

Liczby zespolone

Notacja: $\arg z$ oznacza argument główny liczby z , tj. należący do przedziału $[0, 2\pi)$.

1 Arytmetyka liczb zespolonych

Zadanie 1. Oblicz:

$$a) (3 + 2i)^{-1} \quad b) \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{2+i} \quad c) (-2 + \sqrt{3}i)^3 \quad d) \frac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i} \quad e) \frac{(1+i\sqrt{8})^2(-1-i)}{1-\sqrt{2}i}$$

Zadanie 2. Wyznacz liczby rzeczywiste $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające podane równania.

$$a) x(2 + 3i) + y(1 - 6i) = 5 - i \quad b) (x - 2i)(3 - yi) = 11 - 5i \quad c) \frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} = 1$$

Zadanie 3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wyznacz $\operatorname{Re}(w)$ oraz $\operatorname{Im}(w)$.

$$a) w = \frac{2}{z-\pi} \quad b) w = z^2 \cdot i^{1009} \quad c) w = \frac{\bar{z}}{z+1} \quad d) w = z(z - i) - \bar{z}$$

Zadanie 4. Rozwiąż w zbiorze liczb zespolonych podane równania.

$$a) z^2 + 3\bar{z} = 0 \quad b) |z| - z = 1 + 2i \quad c) z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i \quad d) |z| + 2iz = 11 + 8i$$

$$e) z^2 - i\bar{z} + 2 = 0 \quad f) \frac{1-3i}{3z+2i} = \frac{2i-3}{5-2iz} \quad g) \frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{z} \quad h) z + i = \overline{z+i} \quad i) z^2 = i$$

$$j) z^2 = 15 + 8i \quad k) z^2 = 8 + 6i \quad l) z^2 = (\bar{z})^2$$

Zadanie 5. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Rozwiąż układy równań. Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej.

$$a) \begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 1 + i \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases} \quad c) \begin{cases} (1+i)z + (1-i)w = 1 + i \\ (1-i)z + (1+i)w = 1 + 3i \end{cases}$$

Zadanie 6. a) Oblicz i^{77} oraz i^{99} .

b) Wyznacz wszystkie liczby $z \in \mathbb{C}$, takie, że $z^2 \in \mathbb{R}$.

c) Wyznacz wszystkie liczby zespolone sprzężne do swojego kwadratu.

d) Oblicz $\frac{i^{4n+1} - i^{4n-1}}{2}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

e) Uzasadnij, że $(4i - 5)^{8n+10} + (4 + 5i)^{8n+10} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

f) Niech $m, n \in \mathbb{N}$ będą dowolne. Uzasadnij, że poniższy układ równań nie ma rozwiązań.

$$\begin{cases} z^n = 2 + \sqrt{3}i \\ z^m = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \end{cases}$$

g) Uzasadnij, że jeśli liczba $z \in \mathbb{C}$ spełnia równanie $10(z - i)^n = (6 + 8i)(1 - iz)^n$, $n \in \mathbb{N}$ to wówczas $\operatorname{Im}(z) = 0$.

h) Liczba $z \in \mathbb{C}$ spełnia równanie $z + 1 + 8i = |z|(1 + i)$. Uzasadnij, że wówczas $|z|^2 - 18|z| + 65 = 0$ i na tej podstawie wskaż rozwiązania wyjściowego równania.

WSKAZÓWKI: f) Oblicz $|z|$. g) Oblicz moduł lewej i prawej strony równania.

