

## Geometria analityczna

### 1 Działania na wektorach

**Zadanie 1.** Oblicz długości podanych wektorów.

a)  $\vec{a} = [1, 2, 7]$     b)  $\vec{b} = [\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}]$     c)  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $P = (1, 2, 0)$ ,  $Q = (3, 4, 6)$

d)  $\vec{c} = [r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi]$ ,  $r > 0$ ,  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$

e)  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 7\vec{c}$ , gdzie  $\vec{a} = [1, 2, 3]$ ,  $\vec{b} = [0, 0, 5]$ ,  $\vec{c} = [\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1]$

**Zadanie 2.** a) Dla jakich wartości parametrów  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  wektory  $\vec{a} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \alpha\hat{k}$ ,  $\vec{b} = \beta\hat{i} + 9\hat{j} - 2\hat{k}$  są kolinearne?

b) Wyznacz wektor kolinearny z wektorem  $\vec{c} = [2, 3, -1]$  o zwrocie przeciwnym niż  $\vec{c}$ .

**Zadanie 3.** a) Znajdź cosinusy kierunkowe wektora  $\vec{a} = [1, -1, 2] \in \mathbb{R}^3$ .

b) Wektor  $\vec{u}$  tworzy z osią  $Ox$  kąt  $\frac{\pi}{3}$ , zaś z osią  $Oy$  kąt  $\frac{2}{3}\pi$ . Wyznacz jego cosinusy kierunkowe jeśli  $|\vec{u}| = 2$ .

c) Wektor  $\overrightarrow{AB}$  o początku w punkcie  $A = (-4, 2, 3)$  ma długość 14 i cosinusy kierunkowe (z  $Ox, Oy, Oz$  odpowiednio)  $\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$ . Znajdź współrzędne punktu  $B$ .

d) Oblicz współrzędne wektora  $\vec{v}$  o długości 3 i kątach kierunkowych (z  $Ox, Oy, Oz$  odpowiednio)  $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$ .

**Zadanie 4.** Dane są punkty  $A = (3, -1, 2)$ ,  $B = (-1, 6, 0)$ ,  $C = (4, 1, 3)$ . Znajdź podane wektory.

a) wektor  $\hat{u}$ , gdy  $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$     b)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$     c) rzut wektora  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$  na oś  $Oy$

**Zadanie 5.** Oblicz iloczyny skalarne podanych par wektorów.

a)  $\vec{a} = [-1, 5, 2]$ ,  $\vec{b} = [3, 0, 7]$     b)  $\vec{u} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{k}$

c)  $\vec{u} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$ ,  $\vec{v} = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$ , gdzie  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  to parami prostopadłe wektory

**Zadanie 6.** a) Dla jakich wartości parametru  $t$  wektory  $[1, t, -2t]$ ,  $[1, t, 7] \in \mathbb{R}^3$  są prostopadłe?

b) Dla jakich wartości parametrów  $t, s$  wektor  $\vec{u} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, t, s]$  jest wektorem prostopadłym do wektora  $\vec{v} = [1, 1, 1]$ ?

**Zadanie 7.** a) Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (1, 2, 3)$ ,  $C = (-1, 1, 2)$ . Oblicz kąt przy wierzchołku  $A$  w trójkącie  $ABC$ .

b) Oblicz kąt pomiędzy wektorami  $\vec{u} = [1, 2, 7]$ ,  $\vec{v} = [0, 3, -1]$ .

c) Oblicz kąt między wektorem  $\vec{u} = [2, -1, 8]$  a płaszczyzną  $Oxz$ .

d) Oblicz kąt między wektorami  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , jeśli wiadomo, że wektory  $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$  i  $\vec{b} = -4\vec{u} + 5\vec{v}$  są prostopadłe oraz  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

e) Oblicz kąt między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , jeśli wiadomo że  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 20$ ,  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ .

**Zadanie 8.** Uzasadnij, że czworokąt o wierzchołkach  $A = (-3, 5, 6)$ ,  $B = (1, -5, 7)$ ,  $C = (8, -3, 1)$ ,  $D = (4, 7, -2)$  jest kwadratem.

