Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 3
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
październik 2023r.

Macierze i wyznaczniki

Notacja:
I - macierz jednostkowa odpowiedniego stopnia
O - macierz zerowa odpowiedniego wymiaru
$M_{m\times n}(K)$ - zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach, o elementach z ciała K
$M_n(K)$ - zbór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z cała K

Jeśli nie wskazano inaczej lub nie wynika to z kontekstu, przyjmujemy $K = \mathbb{R}$.

1 Działania na macierzach, podstawowe typy macierzy

Zadanie 1. *Zapisz macierz $A = [a_{ij}]$, jeśli:*

a) $A \in M_{5\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = 2i + j - 1$ *b)* $A \in M_5(\mathbb{R})$, $a_{ij} = \min\{i, j\} + 2$

Zadanie 2. *Wykonaj podane działania na macierzach.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A - 3I$, *gdzie* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A + B$, *gdzie* $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{bmatrix} 4+i & 7-i \\ 5-i & 4+i \end{bmatrix}, = B\begin{bmatrix} 5+i & 1+3i \\ 2+i & -7i \end{bmatrix}$

e) $(1 + 2i) \cdot A$, *gdzie* $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{bmatrix} 1-i & 1-2i \\ 2+i & -i \end{bmatrix}$

f) $A = X^3 - 3X^2 + 2X^{-1}$, *jeśli* $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. *Oblicz iloczyny macierzy A i B (wykonaj te mnożenia, które są możliwe).*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *oraz* $B = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ *nad ciałem* $\mathbb{C}$

e) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ *oraz* $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Zadanie 4. *a) Niech* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Oblicz $D = 2AB - C^T + 4I$.

b) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Oblicz* A^3 *oraz* B^2,B^3, B^4.

Zadanie 5. *Niech* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Oblicz iloczyny.*

a) AB *b)* BA *c)* A^2 *d)* B^2 *e)* AA^T *f)* BA^T *g)* A^TA *h)* B^TB *i)* AB^T

j) A^TB *k)* B^TA *l)* BB^T

Zadanie 6. *a) Czy iloczyn dwóch macierzy niekwadratowych może być macierzą kwadratową?*
b) Jakie warunki powinny być spełnione, aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru co jeden z czynników?
c) Jakie warunki powinny być spełnione, aby iloczyn dwóch macierzy był tego samego wymiaru co oba czynniki?
d) Czy w iloczynie $OA = O$ *obie macierze zerowe muszą/mogą być tego samego wymiaru?*
e) Podaj przykład macierzy A *i* B *takich, że wykonalne są oba mnożenia* AB *i* BA *oraz* $AB \neq BA$.

Zadanie 7. *Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania macierzy, wykonaj działania.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 95 & 99 & 98 \\ 97 & 96 & 99 \\ 96 & 99 & 97 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} 103 & 97 & 101 \\ 104 & 98 & 100 \\ 103 & 95 & 102 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 999 & 999 & 997 \\ 999 & 9999 & 996 \\ 999 & 1000 & 999 \end{bmatrix}$

Zadanie 8. *a) Oblicz iloczyn* AB, *gdy:* $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}$.

b) Oblicz C^3, *gdy* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 9. *a) Znajdź przykład dwóch niezerowych macierzy kwadratowych* A *i* B *stopnia 2 będących dzielnikami zera, tzn. takich że* $AB = O$.
b) Jaki warunek muszą spełniać macierze kwadratowe tego samego stopnia A *i* B, *by prawdziwa była równość* $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$?

Zadanie 10. *a) Wyznacz wszystkie macierze $A \in M_2(\mathbb{R})$ takie, że $A^2 = I$.*
b) Wyznacz wszystkie macierze $A \in M_2(\mathbb{R})$ takie, że $A^2 = O$.
c) Wyznacz wszystkie macierze $A \in M_2(\mathbb{R})$ trójkątne górne takie, że $AA^T = I$.

Zadanie 11. *Znajdź macierze X o elementach rzeczywistych spełniające podane równania macierzowe.*

$$a)\ 2X - 3X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad b)\ XX^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ X + X^T = O \quad d)\ X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 12. *Wiedząc że $(AB)^T = B^T A^T$, udowodnij, że $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.*

Zadanie 13. *Rozwiąż układ równań macierzowych* $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$.

