Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 4
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
listopad 2023r.

Układy równań liniowych

Uwaga: Jeśli nie wyszczególniono inaczej lub nie wynika to z kontekstu, podane macierze i układy równań rozpatrujemy nad ciałem $\mathbb{R}$.

1 Wzory Cramera

Zadanie 1. *Korzystając z twierdzenia Cramera i wynikających z niego wniosków, określ ilość rozwiązań układu i podaj zbiór rozwiązań.*

a) $\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 2x + 9y = 28 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ 5x - 10y = 25 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 1 \\ 5x + 4y + 6z = 1 \\ 7x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 5 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y + (\sqrt{2} - \sqrt{3})z = 5 \\ (\sqrt{3} - 1)x - (\sqrt{2} + 1)y + (\sqrt{2} + \sqrt{3})z = 0 \\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})y - 2(2 + \sqrt{6})z = 1 \end{cases}$

Zadanie 2. *Rozwiąż następujące układy równań w zależności od parametrów $a, b, c, p \in \mathbb{R}$.*

a) $\begin{cases} 2px - 2py = 6 \\ 5px - 10py = 15 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (1 + p)x - py = 1 + p \\ px + (1 - p)y = p - 1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} px + 2y + 4 = 0 \\ 5x + (p - 3)y - 10 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - py = 0 \\ px + 4y = 0 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 2p^2x + 10y - 16 = 0 \\ px + y - 3 = 0 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x + y + pz = 0 \\ x - y - pz = 1 \\ 2x + pz = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y - pz = -1 \\ px + y + pz = 4 \\ 4x + y + 4z = p \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$

Zadanie 3. *Posługując się algorytmem Gaussa rozwiąż podane układy Cramera.*

a) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x + 4y + 2z - s = 3 \\ 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5 \\ x + 2y - z - s + 5t = 5 \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5 \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4 \end{cases}$

<u>Zadanie</u> 4. *Dany jest układ równań . Posługując się algorytmem Gaussa sprowadź macierz tego układu do macierzy trójkątnej górnej a następnie rozwiąż otrzymany w ten sposób równoważny układ równań.*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -9 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u> 5. *Rozwiąż podane układy równań metodą macierzy odwrotnej.*

a) $\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$

<u>Zadanie</u> 6. *Znajdź równanie paraboli przechodzącej przez punkty:*

a) $A = (-1, 9), B = (1, -1), C = (2, -3)$ *b)* $A = (1, 1), B = (2, 3), C = (3, 5)$

<u>Zadanie</u> 7. *W zakładzie produkcyjnym do wykonania urządzenia używa się 4 elementów x,y,z,w. Elementy te dostarczono w 4 partiach w ilościach podanych w tabeli. Cena każdego elementu pozostawała niezmienna przy każdej dostawie. Ile kosztowały poszczególne elementy, jeśli za pierwszą dostawę zapłacono 130 zł, za drugą 135 zł, za trzecią 210 zł, za czwartą 235 zł.*

	x	y	z	w
1 *dostawa*	30	10	20	5
2 *dostawa*	20	15	15	10
3 *dostawa*	30	20	20	20
4 *dostawa*	40	20	25	20

2 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

<u>Zadanie</u> 8. *Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego, rozwiąż układy równań.*

a) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 6x - 9y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x - y &= 7 \\ 3x + y &= 14 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x + 2y - z + 4w = 1 \\ 2x - 3y - 2z - 6w = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y + 2z &= 4 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= -1 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 4x + y + 7z = 8 \\ 5x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$