**Zadanie 9.** Oblicz iloczyn wektorowy  $\vec{a} \times \vec{b}$  podanych par wektorów.

a)  $\vec{a} = [2, 7, 1]$ ,  $\vec{b} = [-1, 3, -2]$     b)  $\vec{a} = 3\hat{j} - \hat{k}$ ,  $\vec{b} = 2\hat{k} + \hat{i} - 3\hat{j}$

c)  $\vec{a} = 2\hat{p} + \hat{q} + \hat{r}$ ,  $\vec{b} = \hat{p} + 3\hat{q} + 4\hat{r}$ , gdzie  $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$  to trójka parami prostopadłych wersorów o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych

**Zadanie 10.** a) Oblicz pole trójkąta  $ABC$ , jeśli  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (2, -3, 4)$ ,  $C = (7, 1, 0)$ .

b) Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach  $\vec{a} = [3, -1, 2]$ ,  $\vec{b} = [1, 2, -1]$ .

c) Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A = (-3, 1, -1)$ ,  $B = (6, -2, -5)$ ,  $C = (1, -2, -1)$ . Oblicz długość wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołka  $B$ .

d) Oblicz pole powierzchni czworościanu rozpiętego na wektorach  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

e) Oblicz pole powierzchni równoległościanu rozpiętego na wektorach  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Zadanie 11.** Oblicz iloczyn mieszany  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  podanych trójek wektorów.

a)  $\vec{a} = [2, 0, 3]$ ,  $\vec{b} = [1, 1, 1]$ ,  $\vec{c} = [-1, 3, 0]$     b)  $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$ ,  $\vec{c} = \vec{r}$ , gdzie  $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 3$

**Zadanie 12.** a) Znajdź wektor  $\vec{u}$  wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów  $\vec{v} = [1, 2, -3]$ ,  $\vec{w} = [-1, 4, 2]$  i spełnia warunek  $\vec{u} \circ \vec{a} = -150$ , gdzie  $\vec{a} = [4, 5, 1]$ .

b) Znajdź wektor  $\vec{u}$  wiedząc, że jest on prostopadły do wektorów  $\vec{b} = [2, 3, -1]$ ,  $\vec{c} = [1, -2, 3]$  oraz spełnia warunek  $\vec{u} \circ (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$ , gdzie  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  to wersory osi układu współrzędnych.

**Zadanie 13.** Dane są wektory  $\vec{a} = [3, -2, 1]$ ,  $\vec{b} = [1, 2, -1]$ ,  $\vec{c} = [-1, 4, 3]$ . Wyznacz

a)  $[(\vec{a} - 2\vec{b}) \times \vec{c}] \times [(\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]$     b)  $[(\vec{b} \circ \vec{c}) \cdot (2\vec{c} \times \vec{a})] \circ [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{c})]$

**Zadanie 14.** Uprość wyrażenie  $\vec{p} \times (2\vec{q} - \vec{r} + \vec{p}) + (2\vec{r} + \vec{q}) \times (\vec{p} - 2\vec{r})$  jeśli  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  to trójka parami prostopadłych wektorów jednostkowych o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

**Zadanie 15.** a) Oblicz objętość czworościanu rozpiętego na wektorach  $\vec{a} = [0, 0, 1]$ ,  $\vec{b} = [2, 3, 0]$ ,  $\vec{c} = [1, 1, 7]$ .

b) Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach  $A = (1, 3, 2)$ ,  $B = (0, -1, 3)$ ,  $C = (3, 2, 1)$ ,  $D = (-2, 1, 6)$ .

c) Oblicz wysokość czworościanu o wierzchołkach  $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (1, 2, 3)$ ,  $C = (-2, 5, 6)$ ,  $D = (3, -2, 1)$  opuszczonej z wierzchołka  $D$ .

**Zadanie 16.** a) Czy wektory  $\vec{a} = [1, 7, 0]$ ,  $\vec{b} = [2, 2, 1]$ ,  $\vec{c} = [-1, -2, -1]$  są współpłaszczyznowe?

b) Czy wektory  $\vec{a} = [2, 2, 3]$ ,  $\vec{b} = [1, 6, 1]$ ,  $\vec{c} = [1, -4, 2]$  są współpłaszczyznowe?

c) Czy punkty  $A = (0, 2, 0)$ ,  $B = (1, 1, 0)$ ,  $C = (-1, -3, -5)$ ,  $D = (0, 7, 7)$  należą do jednej płaszczyzny?