Zadanie 14. *Macierz kwadratową A nazywamy macierzą symetryczną, gdy $A^T = A$, zaś antysymetryczną gdy $A^T = -A$.*
a) Podaj przykład macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.
b) Dana jest macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Oblicz $CC^T, C^T C$.*
c) Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy A (nie koniecznie kwadratowej) iloczyny AA^T oraz $A^T A$ są macierzami symetrycznymi.

2 Wyznaczniki

Zadanie 15. *Oblicz wyznaczniki.*

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 2 & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} 1+i & 4-i & i \\ 2+i & 4-3i & 3-i \\ i & 2-2i & 1-i \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ gdy } z = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 16. *Korzystając z twierdzenia Laplace'a oblicz wyznaczniki.*

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 0 & \sin x & \mathrm{ctg} x \\ \sin x & 0 & \sin x \\ \mathrm{ctg} x & \sin x & 0 \end{vmatrix}$$

Zadanie 17. *Oblicz, wykorzystując własności wyznaczników.*

a) $\begin{vmatrix} 783 & 776 \\ 897 & 889 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 191 & 91 \\ 151 & 72 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 4 & \log 9 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 99 & 59 \\ 1 & 97 & 61 \\ 1 & 96 & 63 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, *g)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *i)* $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *k)* $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$

Zadanie 18. *Sprowadź macierze do postaci trójkątnej górnej i oblicz ich wyznaczniki.*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *c)* $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ *e)* $E = \begin{bmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix}$

Zadanie 19. *a) Niech* $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ *będą takie, że* $\det A = 128, \det B = 4, \det C = 2$. *Oblicz* $\det(2BC^T) + \det[(AB)^T \cdot (2C)]$.

b) Wiedząc że $\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = 5$, *oblicz* $\det \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\delta \end{bmatrix}$.

c) Niech A *będzie macierzą kwadratową taką, że* $\det(2A) = 48$, $\det(3A) = 108$. *Czy jest możliwe, by* $\det(4A) = 96$? *Czy* A *może być macierzą stopnia 4?*

d) Oblicz $\det(A^T \cdot 2B)$, *jeśli* $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ *sa macierzami stopnia* 5 *takimi, że* $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; \quad i = j \\ 2 & ; \quad i \neq j \end{cases}$, $b_{ij} = \begin{cases} j-i & ; \quad i+j > 2 \\ 0 & ; \quad i+j \leq 2 \end{cases}$.

Zadanie 20. *Jak zmieni się wartość wyznacznika stopnia n, jeśli*
a) pierwszą kolumnę przestawimy na ostatnie miejsce, a pozostałe kolumny przesuniemy w lewo

zachowując ich porządek,
b) zapiszemy wiersze w odwrotnym porządku?

Zadanie 21. *a) Uzasadnij, że wyznacznik macierzy antysymetrycznej nieparzystego stopnia jest równy zeru.*
b) Jaką wartość ma wyznacznik, którego wiersze z parzystymi indeksami mają sumę równą sumie wierszy z nieparzystymi indeksami?

Zadanie 22. *Rozwiąż równania z niewiadomą $x \in \mathbb{R}$.*

$$a)\ \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{bmatrix} = 0 \quad b)\ \det\begin{bmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 0 \quad c)\ \det\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} = 0$$

Zadanie 23. *a) Nie obliczając wyznacznika znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0.$$

b) Nie obliczając wyznaczników $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ *uzasadnij, że dzielą się one przez 10.*

Zadanie 24. *W dogodny sposób oblicz wyznaczniki:*

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$d)\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & -t \end{vmatrix} \quad e)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$f)\begin{vmatrix} 2a-b-3 & b-a & c-b \\ -a & a & b \\ -b-3 & a+b & a+b+c \end{vmatrix} \quad g)\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$h)\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_3 & c_3 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-1} & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_n & c_n & \dots & c_n & c_n \end{vmatrix} \quad i^*)\begin{vmatrix} a_1x_1+b_1 & a_2x_1+b_2 & \dots & a_nx_1+b_n \\ a_1x_2+b_1 & a_2x_2+b_2 & \dots & a_nx_2+b_n \\ & \dots & \dots & \\ a_1x_n+b_1 & a_2x_n+b_2 & \dots & a_nx_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$j)\ \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad k)\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Zadanie 25. *Oblicz wyznacznik macierzy A, obliczając w tym celu $(\det A)^2$, jeśli*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