<u>Zadanie</u> 9. *Ile rozwiązań może mieć układ 5 równań z 7 niewiadomymi?*

<u>Zadanie</u> 10. *Korzystając z algorytmu Gaussa, rozwiąż układy równań.*

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 9x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 10x_6 = 3 \\ -6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 - 11x_5 - 15x_6 = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= -7 \\ 3x_1 + 12x_2 - 9x_3 - 3x_4 + 6x_5 &= 9 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 - x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 19x_2 - 11x_3 - 2x_4 + 11x_5 &= 19 \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases} x_1+x_2 = 1 \\ x_1+x_2+x_3 = 4 \\ x_2+x_3+x_4 = -3 \\ x_3+x_4+x_5 = 2 \\ x_4+x_5 = -1 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 12x_1-18x_2+102x_3-174x_4-216x_5 = 132 \\ 14x_1-21x_2+119x_3-203x_4-252x_5 = 154 \\ x_3+2x_4+2x_5 = -1 \\ 4x_3+5x_4+6x_5 = -2 \\ 7x_3+8x_4+9x_5 = -3 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4 = 1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4 = 2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4 = -1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4 = 4 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} x_1+x_2+2x_4=1 \\ x_1+x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=9 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x+2y+3z-2t-u = 6 \\ 3x+6y+5z-2t-9u = 1 \\ 2x+4y+2z-8u = -5 \\ 2x+4y+7z-5t+u = 17 \\ x+2y+6z-5t-10u = 12 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ y+3z-3t=1 \\ x+y+z-t=1 \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} x+2y-z-t=1 \\ x+y+z+3t=2 \\ 3x+5y-z+t=3 \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+5x_4 = -1 \\ 2x_1+5x_2+9x_3+7x_4 = -1 \\ -2x_1-4x_2-6x_3-10x_4 = 2 \\ -x_2-3x_3+3x_4 = -1 \\ 3x_1+7x_2+12x_3+12x_4 = -2 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u> 11. *W podanych układach równań określ liczbę rozwiązań oraz liczbę parametrów.*

$$a)\ \begin{cases} x-y+2z+t=1 \\ 3x+y+z-t=2 \\ 5x-y+5z+t=4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x-3y+z = 0 \\ 2x+y-z = 1 \\ 5x-y-z = 2 \\ x-10y+4z = -1 \\ x+y+2z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x-y+2z-t = 1 \\ 2x-3y-z+t = -1 \\ x+7y-t = 4 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u> 12. *Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniach układów równań.*

$$a)\ \begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+2y-2z=1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+2y+3z+4t = -1 \\ -x+8y+11z+12t = 5 \\ 2x-y-z = -4 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x+3y+5z+7s+2t=6 \\ -x+4y+2z+7s+3t=1 \\ 2x+y+5z+4s+t=3 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u> 13. *Rozwiąż układy równań w zależności od parametrów $a,b,c,p \in \mathbb{R}$.*

$$a)\ \begin{cases} px+y=2 \\ 3x+y=1 \\ x+4y=p \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+y=9 \\ x+y=p \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} ax+y=0 \\ x+by=0 \\ x+y=b \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} py-z=0 \\ px+y=p \\ px+z=1 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x+2y+z+pt = 6 \\ x+y+pz+pt = -8 \\ 3x+5y+(p+2)z+3pt = p \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} 8x+6y+3z+2t=5 \\ 4x+y+z-t=2 \\ 4x+5y+2z+3t=3 \\ px+4y+z+4t=2 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x+y+3z = -1 \\ ax+5y+14z = b \\ -x+2y+5z = -4 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+bz=1 \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} (p+1)y+pz=-2 \\ 2x-y+pz=0 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$$

<u>Zadanie</u> 14. *Określ liczbę ich rozwiązań w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.*

a) $\begin{cases} (2p+1)x+(p-3)y &= p+1 \\ (p+2)x-2y &= 2p \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} px+y+z=1 \\ x+y-z=p \\ x-y+pz=1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} px+py+pz+pt=p \\ x+py+pz+pt=p \\ x+y+pz+pt=p \\ x+y+z+pt=p \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+(p+1)z+(p+3)w &= 4 \\ 2x+4y+(2p+4)z+(4p+6)w &= p+10 \\ (p+1)x+2y+(p+1)z+(p+3)w &= 5 \\ x+2y+(p+3)z+(2p+2)w &= 5 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x+(p-2)y-2pz=4 \\ px+(3-p)y+4z=1 \\ (1+p)x+y+2(2-p)z=7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} px + y + (p+1)z + pw = 2 \\ px + (p+2)y + (p+1)z + (p+2)w = 4 \\ 2px + 2y + (3p+1)z + (2p+1)w = 6 \\ px + y + 2pz + (p+3)w = 6 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} px+y=p \\ x-y=p \\ x+py=p \end{cases}$

Zadanie 15. *Rozwiąż układ równań* $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 4x+2y-5z=0 \\ 2x-7y+11z=0 \end{cases}$.