## 2 Płaszczyzna i prosta w $\mathbb{R}^3$

**Zadanie 17.** Znajdź punkty przecięcia płaszczyzny  $2x - y + 7z - 2$  z osiami układu.

**Zadanie 18.** Dla jakich wartości  $m \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  płaszczyzny opisane równaniami  $4x - 3y + 6kz - 8 = 0$  i  $2mx + y - 4z + 4 = 0$  są równoległe?

**Zadanie 19.** a) Napisz równanie ogólne płaszczyzny danej równaniem parametrycznym

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = 3 + t - s \\ z = 6 + t \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

b) Napisz równanie parametryczne płaszczyzny danej równaniem ogólnym  $x + y - 2z + 7 = 0$ .

**Zadanie 20.** Napisz równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny  $\pi$ :

a) przechodzącej przez punkty  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (2, 1, 1)$ ,  $C = (3, 0, 1)$ ,

b) przechodzącej przez punkty  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (-2, 1, 3)$ ,  $C = (7, 2, 5)$ ,

c) przechodzącej przez punkt  $M = (0, 1, 2)$  i równoległej do wektorów  $\vec{a} = [2, 0, 1]$ ,  $\vec{b} = [1, 1, 0]$ , d) przechodzącej przez punkt  $M = (1, 5, 1)$  i rozpiętej na wektorach  $\vec{u} = [-2, 1, 3]$ ,  $\vec{v} = [1, 4, -1]$ ,

e) zawierającej punkt  $M = (0, 1, 2)$  oraz prostą

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

f) przechodzącej przez punkty  $P = (2, 1, 3)$ ,  $Q = (-1, 2, 1)$  i równoległej do osi  $Oz$ ,

g) przechodzącej przez punkt  $M = (3, 5, 7)$  i prostopadłej do płaszczyzn  $\pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y - z + 2 = 0$ ,

h) prostopadłej do płaszczyzny  $\pi_1 : x + 2y + 3z - 12 = 0$  i zawierającej prostą .

$$l : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

i) wyznaczonej przez dwie równoległe proste  $l_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ ,  $l_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$

j) przechodzącej przez proste (o ile to możliwe)

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = -6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad l_2 : \begin{cases} x + 5y + 4z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

**Zadanie 21.** a) Czy podane równania przedstawiają tę samą płaszczyznę?

$$\pi_1 : \begin{cases} x = -2 - t + s \\ y = 4 + 3t - 2s \\ z = 6 - s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2 + t - s \\ z = 3 - t - 2s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

b) Czy podane płaszczyzny są równoległe?

$$\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 7 = 0, \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = -2s + t \\ z = 3 - 4s - t \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 22.** Napisz równanie płaszczyzny:

a) dwusiecznej (jednej z dwóch) kąta między płaszczyznami  $\pi_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$  i  $\pi_2 : x - 5y + 2z - 1 = 0$ ,

b) przechodzącej przez oś  $Oz$  i tworzącej z płaszczyzną  $2x + y + \sqrt{5}z - 1 = 0$  kąt  $60^\circ$ .

**Zadanie 23.** Napisz równanie płaszczyzny  $\pi$  przechodzącej przez punkt  $M = (1, 1, 1)$  i równoległej do płaszczyzny  $\pi_1 : -2x + y - z + 1 = 0$ . Oblicz odległość między tymi płaszczyznami.

**Zadanie 24.** Napisz równanie prostej  $l$ :

a) przechodzącej przez punkty  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (3, 4, 5)$ ,

b) przechodzącej przez punkt  $A = (1, 5, 3)$  i równoległej do prostej  $k : \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ ,

c) przechodzącej przez punkt  $P_0 = (2, 3, 1)$  i prostopadłej do płaszczyzny  $5x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,

d) przechodzącej przez punkt  $P_0 = (2, 3, 1)$  i równoległej do płaszczyzn  $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$ ,  $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$ .

**Zadanie 25.** Napisz równanie krawędziowe prostej przechodzącej przez punkt  $P_0 = (2, 3, 1)$  i

prostopadłej do prostych  $l_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , oraz  $l_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ .

**Zadanie 26.** Napisz równanie parametryczne prostej danej równaniem krawędziowym.

$$a) l : \begin{cases} 6x + 2y - z + 9 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \quad b) l : \begin{cases} x + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

**Zadanie 27.** Napisz równanie parametryczne prostej danej równaniem kierunkowym.

$$a) l : 3x - 3 = 6 - y = 2z - 8 \quad b) l : \frac{3x+9}{4} = y + 1 = \frac{2z-3z}{7}$$

**Zadanie 28.** Dana jest prosta  $l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Znajdź:

a) punkty przecięcia prostej  $l$  z płaszczyznami układu  $Oxyz$ ,

b) równanie prostej w postaci kierunkowej,

c) równanie prostej w postaci krawędziowej.

**Zadanie 29.** Dla jakiej wartości parametru  $B$  prosta  $l : \begin{cases} x + By - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$  jest równoległa do płaszczyzny  $\pi : x + y + z = 0$ ?

**Zadanie 30.** a) Czy punkty  $A = (1, -2, 5)$ ,  $B = (3, -2, 11)$  należą do prostej  $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{-3}$ ?

b) Czy prosta  $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  jest zawarta w płaszczyźnie  $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$ ?

c) Czy prosta  $l : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$  jest zawarta w płaszczyźnie  $\pi : 2x - z = 2$ ? Czy ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z płaszczyzną  $\pi_1 : x + y = z$ ?

d) Czy wektor  $\vec{a} = [0, 2, 1]$  jest prostopadły do prostej  $l : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ ?

**Zadanie 31.** Napisz równanie parametryczne i kierunkowe prostej, będącej dwusieczną kąta utworzonego przez przecinające się proste  $l_1, l_2$ .

$$a) l_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l_2 : \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 4 - 3s \\ z = 6 + 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$b) l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l_2 : \begin{cases} x = -6 + 4s \\ y = 1 - 3s \\ z = -29 - 12s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

**Zadanie 32.** a) Czy prosta  $l : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$  jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi : x + y - z + 3 = 0?$$

b) Czy podane równania krawędziowe przedstawiają tę samą prostą?

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ 3x - 4y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

**Zadanie 33.** Wyznacz punkt przecięcia:

$$a) \text{ prostych } l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \text{ oraz } l_2 : x + 1 = \frac{y+11}{2} = z + 1,$$

$$b) \text{ prostej } l : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \text{ i płaszczyzny } \pi : 2x + 3y + z - 1 = 0,$$

c) płaszczyzn

$$\pi_1 : \begin{cases} x = r \\ y = -2r - s \\ z = 4r + 3s \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + t - u \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad \pi_3 : \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 3 - 2w \\ z = 3 - w \end{cases}, \quad v, w \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 34.** Dany jest czworościan o wierzchołkach  $A = (1, 1, 1), B = (2, 0, 2), C = (2, 2, 2), D = (3, 4, -3)$ . Oblicz objętość tego czworościanu oraz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka  $D$ .

**Zadanie 35.** Oblicz odległość:

$$a) \text{ punktu } A = (2, 0, 3) \text{ od płaszczyzny } \pi : 2x - 3y + z + 1 = 0,$$

$$b) \text{ płaszczyzn równoległych } \pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0, \pi_2 : 2x - 6y + 4z = 0,$$

$$c) \text{ punktu } O = (0, 0, 0) \text{ od prostej } l : \frac{x-1}{2} = -y - 1 = \frac{z-3}{-2},$$

$$d) \text{ prostych równoległych } l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ oraz } l_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z = 6s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$e) \text{ prostych skośnych } l_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

$$f) \text{ prostej } l : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ od płaszczyzny } \pi : x + y - z + 7 = 0.$$

**Zadanie 36.** Dany jest czworościan o wierzchołkach  $O = (0, 0, 0), A = (0, 0, 1), B = (2, 0, 0), C = (1, 4, 3)$ . Oblicz:

a) długość wysokości czworościanu poprowadzonej z wierzchołka  $A$ ,

b) długość wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonej z wierzchołka  $C$ ,

c) odległość prostych  $l_{BC}$  i  $l_{OA}$  (ozn.  $l_{BC}$  - prosta przechodząca przez  $B$  i  $C$ ),

d) miarę kąta przy wierzchołku  $C$  w trójkącie  $ABC$ .

**Zadanie 37.** Dane są dwie płaszczyzny  $\pi_1 : 2x - 3y + z = 0$  oraz  $\pi_2 : 4x - 6y + 2z - 3 = 0$ .

- Jakie jest wzajemne położenie tych płaszczyzn?
- Jaka jest odległość między nimi?
- Napisz równanie płaszczyzny równoległej do płaszczyzn  $\pi_1, \pi_2$  i jednakowo od każdej z nich oddalonej.