2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Zadanie 7. Oblicz.

$$a) \left| \frac{1+2i}{3-2i} \right| \quad b) |\sqrt{3} + i| \quad c) |(1 - i\sqrt{10})^{12}| \quad d) |(1 - \sqrt{7}i)(1 + \sqrt{7}i)|$$

Zadanie 8. Zapisz podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.

$$a) -i \quad b) 1 \quad c) 7 + 7i \quad d) 1 - \sqrt{3}i \quad e) -\sqrt{27} - 3i \quad f) \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$g) \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad h) 2 + \sqrt{3} + i \quad i) -i \cos \alpha + \sin \alpha \quad j) \sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$k) -\cos \alpha + i \sin \alpha \quad l) (1 + i)(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad m) 1 + itg\alpha \text{ dla } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$n) (tg\alpha - i)^4, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \quad o) 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha \quad p) 1 - tg^2\alpha + 2itg\alpha \quad q) 3 + 4i$$

$$r) \sin \frac{\pi}{5} + i(1 - \cos \frac{\pi}{5})$$

WSKAZÓWKI: g), h), o), r) Skorzystaj ze wzorów na sinus i cosinus kąta podwojonego.

Zadanie 9. Niech $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, $z_3 = 3(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10})$. Oblicz:

$$a) z_1 z_2 \quad b) z_1 z_2 z_3 \quad c) \frac{z_1^2}{z_3^4} \quad d) \frac{z_1 z_3^2}{z_2^3}$$

Zadanie 10. Korzystając z przedstawienia liczby $z = (1 + \sqrt{3}i)(1 + i)$ w postaci algebraicznej i trygonometrycznej wyznacz wartość $\cos \frac{7}{12}\pi$.

Zadanie 11. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej wykonaj działania. Wynik podaj w postaci algebraicznej.

$$a) (1 + i)^7 \quad b) (1 + i\sqrt{3})^{195} \quad c) (\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10} \quad d) (1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{24} \quad e) (\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$$

$$f) \frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6} \quad g) (1 - i\sqrt{3})^7(2 - 2i)^{21} \quad h) \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, n \in \mathbb{N}, n > 2$$

Zadanie 12. Podane liczby zapisz w postaci algebraicznej.

$$a) e^{\frac{\pi}{2}i} \quad b) e^{2i} \quad c) e^{\pi i} \quad d) e^{\frac{1}{2} - i\frac{\pi}{3}}$$

Zadanie 13. Uprość podane wyrażenia.

$$a) \frac{\cos 5\theta + i \sin 5\theta}{\cos 2\theta + i \sin 2\theta} \quad b) \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^7}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^3} \quad c) \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos 2\theta - i \sin 2\theta} \quad d) \frac{(\cos \frac{9}{17}\pi + i \sin \frac{9}{17}\pi)^5}{(\cos \frac{2}{17}\pi - i \sin \frac{2}{17}\pi)^3}$$

Zadanie 14. Oblicz.

$$a) \frac{(\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{3})^{12}}{i^{2014}} \quad b) \arg \left[\frac{(-\sqrt{12} + 2i)^{23}}{(\sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{6})^{17}} \right] \quad c) \arg (i - tg \frac{\pi}{5}) \quad d) \arg \left[\frac{(1-i)^5}{i^{11}(1+i\sqrt{3})^3} \right]$$

Zadanie 15. Wykorzystując postać wykładniczą, rozwiąż równania.

a) $|z| \cdot z^2 + i = 0$ b) $|z|^4 = iz^4$ c) $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$ d) $z^2 = 4\bar{z}$ e) $z^4\bar{z} = -32$ f) $z^7 = \bar{z}i$
g) $z^6 = (1+i)^3(i\bar{z})^2$ h) $|z|^2 = \frac{4}{z^2}$ i) $-(\bar{z})^4 = (-z)^3$ j) $(\bar{z})^2 \cdot (-i) = -z^3$ k) $|z^8| = z^4$
l) $\bar{z}^4 = z^2 \cdot |z^2|$ m) $z^3|z| = (4 - 4\sqrt{3}i)\bar{z}$ n) $z^3 \cdot |z^2| \cdot \bar{z} = 64i$
o) $(\bar{z})^4 = (-z)^3 \cdot (1 + i\sqrt{3})^5 \cdot (\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{3})^8$

Zadanie 16. Wykorzystując postać trygonometryczną, rozwiąż równania.

