e)* $(\mathbb{N},\cdot)$ *f)* $(\mathbb{Z},\cdot)$ *g)* $(\mathbb{Q},\cdot)$ *h)* $(\mathbb{R},\cdot)$

i) $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ *j)* $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ *k)* $(\mathbb{R}_+,+)$ *l)* $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ *m)* $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},+)$ *n)* $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\cdot)$

o) $(A,\cdot)$, *gdzie* $A=\{1,2,4,\ldots,2^n,\ldots\}$ *p)* $(A,\cdot)$, *gdzie* $A=\{a+bi\in\mathbb{C}:\ a,b\in\mathbb{Z},\ a>0\}$

q) $(n\mathbb{Z},+)$, *gdzie* $n\mathbb{Z}=\{nk: k\in\mathbb{Z}\}$, $n\in\mathbb{N}$ *ustalone*

r) $(A,+)$, *gdzie* $A=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z^2)=0\}$ *s)* $(S,\cdot)$, *gdzie* $S=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$

t) $(\sqrt[n]{1},\cdot)$, *gdzie* $\sqrt[n]{1}=\{z\in\mathbb{C}:\ z^n=1\}$, $n\in\mathbb{N}$ *ustalone*

u) $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+)$, *gdzie* $\mathbb{Q}(\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{5},\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ *v)* $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}),\cdot)$ *w)* $(\mathbb{Q}(\sqrt{5})\setminus\{0\},\cdot)$

<u>Zadanie</u> 12. *Czy $(X,\circ)$ jest półgrupą (przemienną, z jedynką)/grupą (abelową)?*

a) $X=\{a,b,c,d\}$, *działanie $\circ$ określone jest za pomocą tabelki*

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

b) $X=\mathbb{N}$, $x\circ y=x$ *c)* $X=\mathbb{R}$, $x\circ y=x+y+xy$ *d)* $X=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $x\circ y=x+y+xy$

e) $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=\frac{1}{2}(a+b)$ *f)* $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=|a|+|b|$ *g)* $X=\mathbb{R}^*$, $x\circ y=x\cdot|y|$

h) $X=\mathbb{R}$, $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ *i)* $X=\mathbb{R}_+$, $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$ *j)* $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=\log_5(5^a+5^b)$

k) $X=\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+(-1)^x y$ *l)* $X=\mathbb{R}$, $a\circ b=a+b-7$

m) $X=\mathbb{Z}$, $a\circ b=\begin{cases} a+b & ;\ a\in 2\mathbb{Z}\\ a-b & ;\ a\notin 2\mathbb{Z}\end{cases}$ *n)* $X=[0,1)\subset\mathbb{R}$, $x\circ y=x+y-\lfloor x+y\rfloor$

o) $X=\{x\in\mathbb{R}:\ x>1\}$, $a\circ b=ab-a-b+2$ *p)* $X=\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $a\circ b=ab-2a-2b+6$

q) $X = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$ *r)* $X = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$

s) $X = \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \circ (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + ab')$

t) $X = \mathbb{R}^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \circ (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$

u) $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$, *$\circ$ to składanie odwzorowań*

v) X to zbiór izometrii trójkąta równobocznego (tj. takich izometrii płaszczyzny, przy których trójkąt odwzorowywany jest na siebie), $\circ$ to superpozycja izometrii

w) $X = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, *gdzie* $\forall_{i=1,\ldots,6}\ f_i : A \to A$ *dla* $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ *dane są wzorami* $f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{-x-1}{x}, f_3(x) = \frac{-1}{x+1}, f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = \frac{-x}{x+1}, f_6(x) = -x - 1$, *zaś $\circ$ jest składaniem odwzorowań*

<u>Zadanie</u> 13. *a) Dobierz $k \in \mathbb{R}$ tak, by $(\mathbb{R} \setminus \{k\}, \star)$ było grupą abelową, dla $a \star b = ab - 2a - 2b + 6$.*

b) Niech $(G_1, \circ)$ oraz $(G_2, \Box)$ to grupy. Czy zbiór $G_1 \times G_2$ z działaniem $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \Box y_2)$ jest grupą?

<u>Zadanie</u> 14. *a) Zbuduj tabelki działań $+_5$ oraz $\cdot_5$ w $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.*
b) Zbuduj tabelki działań $+_8$ oraz $\cdot_8$ w $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Które elementy są odwracalne względem mnożenia?

<u>Zadanie</u> 15. *Które z podanych zbiorów liczbowych (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb) są pierścieniami (przemiennymi, z jedynką, z dzieleniem), a które ciałami?*

a) $\mathbb{Z}$ *b)* $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *c)* $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$ *d)* $\mathbb{Q}$ *e)* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$

f) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ *g)* $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{x + yi\sqrt{2} \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{Q}\}$

*h) zbiór **liczb całkowitych Gaussa*** $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

i) $P = \{x = y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$ *j)* $P = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