Zadanie 16. *Podaj interpretację geometryczną zbiorów rozwiązań podanych układów równań liniowych.*

a) $\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 4x-y+2z &= -2 \\ x+11y-7z &= 7 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} -9x+3y-6z &= -12 \\ 3x-y+2z &= 4 \\ -6x+2y-4z &= -8 \end{cases}$

Zadanie 17. *Dla jakich wartości parametrów* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych przedstawiają:*

a) $\begin{cases} ax+by=2ab \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$, *punkt/ prostą / płaszczyznę?*

b) $\begin{cases} ax+by+cz=3abc \\ ax-by+cz=abc \\ ax+by-cz=abc \end{cases}$, *punkt/ prostą / płaszczyznę / przestrzeń* $\mathbb{R}^3$*?*

Odpowiedzi

1. *a) oznaczony;* $x=\frac{205}{41}, y=\frac{76}{41}$ *b) nieoznaczony; prosta* $x=2y+10,\ y\in\mathbb{R}$ *c) sprzeczny d) oznaczony;* $x=\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{5}, z=\frac{1}{5}$ *e) oznaczony;* $x_1=x_2=1, x_3=2, x_4=-1$ *f) oznaczony* $x=\sqrt{2}, y=\sqrt{3}, z=1$ **2.** *a) dla* $p\neq 0$ *nieoznaczony,* $x=\frac{3}{p}+y, y\in R$*; dla* $p=0$ *sprzeczny b) oznaczony dla dowolnego* p, $x=1-p, y=-1-p$ *c) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-2,5\}$ *oznaczony,* $x=\frac{-4}{p-5}, y=\frac{10}{p-5}$*; dla* $p=5$ *sprzeczny; dla* $p=-2$ *nieoznaczony,* $y=x-2,\ x\in\mathbb{R}$ *d) układ jednorodny,* $x=y=0$ *e) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{0,5\}$ *oznaczony,* $x=\frac{-2}{p(p-5)}, y=\frac{3p^2-8p}{p(p-5)}$*; dla* $p\in\{0,5\}$ *sprzeczny f) dla* $p\neq 0$ *oznaczony,* $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{2}, z=\frac{1}{p}$*; dla* $p=0$ *sprzeczny g) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$ *oznaczony,* $x=\frac{2p+5}{-(p+1)}, y=4+p, z=\frac{p+4}{p+1}$*; dla* $p=-1$ *sprzeczny; dla* $p=4$ *nieoznaczony,* $x=-\frac{8}{3}z+\frac{5}{3}, y=\frac{20}{3}z-\frac{8}{3},\ z\in\mathbb{R}$ *h) dla* $a=b=c=0$ *rozwiązaniem jest dowolna trójka liczb; gdy dokładnie dwa spośród parametrów są zerowe układ jest sprzeczny,* **3.** *a)* $x=-3, y=1$ *b)* $x=\frac{8}{7}, y=-\frac{1}{7}, z=-\frac{3}{7}$ *c)* $x_1=3, x_2=4, x_3=-5, x_4=1$ *d)* $x_1=0, x_2=2, x_3=\frac{5}{3}, x_4=-\frac{4}{3}$ *e)* $x=z=t=1,\ y=s=0$ **4.** $x_1=3, x_2=4, x_3=-5, x_4=1$