a) $z^3 = i$ b) $z^4 = 1$ c) $z^4 = 2 - i\sqrt{12}$ d) $z^3 = 8$ e) $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ f) $z^4 = (\sqrt{3}-i)^{12}$
g) $z^4 = \frac{-18}{1+i\sqrt{3}}$ h) $z^3 = \frac{27-54i}{2+i}$ i) $(z-3)^4 = (1+i)^{12}$ j) $z^4 = (1-i)^6$

Zadanie 17. Rozwiąż równania.

a) $z^6 = \frac{\sqrt{3}-i}{i-1}$ b) $z^3 = (-\sin \frac{2}{7}\pi + i \cdot \cos \frac{2}{7}\pi)^9$ c) $z^3 = (\sqrt{12} - 2i)^{21}(i-1)^{13}$
d) $z^3 = \frac{(\cos \frac{7}{15}\pi + i \sin \frac{7}{15}\pi)^4}{(\cos \frac{4}{15}\pi - i \sin \frac{4}{15}\pi)^2}$ e) $z^4 = \frac{i-1}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}$ f) $z^2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}$ g) $\left(\frac{z+2}{\bar{z}+2}\right)^2 = 1$

Zadanie 18. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzoru dwumianowego Newtona wyraż:

a) $\cos 3x$ przy pomocy $\cos x$, b) $\sin 5x$ przy pomocy $\sin x$.

Zadanie 19. Korzystając ze wzorów Eulera przedstaw podane wyrażenia za pomocą sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x .

a) $\cos^5 x$ b) $\sin^5 x$ c) $\sin^4 x + \cos^4 x$

Zadanie 20. Liczba $z = -1 + \sqrt{3}i$ jest jednym z wierzchołków kwadratu. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego kwadratu, gdy jego środkiem jest:

a) początek układu współrzędnych b) punkt $z_0 = 3 + i$

Zadanie 21. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ oraz $w = \sqrt{3} - i$, Rozważając odpowiednie kąty uzasadnij, że $\arg(z+w) = \frac{\pi}{24}$ oraz $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

Zadanie 22. a) Niech $z, w \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\bar{z} + i \cdot \bar{w} = 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$, $\arg(z-w) = \pi$. Wyznacz $\arg(z)$.

b) Niech $z, w \in \mathbb{C}$ będą takie, że $z + \bar{z} = 2|z-1|$, $w + \bar{w} = 2|w-1|$, $\arg(z-w) = \frac{\pi}{4}$. Wyznacz $\operatorname{Im}(z+w)$.

c) Niech $z, w, v \in \mathbb{C}$ będą takie, że $|z| = |w| = |v| = |\frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{v}| = 1$. Wyznacz $|z+w+v|$.

d) Niech φ będzie argumentem głównym liczby z . Wyznacz argument główny liczby $w = \frac{z}{10+|z|}$.

3 Równania wielomianowe

Zadanie 23. Rozwiąż równania.

a) $z^2 - z + 1 = 0$ b) $z^2 - 2z = 2i - 1$ c) $z^2 - 6z + 11 = 0$ d) $z^2 + 2iz + 3 = 0$
e) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$ f) $iz^2 + (2+i)z + 2 = 0$ g) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

Zadanie 24. Rozwiąż równania.

a) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ b) $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$ c) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$ d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$
e) $z^4 - (18 + 4i)z^2 + 77 - 36i = 0$ f) $z^4 - (19 - 54i)z^2 + 448 - 414i = 0$ g) $z^6 + z^3 - i + 1 = 0$
h) $z^3 - 3z^2 + 6z - 4$ i) $5z^3 - 12z^2 + 5z - 2 = 0$ j) $z^6 + (i - 1)z^3 - i = 0$ k) $z^7 + iz^4 - z^3 - i = 0$
l) $z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 8 = 0$

WSKAZÓWKI: l) $z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 8 = (z^2 + 2z)^2 + 6(z^2 + 2z) + 8$