<u>Zadanie</u> 16. *Wskaż pierścienie i ciała.*

a) $\mathcal{C}[a, b]$ zbiór funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$, z działaniami dodawania i mnożenia funkcji $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, $f(x) \cdot g(x) = (fg)(x)$

b) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, *gdzie* $a \oplus b = a + b + 1$ *oraz* $a \odot b = a + b + ab$

c) $P = \{f : A \to \mathbb{R} : f$ *- ciągła* $\}$ *z dodawaniem i możeniem funkcji*

d) $\mathbb{R}[x]$ zbiór wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych

e) $(P, \star, \circ)$, *gdzie* $P = \{a, b\}$ *oraz* $\begin{array}{c|cc} \star & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array}$, $\begin{array}{c|cc} \circ & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array}$

f) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +_n, \cdot_n)$ *zbiór klas reszt modulo* n

g) $S = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ *zbiór ciągów liczbowych o wyrazach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia* $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$

h) zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych takich, że ich wyraz wolny jest liczbą parzystą

i) $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

j) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$

Odpowiedzi

1. *a)* 63 *b)* 36 *c)* $\frac{43}{30}$ *d)* 50 *e)* $(x+1)^+(x+2)^6+(x+3)^7$ *f)* $8+\frac{1}{12}$ **2.** *a)* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$ *b)* $\sum_{i=1}^{n} x_i$ *c)* $\sum_{n=1}^{8} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ *d)* $\sum_{n=0}^{4}(14+5n)$ **3.** *a)* 120 *b)* 64 *c)* 0 *d)* $\frac{45}{8}$ *e)* $3^2 \cdot 5^3 \cdot 6^3 \cdot 7^2 = 11907000$ **4.** *a)* $\Pi_{i=3}^{5} x_2 x_i$ *b)* $\Pi_{i=1}^{6} 2i$ **6.**

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$+$	*tak*	*tak*	*nie*	*tak*	*tak*	*nie*	*tak*
$-$	*nie*	*tak*	*nie*	*tak*	*nie*	*nie*	*tak*
$\cdot$	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*	*tak*
$:$	*nie*	*nie*	*tak*	*nie*	*tak*	*tak*	*nie*

7. *a), b) nie c) mnożenie tak, dodawanie nie d)* $\mathbb{Z}, \{-1, 0, 1\}, \{0\}$ *e) nie* **8.** *a) wewnętrzne, przemienne, ale nie łączne, brak el. neutralnego, każde* $a \in \mathbb{Q}$ *jest idempotentem b) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=-1 el. neutralny,* $\forall a \in \mathbb{R} \quad a^{-1} = -a - 2$, *idempotent* $a = -1$ *c) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=0 el neutralny,* $\forall a \in (-1, 1) \quad a^{-1} = -a$, *idempotent* $a = 0$ *d) wewnętrzne, przemienne, ale nie łączne, brak el. neutralnego, brak idempotentów e) wewnętrzne, nieprzemienne, nie łączne, brak el. neutralnego,* $a = 1$ *idempotent f) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=0 el. neutralny,* $\forall a \neq -1 \quad a^{-1} = \frac{-a}{a+1}$, *nie istnieje element symetryczny do* -1 *g) wewnętrzne, przemienne, łączne, e=(1,1) el neutralny,* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \vee y = 0\} \quad (x, y)^{-1} = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ **9.** *a)* $e_1 = 5, e_2 = 4$ *b) przemienne i łączne,* $e = 5$ *el. neutralny,* $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad a^{-1} = 5^{\frac{1}{\log_5 a}}$ *c) Działanie* $\circ$ *jest przemienne, łączne,* $e = 6$ *el. neutralny, żaden element nie jest odwracalny. Działanie* $\square$ *jest przemienne, łączne,* $e = 1$ *el. neutralny, element* $a = 1$ *jest sam do siebie odwrotny. Działanie* $\circ$ *jest rozdzielne względem* $\square$. *d) tak e)* $e = \varnothing$ *dla* $\cup$, $e = X$ *dla* $\cap$, $e = \varnothing$ *dla* $\div$ *f) przemienne, łączne, a to el. neutralny,* $a^{-1} = a, b^{-1} = c, c^{-} = b, d^{-1} = d$ **10.** *tak, np.* $a \circ b = \begin{cases} a & ; \ b = a_0 \\ b & ; \ a = a_0 \\ a_0 & ; \ a \neq a_0, b \neq a_0 \end{cases}$ **11.** *a), k), l) półgrupa przemienna, bez jedynki* $0 \notin \mathbb{N}$ *b), c), d), i), j), q), s) tzw.* ***grupa okręgu*** *, t), u) w) grupa abelowa e), f), g), h), o), v) monoid przemienny, ale nie grupa m), n), p), r) działanie nie jest wewnętrzne* **12.** *e) nie jest to półgrupa, brak łączności c) półgrupa przemienna z jedynką f), i), j), p) półgrupa przemienna bez jedynki q), u) półgrupa nieprzemienna z jedynką b), g) półgrupa nieprzemienna bez jedynki m), r), s) v) tzw.* ***grupa diedralna****, oznaczana* D_3*, w) grupa nieprzemienna a), d), h), k), l), n), o), t) grupa abelowa* **13.** *a)* $k = 2$ *b)* *grupa (abelowa jeśli G_1, G_2 są abelowe)* **14.** *a)*

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

b)

$+_8$	0	1	2	3	4	6	7	
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	6	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$\cdot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	1
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

, *elementy odwracalne:* $1, 3, 5, 7$

15. *a), h) pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało* *b) pierścień przemienny bez jedynki* *c), j) nie jest pierścieniem* *d), e), f) g), i) ciało* **16.** *a), b), c), d), e), g), j) pierścień przemienny z jedynką, ale nie ciało* *f) ciało gdy n jest liczbą pierwszą, w pozostałych przypadkach pierścień przemienny z jedynką* *h) pierścień przemienny bez jedynki i) ciało*