5. *a)* $x=-\frac{13}{3}, y=-\frac{1}{3}$ *b)* $x=2, y=3, z=-1$ **6.** *a)* $y=3x^2-5x+1$ *b) nie ma takiej* **7.** *x - 1 zł, y - 2 zł, z - 3 zł, w - 4 zł* **8.** *a)* $y=\frac{2}{3}x,\ x\in\mathbb{R}$ *b) układ sprzeczny c)* $x=z+\frac{3}{7}, y=-2w+\frac{2}{7},\ z,w\in\mathbb{R}$ *d)* $x=-\frac{14}{9}, y=\frac{14}{9}, z=\frac{13}{9}$ *e) układ sprzeczny* **9.** *albo jest sprzeczny albo ma nieskończenie wiele rozwiązań (od 2,3,4,5 lub 6 parametrów)* **10.** *a)* $x_1=-x_2, x_5=-11+22x_4-33x_3, x_6=8-16x_4+24x_3,\ x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$ *b)* $x_1=\frac{3}{11}x_3+x_4-\frac{6}{11}x_5-\frac{19}{11},\ x_2=\frac{5}{11}x_3-\frac{7}{11}x_5+\frac{13}{11},\ x_3,x_4,x_5\in\mathbb{R}$ *c)* $x_1=6-t, x_2=t-5, x_3=3, x_4=-1-t, x_5=t,\ t\in\mathbb{R}$ *d)* $x_1=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}t, x_2=t, x_3=\frac{1}{3}, x_4=-\frac{2}{3}, x_5=0,\ t\in\mathbb{R}$ *e) układ sprzeczny f)* $x_1=\frac{29}{6}-\frac{p}{2}, x_2=-\frac{9}{2}+\frac{p}{2}, x_3=p, x_4=\frac{1}{3},\ p\in\mathbb{R}$ *g)* $x=-4-2y-t, z=\frac{7}{2}+t, u=\frac{1}{2},\ y,t\in\mathbb{R}$ *h)* $x=2z-2t, y=-3z+3t+1,\ z,t\in\mathbb{R}$ *i) układ sprzeczny j)* $x_1=3x_3-11x_4-3, x_2=-3x_3+3x_4+1,\ x_3,x_4\in\mathbb{R}$ **11.** *a) nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów b) dokładnie jedno rozwiązanie c) nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru* **12.** *a) 1 parametr y albo z b) 2 parametry:* $\{z,t\},\{y,z\},\{y,t\}$ *c) 2 parametry:* $\{z,s\},\{y,s\},\{y,z\},\{x,s\},\{x,z\},\{x,y\}$ **13.** *a) układ sprzeczny b) dla* $p\neq 5$ *układ sprzeczny, dla* $p=5$ *oznaczony* $x=4, y=1$ *c) dla* $b\neq 0, ab\neq 1$ *układ sprzeczny, dla* $b=0$ *oznaczony* $x=y=0$*, dla* $ab=1$ *oraz* $b=1$ *sprzeczny, dla* $ab=1$ *oraz* $b\neq 1$ *oznaczony* $x=\frac{-b^2}{1-b}, y=\frac{b}{1-b}$ *d) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ *oznaczony* $x=1+\frac{1}{p}, y=-1, z=p$*, dla* $p=0$ *sprzeczny, dla* $p=1$ *nieoznaczony* $x=1-y, z=y, y\in\mathbb{R}$ *e) dla* $p\neq 4$ *sprzeczny, dla* $p=4$ *nieoznaczony* $x=-22-7z-4t, y=14+3z,\ z,t\in\mathbb{R}$ *f) dla* $p=0$ *sprzeczny, dla* $p\neq 0$ *oznaczony* $x=\frac{1}{p}, y=-\frac{5}{3}t-\frac{1}{3}+\frac{4}{3p}, z=\frac{8}{3}t+\frac{7}{3}+\frac{8}{3p}$ *g) dla* $a=2, b\neq -7$ *układ sprzeczny, dla* $a=2, b=-7$ *nieoznaczony* $x\in\mathbb{R}, y=8x-5, z=2-3x$*, dla* $a\neq 2$ *układ oznaczony* $x=-\frac{7+b}{2-b}, y=-5-b+\frac{(5-a)(7+b)}{2-a}, z=14+3b+\frac{7+b}{2-b}-\frac{3(5-a)(7+b)}{2-a}$ *h)* $b=0$ *implikuje* $a=2$ *i układ jest nieoznaczony* $x=1, y\in\mathbb{R}, z=-1$*;* $a=1, b\neq 1$ *układ sprzeczny;* $a=b=1$ *układ nieoznaczony* $z=1-x-y,\ x,y\in\mathbb{R}$*;* $a=b=-2$ *układ nieoznaczony* $x=2+z, y=\frac{1-z}{2}, z\in\mathbb{R}$*; w pozostałych przypadkach układ jest oznaczony (można użyć np. wzorów Cramera)* **14.** *a) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-4,1\}$ *oznaczony, dla* $p=-4$ *sprzeczny, dla* $p=1$ *nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru) b) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$ *oznaczony, dla* $p\in\{-1,3\}$ *sprzeczny c) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ *oznaczony, dla* $p=1$ *nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 3 parametrów, dla* $p=1$ *nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru d) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ *oznaczony, dla* $p=0$ *sprzeczny, dla* $p=11$ *nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru e) dla* $p\neq 0$ *oznaczony, dla* $p=0$ *sprzeczny f) dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ *oznaczony, dla* $p\in\{0,1\}$ *sprzeczny, dla* $p=-1$ *nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru)* **15.** $x=y=z=0$ **16.** *a) prosta* $x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z, y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z,\ z\in\mathbb{R}$ *b) płaszczyzna* $y=3x+2z-4,\ x,z\in\mathbb{R}$ **17.** *a) punkt gdy* $|a|\neq|b|$*, prosta gdy* $a=b\neq 0$ *lub* $a=-b\neq 0$*, płaszczyzna gdy* $a=b=0$ *b) punkty gdy* $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$*, prosta gdy dokładnie jeden z parametrów przyjmuje wartość zero, płaszczyzna gdy dokładnie dwa spośród parametrów przyjmują wartość zero, przestrzeń* $\mathbb{R}^3$ *gdy* $a=b=c=0$