Zadanie 25. Rozwiąż równania.

a) $(z - i)^4 = (z + i)^4$ b) $z^3 = (iz + 1)^3$ c) $\left(\frac{iz+2}{z-4i}\right)^4 = 1$ d) $z^4 = 81(1 - z)^4$

Zadanie 26. Dokonaj rozkładu (faktoryzacji) podanych wielomianów na czynniki liniowe.

a) $iz^2 - 4$ b) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 - 8i$ c) $3z^4 - 3z^3 - 14z^2 - 11z - 3$ d) $z^5 - 4z^4 + 5z^3 - 6z + 4$
e) $z^3 + (2 - 6i)z^2 - (9 + 12i)z - 18$ f) $6iz^4 - 7z^3 + 4iz^2 - 7z - 2i$

Zadanie 27. Dany jest wielomian $W(z)$ oraz jeden z jego pierwiastków z_0 . Wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu.

a) $W(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 6z + 6$, $z_0 = -1 + i$
b) $W(z) = z^3 - 7z^2 + 41z - 87$, $z_0 = 2 - 5i$
c) $W(z) = z^4 - 7z^3 + 27z^2 - 47z + 26$, $z_0 = 2 + 3i$
d) $W(z) = z^5 - 3z^4 + 8z^3 - 14z^2 + 16z - 8$, $z_0 = 1 + i$
e) $W(z) = 4z^4 - 24z^3 + 57z^2 + 18z - 45 = 0$, $z_0 = 3 + i\sqrt{6}$

Zadanie 28. a) Oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz + 1$ przez dwumian $Q(z) = z - i$.

b) Liczba $z_1 = 4i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z) = z^4 - 4iz^3 + 8iz + 32$. Wyznacz pozostałe pierwiastki.

c) Wyznacz wartość $2z^4 + 5z^3 + 7z^2 - z + 41$ dla $z = -2 - \sqrt{3}i$.

d) Dany jest wielomian $P(z) = 2z^2 - (3 + 8i)z - (a + 4i)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Wiedząc, że P ma pierwiastek rzeczywisty $x \in \mathbb{R}$, wyznacz oba pierwiastki P .

WSKAZÓWKI: c) Oblicz $(z + 2)^2$ i wykonaj dzielenie wielomianów.

Zadanie 29. Skorzystaj ze wzorów Viète'a, rozwiązując poniższe przykłady.

a) Wielomian $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c .

b) Wielomian $P(z) = z^3 + a_2z^2 + a_1z + 26$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $1 + i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartości współczynników a_1, a_2 .

c) Wielomian $P(z) = z^4 - 3z^3 + az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastki 2 oraz $1 + 2i$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c .

4 Interpretacja geometryczna

Zadanie 30. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory.

a) $\{z \in \mathbb{C} : |\frac{z-5}{z-1}| = 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \wedge \operatorname{Re}(z) \in (0, 1) \wedge \operatorname{Im}(z) > 0\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in (0, \frac{\pi}{4}) \wedge |z - 1 - i| \leq 2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z + i| \leq 4 \wedge \operatorname{Re}(iz - 1) \leq 0\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + 1) = \operatorname{Im}(2z - 4i) \wedge \operatorname{Re}(\frac{4-\bar{z}}{z}) < 0\}$

f) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}[(1 + 2i)z - 3i] < 0 \wedge \operatorname{Re}(iz - 4) \leq 0\}$

g) $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |iz - 5| < 3\}$ h) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - 1 - 3i| \leq |3 - 4i| \wedge \operatorname{Re}(2 - z) \leq 1\}$

i) $\{z \in \mathbb{C} : \sin(\pi|z + 2i|) > 0\}$ j) $\{z \in \mathbb{C} : 3|z + i| \leq |z^2 + 1| < 5|z - i|\}$