3 Odwracanie macierzy

Zadanie 26. *Czy podane pary macierzy są do siebie odwrotne.*

$$a)\ \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Zadanie 27. *Korzystając z definicji macierzy odwrotnej, wyznacz A^{-1}.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ i & 2+i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

Zadanie 28. *Wyznacz dopełnienia algebraiczne elementów a_{12} i a_{21} macierzy*

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 29. *Posługując się metodą dopełnień algebraicznych, wyznacz A^{-1}.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e)\ A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad f)\ A = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1-i \\ i & i & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 30. *Posługując się algorytmem Gaussa (metodą bezwyznacznikową), wyznacz A^{-1}.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Zadanie 31. *a) Wiedząc, że* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*, udowodnij, że* $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

b) Jakie są możliwe wartości $\det(A)$*, jeśli* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *oraz* $A^2 + A^{-1} = \mathbf{0}$*?*

c) Niech $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ *takie, że* $\det(A) = 5$, $\det(AB) = 3$. *Oblicz* $\det(B^{-1}A^{-1}2A^T)$.

d) Niech macierze $A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$ *takie, że* $\det A = 128, \det B = 4, \det C = 2$.
Oblicz $\det(2BC^T)$ *oraz* $\det[(A^{-1}B)^T(2C)]^{-1}$.

Zadanie 32. *Rozwiąż równanie macierzowe.*

a) $X \cdot A = B$*, gdy* $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A \cdot X = B$*, gdy* $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A \cdot X = B$*, gdy* $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A \cdot (B + X) = C$*, gdy* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A \cdot (X - C) = B^T$*, gdy* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

f) $(AX + I)^T = (2A)^{-1}$*, gdzie* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

g) $(X + I)^T A = 2A - I$*, gdzie* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

h) $3X^{-1} = A^{-1}$*, gdzie* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

i) $X^{-1} = A^{-1}B$*, gdzie* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

j) $A(X^{-1})^2 = \frac{1}{2}X^{-1}$*, gdzie* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

k) $B(X^T + I)^{-1} = 2B^2A^T$*, gdzie* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 33. *Macierz* A *nazywamy macierzą* ***ortogonalną****, jeśli* $A^T = A^{-1}$.
a) Wykaż, że ortogonalna jest macierz $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

b) Jakie wartości może przyjmować wyznacznik macierzy ortogonalnej?

c) Uzasadnij, że jeśli macierze A, B są ortogonalne, to A^{-1}, AB również są ortogonalne.

4 Rząd macierzy

Zadanie 34. *Korzystając z definicji (za pomocą minorów), określ rzędy podanych macierzy.*

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 12 & 6 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad f)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ i & -3 & 2+3i \\ 2-i & 4-i & -2i \end{bmatrix} \quad h)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 35. *Wyznacz rząd następujących macierzy w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.*

$$a)\ \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -a & -1 \\ 2 & a & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e)\ \begin{bmatrix} 1 & 2a+5 & a^2+a \\ 2 & 5a+10 & 3a^2+3a \\ 3 & 6a+15 & 4a^2+2a \end{bmatrix} \quad f)\ \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 36. *Dobierz wartość parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, by rząd macierzy A był najmniejszy.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 37. *Korzystając z operacji nie zmieniających rzędu, oblicz rzędy podanych macierzy.*

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 38. *Sprowadzając macierze do postaci schodkowej, określ ich rzędy.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Zadanie 39. *Określ rząd macierzy w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} p^2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & \frac{2}{p} & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & \frac{2}{p} & 2^p & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 2p+1 & 2p+1 & 6p+2 \\ 2 & 4p+1 & 2p+1 & 7p+2 \\ 2 & 4p+1 & p & 5p \\ 4 & 4p+2 & 3p+1 & 10p+2 \end{bmatrix}$

Zadanie 40. *Podaj możliwe wartości rzędu macierzy $A \in M_{7\times 8}(\mathbb{R})$, jeśli dwa wiersze składają się z samych dwójek, dwa wiersze składają się z samych czwórek oraz ostatnią kolumnę można otrzymać dodając do siebie pozostałe kolumny pomnożone przez pewne stałe.*