k) $\{z \in \mathbb{C} : |\frac{z+i}{z^2+1}| \geq 1 \wedge |z^2 - (\bar{z})^2| < 4\}$ l) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2| + |z - 6| = 10\}$

m) $\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} + (2i - 3)z - (2i + 3)\bar{z} - 3 = 0\}$

n) $\{z \in \mathbb{C} : (z + 2i)^4 = 16\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2i|^4 = 16\}$, $\{z \in \mathbb{C} : [\operatorname{Re}(z + 2i)]^4 = 16\}$

o) $\{z \in \mathbb{C} : z^3 = (1 + i)^6\}$, $\{z \in \mathbb{C} : z^3 = |1 + i|^6\}$

p) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 6| = 2|z + 6 - 9i|\}$ q) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = \operatorname{Re}(z + 1)\}$

r) $\{z \in \mathbb{C} : |(z + i)^2| \geq |z^2 + 1|\}$ s) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z}^2 - z^2 - 8i| = 0, \quad z^2 + 4z + 5 = 0\}$

t) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(2i) \leq |i \cdot \bar{z} - 1 - 3i| < |6 + \sqrt{13} \cdot i|\}$

u) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \neq 0 \wedge \frac{|z+i\operatorname{Re}(z)|}{\operatorname{Im}z} \geq 1\}$ v) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = -2\}$

w) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2| - |z - 2| = 3\}$

Zadanie 31. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory.

a) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z - 2) = \frac{\pi}{3}\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z + 2 - i) = \pi\}$

- c) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z + 3 - 2i) = \frac{3}{4}\pi\}$ d) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(3z + i) = \pi\}$
e) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(2z + 4) = \frac{\pi}{4}\}$ f) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z + 3i) \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})\}$ g) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\frac{i}{z}) = \frac{3}{4}\pi\}$
h) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\bar{z} - 1 - 2i) = \frac{3}{2}\pi\}$ i) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(iz) \in (\pi, 2\pi)\}$
j) $\{z \in \mathbb{C} : \arg[(-2 + 2i)z] \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]\}$ k) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi\}$
l) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^6) < 0\}$ m) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^3) \geq \operatorname{Im}(z^3)\}$ n) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}[(\bar{z})^2] \leq \operatorname{Im}(z^2)\}$
o) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \arg z\}$ p) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi| \leq 2\pi \wedge |z + 2\pi| \geq \arg(z + 2\pi)\}$
q) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z - w_1) = \arg(z - w_2)\}$, gdzie $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ustalone
r) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z - w_1) = \pi + \arg(z - w_2)\}$, gdzie $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ustalone
s) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z - w_1) = \frac{\pi}{2} + \arg(z - w_2)\}$, gdzie $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ ustalone
t) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\frac{z-2}{z+2}) = \frac{\pi}{3}\}$ u) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}\}$ v) $\{z \in \mathbb{C} : \arg[\bar{z}(z+1)] \in [\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]\}$
w) $\{z \in \mathbb{C} : \arg[(\bar{z} + i)(z + 2)] \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi]\}$

Zadanie 32. a) Niech $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Uzasadnij, że $\frac{1-z}{1+z} = -i \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.
b) Korzystając z punktu a) zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \left| \frac{1-z}{1+z} \right| \leq \sqrt{3}\}.$$

Zadanie 33. Nazwij podane przekształcenia płaszczyzny.

- a) $f(z) = -z$ b) $f(z) = iz$ c) $f(z) = -iz$ d) $f(z) = \bar{z}$ e) $f(z) = -\bar{z}$ f) $f(z) = i\bar{z}$
g) $f(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ h) $f(z) = z + k$, $k \in \mathbb{R}$

Odpowiedzi

1. a) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ b) $\frac{4-2\sqrt{3}}{5} - \frac{2+4\sqrt{3}}{5}i$ c) $10 + 9\sqrt{3}i$ d) -1 e) $(\sqrt{2} + 5) + (\sqrt{2} - 5)i$ 2. a)
 $x = \frac{29}{15}, y = \frac{17}{15}$ b) $x_1 = \frac{11-\sqrt{97}}{6}, y_1 = -\frac{11+\sqrt{97}}{4}$ lub $x_2 = \frac{11+\sqrt{97}}{6}, y_2 = -\frac{11-\sqrt{97}}{4}$ c) $x = 2, y = 3$
3. a) $\operatorname{Re}(w) = \frac{2(x-\pi)}{(x-\pi)^2+y^2}, \operatorname{Im}(w) = \frac{-2y}{(x-\pi)^2+y^2}$ b) $\operatorname{Re}(w) = -2yx, \operatorname{Im}(w) = x^2 - y^2$ c)
 $\operatorname{Re}(w) = \frac{x^2+x-y^2}{(x+1)^2+y^2}, \operatorname{Im}(w) = \frac{-2xy-y}{(x+1)^2+y^2}$ d) $\operatorname{Re}(w) = (x-y)(x+y-1), \operatorname{Im}(w) = 2xy - x + y$
4. a) $z \in \{0, -3, \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i)\}$ b) $z = \frac{3}{2} - 2i$ c) $z = \sqrt{2} + i$ lub $z = -\sqrt{2} + i$
d) $z = 4 - 3i$ lub $z = 4 - \frac{35}{3}i$ e) $z = i$ lub $z = -2i$ f) $z = -\frac{99+45i}{73}$ g) brak rozwiązań h)
 $z = x - i, x \in \mathbb{R}$ i) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ lub $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ j) $z = 4 + i$ lub $z = -4 - i$ k)
 $z = 3 + i$ lub $z = -3 - i$ l) $z = x$ lub $z = yi$, dla $x, y \in \mathbb{R}$ 5. a) $z = 1 - \frac{1}{2}i, w = \frac{1}{2}$ b)
 $z = 2 - i, w = i + 1$ c) $z = i, w = i + 1$ 6. a) $i, -i$ b) $z = yi, y \in \mathbb{R}$ c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$lub z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $d) i$ $h) z = 4 - 3i$ $lub z = 12 + 5i$ **7.** $a) \sqrt{\frac{5}{13}}$ $b) 2$ $c) 11^{12}$ $d) 8$
8. $a) 1(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ $b) 1(\cos 0 + i \sin 0) = e^0$ $c) 7\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 7e^{\frac{\pi}{4}i}$
 $d) 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ $e) 6(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi) = 6e^{\frac{7}{6}\pi i}$ $f) \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}$
 $g) 4(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = 4e^{\frac{\pi}{12}i}$ $h) 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = 2e^{\frac{\pi}{12}i}$ $i) 1(\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)) = e^{(\pi - \alpha)i}$ $j) 1(\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = e^{(\frac{\pi}{2} - \alpha)i}$
 $k) 1(\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) + i \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha)) = e^{\frac{3}{2}\pi + \alpha i}$ $l) \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)) = \sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{4} + \alpha)i}$
 $m) \frac{1}{\cos \alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}e^{i\alpha}$ $n) \frac{1}{\cos^4 \alpha}(\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha) = \frac{1}{\cos^4 \alpha}e^{4\alpha i}$ $o) 2 \cos \frac{\alpha}{2}(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}) = 2e^{\frac{\alpha}{2}i}$ $p) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}e^{\frac{\alpha}{2}i}$ $q) 5(\cos(\operatorname{arctg} \frac{4}{3}) + i \sin(\operatorname{arctg} \frac{4}{3})) = 5e^{i \operatorname{arctg} \frac{4}{3}}$