5 Struktura algebraiczna zbiorów macierzy

Zadanie 41. *Uzasadnij, że zbiór macierzy nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z mnożeniem tworzy grupę. Oznaczamy ją symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy ogólną grupą liniową.*

Zadanie 42. *Które z podanych zbiorów macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n nad ciałem K tworzą grupę?*
a) zbiór macierzy symetrycznych z dodawaniem
b) zbiór macierzy nieosobliwych z dodawaniem
c) zbiór $Z = \{A \in M_n(K) : \det A = p\}$, $p \in K$ stała ustalona, z mnożeniem
d) zbiór macierzy diagonalnych z dodawaniem
e) zbiór macierzy diagonalnych z mnożeniem
f) zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych z mnożeniem
g) zbiór macierzy trójkątnych górnych z mnożeniem
h) zbiór macierzy trójkątnych górnych z zerami na przekątnej z mnożeniem
i) zbiór macierzy trójkątnych górnych z zerami na przekątnej z dodawaniem
j) zbiór macierzy ortogonalnych z mnożeniem

Odpowiedzi

1. *a)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ **2.** *a)* $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 9+2i & 8+2i \\ 7 & 4-6i \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 3+i & 5 \\ 5+5i & 2-i \end{bmatrix}$ *f)* $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -24 & -14 \\ 7 & -38 \end{bmatrix}$ **3.** *a)* $AB = \begin{bmatrix} 11 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $AB = 1,\ BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $AB = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{bmatrix}$ *d)* $AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2i & -2i \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1-i & 1-i \\ 1+3i & 1-i \end{bmatrix}$ *e)* $AB = BA = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$

4. *a)* $D = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ *b)* $A^3 = \begin{bmatrix} 13 & -14 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^4 =$ **0** **5.** *a)* $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 8 & 11 & 4 \\ 10 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 8 & 11 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ *j)* $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *k)* $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *l)* $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ **6.** *a) tak* *b) jedna macierz kwadratowa* *c) obie macierze kwadratowe tego samego stopnia* *d) mogą, nie muszą* **7.** *a)* $\begin{bmatrix} 288 & 294 & 294 \\ 770 & 783 & 783 \\ 671 & 690 & 683 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 300699 & 300800 & 300202 \\ 301698 & 301798 & 301196 \\ 299700 & 299802 & 299209 \end{bmatrix}$ **8.** *a)* $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_4 \end{bmatrix}$ *b)* $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$ **9.** *b)* $AB = BA$ **10.** *a)* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, *gdzie* $a^2 = 1 - bc$ *b)* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, *gdzie* $a^2 = -bc$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **11.** *a)* $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ *b) nie ma takich* *c)* $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}$ *d)* $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **13.** $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** *b)* $C^TC = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}, CC^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$ **15.** *a)*

32 *b)* -2 *c)* 0 *d)* $2k^3-2k^2-4$ *e)* 11 *f)* $-2+19i$ *g)* 0 **16.** *a)* 80 *b)* -71 *c)* -516 *d)* 40 *e)* $\sin 2x$ **17.** *a)* 15 *b)* 11 *c)* 0 *d)* $\cos 2x$ *e)* 0 *f)* 18 *g)* -1 *h)* -81 *i)* 168 *j)* -178 *k)* 1 **18.** *a)* 52 *b)* 0 *c)* -8 *d)* $n!$ *e)* $(1)^{n-1}n!$ *f)* $b_1(b_2-a_{12})(b_3-a_{23})\cdot\ldots\cdot(b_n-a_{n-1,n})$ **19.** *a)* 16512 *b)* 20 *c)* *nie, nie* *d)* 0 **20.** *a) Zostanie pomnożona przez* $(-1)^{n-1}$. *b) Zostanie pomnożona przez* $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **21.** *b)* 0 **22.** *a)* $x=-2$ *lub* $x=1$ *b)* $x=-2$ *lub* $x=0$ *c)* $x=-2$ *lub* $x=1$ **23.** *a)* $x\in\{0,2,6\}$ **24.** *a)* 6 *b)* 567 *c)* $n!$ *d)* $(-1)^n[t^n-a_1a_2\ldots a_n]$ *e)* 0 *f)* $ac(a-3)$ *g)* $(-1)^{\binom{n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$ *h)* $(-1)^{n+1}c_n\prod_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)$ *i)* 0 *dla* $n\geq 3$, $a_1x_1+b_1$ *dla* $n=1$, $(a_1b_2-a_2b_1)(x_2-x_1)$ *dla* $n=2$ *j)* $\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)$ *k)* $(-1)^{n+1}(a_0+a_n)r^n2^{n-1}$ **25.** $\det A=a^2+b^2+c^2+d^2$ **26.** *a) tak* *b) nie* **27.** *a)* $\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2&-5\\1&3\end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix}i+\frac{3}{4}&-\frac{9}{4}i+\frac{5}{4}\\-\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}i-\frac{3}{4}\end{bmatrix}$ **28.** $D_{13}=4, D_{21}=4$ **29.** *a)* $\begin{bmatrix}7&5&6\\6&3&3\\1&-1&-3\end{bmatrix}$ *b)* $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix}$ *c)* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ *d)* $\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-1&4&-1\\9&-3&-2\\-6&2&5\end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$ *f)* $\frac{1}{3i-1}\begin{bmatrix}4i&-4i&-1-i\\-4i&3+5i&1+i\\-i&i&i\end{bmatrix}$ **30.** *a)* $\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2&-5\\1&3\end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix}-\frac{5}{4}&-\frac{17}{2}&-12\\\frac{13}{4}&-\frac{37}{2}&-12\\-1&6&4\end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix}-3&2&0\\2&-1&0\\5&-3&1\end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-2&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-2&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&1\\0&0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