 $r) 2 \sin \frac{\pi}{10}(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10})$ **9.** $a) 2[\cos \frac{13}{40}\pi + i \sin \frac{13}{40}\pi]$ $b) 6[\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi]$ $c) \frac{4}{81}[\cos(-\frac{9}{20}\pi) + i \sin(-\frac{9}{20}\pi)]$ $d) 18[\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}]$ **10.** $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ **11.** $a) 8\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$
 $b) -2^{195}$ $c) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $d) (2 + \sqrt{3})^{12}$ $e) 2^9(1 - \sqrt{3}i)$ $f) -32i$ $g) 2^{39}(\sqrt{3} + i)$ $h) \frac{1}{2} \cdot i^{n-1}$ **12.** $a) i$ $b) \cos 2 + i \sin 2$ $c) -1$ $d) \sqrt{e}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ **13.** $a) \cos 3\theta + i \sin 3\theta$ $b) \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ $c) \cos \theta + i \sin \theta$ $d) -1$ **14.** $a) \frac{1}{64}$ $b) 0$ $c) \frac{6}{5}\pi$
15. $a) z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ $lub z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ $b) z = 0$ $lub z = |z|e^{(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})i}, k \in \mathbb{Z}$ $c) z \in \{0, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i), \pm\sqrt{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\}$ $d) z = 0$ $lub z = 4e^{\frac{2}{3}k\pi i}, k = 0, 1, 2$ $e) z \in \{1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2\}$ $f) z = 0$ $lub z = e^{(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4})i}, k = 0, 1, \dots, 7$ $g) z = 0$ $lub z = \sqrt[8]{8}e^{(-\frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4})i}, k = 0, 1, \dots, 7$ $h) z = \pm\sqrt{2}$ $i) z = 0$ $lub z = e^{\frac{2}{7}k\pi i}, k = 0, 1, \dots, 6$ $j) z = 0$ $lub z = e^{(\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi)i}, k = 0, 1, \dots, 4$ $k) z \in \{0, 1, -1, i, -i\}$ $l) z = 0$ $lub z = e^{k\frac{\pi}{3}i}, k = 0, 1, \dots, 5$ $m) z = 0$ $lub z = 2e^{-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}}, k = 0, 1, 2, 3$ $n) z = \sqrt{2}(1 + i)$ $lub z = -\sqrt{2}(1 + i)$ $o) z = 0$ $lub z = 2e^{(-\frac{2}{11}\pi + \frac{2}{7}k\pi)i}, k = 0, 1, \dots, 6$ **16.** $a) z \in \{-i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\}$ $b) z \in \{1, i, -1, -i\}$ $c) z \in \{\sqrt{2}(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi), \sqrt{2}(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi), \sqrt{2}(\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi), \sqrt{2}\}$
 $d) z \in \{2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\}$ $e) z \in \{2(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi), 2(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi), 2(\cos \frac{19}{12}\pi + i \sin \frac{19}{12}\pi)\}$ $f) z \in \{8, 8i, -8, -8i\}$ $g) z \in \{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\}$ $h) z \in \{3i, 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i), 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)\}$ $i) z \in \{1 + 2i, 5 - 2i, 1 - 2i, 5 + 2i\}$ $j) z = \sqrt[4]{8}e^{(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4})i}, k = 0, 1, 2, 3$ **17.** $a) z = \sqrt[12]{2}(\cos(-\frac{11}{72}\pi + k\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{11}{72}\pi + k\frac{\pi}{3})), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ $b) z \in \{\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}, \cos \frac{11\pi}{7} + i \sin \frac{11\pi}{7}, \cos \frac{25\pi}{7} + i \sin \frac{25\pi}{7}\}$ $c) z = 2^{\frac{97}{6}}e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi)i}, k = 0, 1, 2$ $d) z = x$ $lub z = -2 + iy, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{R}$ **18.** $a) \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ $b) \sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$ **19.** $a) \cos^5 x = \frac{1}{16}[\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x]$ $b) \sin^5 x = \frac{1}{16}[\sin 5x - \sin 3x + \sin x]$ $c) \frac{1}{4}(3 + \cos 4x)$ **20.** $a) -1 + \sqrt{3}i, -i - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}i, i + \sqrt{3}$ $b) 4 - \sqrt{3} - 3i, 7 + (4 - \sqrt{3})i, 2 + \sqrt{3} + 5i, -4 + (\sqrt{3} - 1)i$ **22.** $a) \frac{3}{4}\pi$ $b) 2$ $c) 1$ $d) \arg(w) = \varphi$
23. $a) z \in \{\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\}$ $b) z \in \{2 + i, -i\}$ $c) z \in \{3 - \sqrt{2}i, 3 + \sqrt{2}i\}$ $d) z \in \{-3i, i\}$ $e) z \in \{2i - 1, 3 - i\}$ $f) z \in \{2i, -1\}$ $g) z \in \{1 + i, 2 - i\}$ **24.** $a) z \in \{\pm 2i, \pm i\}$ $b) z \in \{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ $c) z \in \{4 - i, 4 + i, -4 + i, -4 - i\}$ $d) z \in \{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \sqrt{2} + i\sqrt{2}, -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$ $e) z \in \{2 - i, -2 + i, 4 + i, -4 - i\}$ $f) z \in \{6 - 5i, -6 + 5i, 3 + i, -3 - i\}$ $g) z \in \{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i, \sqrt[6]{2}(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi), \sqrt[6]{2}(\cos \frac{13}{12}\pi + i \sin \frac{13}{12}\pi), \sqrt[6]{2}(\cos \frac{21}{12}\pi + i \sin \frac{21}{12}\pi)\}$
 $h) z \in \{1, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$ $i) z \in \{2, \frac{1 - 2i}{5}, \frac{1 + 2i}{5}\}$ $j) z = e^{(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})i}, k = 0, 1, \dots, 5$ $k) z \in \{1, -1, i, -i, \frac{\sqrt{3} - i}{2}, -\frac{\sqrt{3} + i}{2}\}$ $l) z \in \{-1 + i, -1 - i, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\}$ **25.** $a) z \in \{-1, 0, 1\}$ $b) z \in \{\frac{1}{1 - i}, [-\frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)i]^{-1}, [-\frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)i]^{-1}\}$ $c) z \in \{-1 + 3i, 3i, 1 + 3i\}$ $d) z \in \{\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9 + 3i}{10}, \frac{9 - 3i}{10}\}$ **26.** $a) i(z - \sqrt{2}(1 - i))(z + \sqrt{2}(1 - i))$ $b) (z - 1 - \sqrt{3} - i)(z - 1 + \sqrt{3} - i)(z - 1 + 2i)$ $c) 3(z + 1)(z - 3)(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i)(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i)$ $d) (z - 1)(z + 1)(z - 2)(z - 1 - i)(z - 1 + i)$ $e) (z + 2)(z - 3i)^2$ $f) (z - i)(z + i)(z + \frac{1}{2}i)(z + \frac{2}{3}i)$ **27.** $a) \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, -1 - i$ $b) 2 + 5i, 2 - 5i, 3$

c) $2 + 3i, 2 - 3i, 1, 2$ d) $1 + i, 1 - i, 1, 2i, -2i$ e) $3 + i\sqrt{6}, 3 - i\sqrt{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **28.** a) iloraz $z^4 + iz^3 - z^2 + (3 - i)z + 10i + 1$, reszta $-11 + i$ b) $2i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i$ c) 6 d) $-\frac{1}{2}, 2 + 4i$ **29.**
 a) pierwiastki: $1 + 2i, \frac{1}{2}$, parametr $c = 12$ b) pierwiastki: $1 - i, -13$, parametry $a_1 = -24, a_2 = 11$
 c) $a = 5, b = -1, c = -10$ **33.** a) symetria środkowa względem $z = 0$ b) obrót względem $z = 0$ o kąt $\frac{\pi}{2}$ c) obrót względem $z = 0$ o kąt $\frac{3\pi}{2}$ d) symetria względem osi rzeczywistej e) symetria względem osi urojonej f) rzut prostopadły na oś rzeczywistą g) translacja o wektor $[k, 0]$