31. *b)* $-1,1$ *c)* $\frac{40}{3}$ *d)* $128,\ 1$ **32.** *a)* $X=\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}$ *b) nie istnieje* *c)* $X=\begin{bmatrix}5&-4&3\\2&-1&1\end{bmatrix}$ *d)* $X=\begin{bmatrix}-1&0\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ *e)* $X=\begin{bmatrix}0&0\\3&1\\2&0\end{bmatrix}$ *f)* $X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1&1&1\\1&0&-1&-2\\1&1&0&-4\\-1&0&-2&0\end{bmatrix}$ *g)* $X=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&-1&1\\1&-1&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$ *h)* $X=\begin{bmatrix}0&6&-3\\9&12&18\\0&-15&21\end{bmatrix}$ *i)* $X=\begin{bmatrix}1&1&1\\\frac{1}{2}&1&2\\\frac{1}{3}&1&3\end{bmatrix}$ *k)* $X=\begin{bmatrix}6&4\\8&2\end{bmatrix}$ *k)* $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{6}\\-\frac{5}{4}&0&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{11}{12}\end{bmatrix}$ **33.** *b)* $-1,1$

34. *a)* 2 *b)* 1 *c)* 1 *d)* 2 *e)* 1 *f)* 2 *g)* 3 *h)* 2 **35.** *a)* 2 *dla* $a\neq 4$, 1 *dla* $a=4$ *b)* 2 *dla dowolnego* a *c)* 2 *dla dowolnego* a *d)* 3 *dla* $a\neq 3$, 2 *dla* $a=3$ *e)* 3 *dla* $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-\frac{5}{2}\}$, 2 *dla* $a\in\{-1,-\frac{5}{2}\}$, 1 *dla* $a=0$ *f)* 3 *dla dowolonych* $a,b\in\mathbb{R}$ **36.** *a)* $r(A)=2$ *dla dowolnego* a *b)* $r(A)=3$ *dla* $a\in\{-1,0,3\}$ **37.** *a)* 2 *b)* 2 *dla* $a=3$, 3 *dla* $a\neq 3$ *c)* 2 *d)* 4 **38.** *a)* 3 *b)* 2 *c)* 4 *d)* 3 *e)* 4 **39.** *a)* 3 *dla* $\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$, 2 *dla* $p\in\{0,2\}$ *b)* 2 *dla dowolnego* p *c)* 3 *dla* $\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, 1 *dla* $p=0$ *d)* 4 *dla* $\in\mathbb{R}\setminus\{0,2,\frac{1}{2}\}$, 3 *dla* $p=\frac{1}{2}$, 2 *dla* $p=2$ *e)* 3 *dla* $\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, 2 *dla* $p\in\{-1,0\}$ **40.** $4,3,2,1$ **42.** *grupy: a), c) tzw. specjalna grupa liniowa ozn.* $SL_n(K)$*, d), f), i), j) tzw. grupa ortogonalna ozn.* $O_n(K)$