**Zadanie 38.** Zbadaj wzajemne położenie prostych.

$$a) k : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad l : \begin{cases} x = s \\ y = -3 + s \\ z = -1 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

$$b) k : \begin{cases} 3y - z + 1 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}, \quad l : \frac{x-2}{3} = -y = \frac{z-1}{2}.$$

**Zadanie 39.** Oblicz miarę kąta między:

$$a) \text{prostą } l : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ i płaszczyznę } \pi : x + y + 2z - 3 = 0,$$

b) prostą przechodzącą przez punkty  $A = (3, 0, -1), B = (2, -1, 2)$  i prostą przechodzącą przez punkty  $C = (-2, 1, 1), D = (3, 1, 3)$ ,

$$c) \text{płaszczyznami } \pi_1 : 2x + 3y - z - 1 = 0, \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t \\ z = 2t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 40.** Dana jest prosta  $l : \begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0 \\ x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ . Jak wygląda równanie pęku płaszczyzn przechodzących przez prostą  $l$ ?

**Zadanie 41.** Wyznacz rzut prostokątny:

a) punktu  $P = (3, 2, -1)$  na płaszczyznę  $\pi : 2x - y + 3z = 0$ ,

$$b) \text{punktu } P = (0, 2, 3) \text{ na płaszczyznę } \pi : \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 2t - s \\ z = t + 3s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R},$$

c) punktu  $P = (1, 1, 1)$  na prostą  $l : 2x = 4y + 8 = 4 - 4z$ ,

$$d) \text{punktu } P = (0, 2, 2) \text{ na prostą } l : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

e) prostej  $l : \frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-6}{8}$  na płaszczyznę  $\pi : x + y + z = 0$ ,

f) prostej  $l : \frac{x+2}{3} = \frac{1}{2}y = 3 - z$  na płaszczyznę  $\pi : 3x + 2y - z + 2 = 0$ ,

g) prostej  $l : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$  na płaszczyznę  $\pi$  poprowadzoną przez prostą  $k : \begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0 \\ x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$  równoległą do  $l$ .

**Zadanie 42.** Wyznacz rzut ukośny:

a) punktu  $P = (1, 2, -2)$  na płaszczyznę  $\pi : x + y - 4z - 6 = 0$  wzdłuż wektora  $\vec{v} = [-1, 3, 0]$ ,

b) punktu  $P = (2, 6, 2)$  na płaszczyznę  $\pi : 2x - y + 3z + 7 = 0$  wzdłuż wektora  $\vec{v} = [8, -2, -6]$ ,

$$c) \text{punktu } P = (3, 1, 0) \text{ na prostą } : \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 5 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ wzdłuż wektora } \vec{v} = [2, -3, 1],$$

d) punktu  $P = (-2, 2, 1)$  na prostą  $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$  wzdłuż wektora  $\vec{v} = [-1, -1, 1]$ .

**Zadanie 43.** Napisz równanie prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $A = (1, 0, -1)$ , równoległej do płaszczyzny  $\pi : 3x - 2y - 3z + 3 = 0$  i przecinającej prostą  $k : x - 2 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{2}$ .

**Zadanie 44.** a) Dokonaj translacji punktu  $P = (1, 2, 3)$  o wektor  $\vec{v} = [2, 3, 7]$ .

b) Dane są dwa punkty  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  oraz  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ . Znajdź współrzędne punktu  $S$ , który jest środkiem odcinka  $\overline{P_0P_1}$ .

c) Dany jest punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  oraz płaszczyzna  $\pi : 3x - 5y - 2z = 0$ . Znajdź współrzędne punktu  $P'$ , który jest punktem symetrycznym do  $P_0$  względem płaszczyzny  $\pi$ .

d) Odcinek  $\overline{A'B'}$  jest odcinkiem symetrycznym do odcinka  $\overline{AB}$  względem płaszczyzny  $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ . Znajdź odcinek  $\overline{A'B'}$ , jeśli  $A = (0, -2, 1)$ ,  $B = (1, 1, 4)$ .

**Zadanie 45.** Wyznacz punkt symetryczny do punktu  $P = (2, 3, -1)$  względem:

a) punktu  $S = (1, -1, 2)$ , b) prostej  $l : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ , c) płaszczyzny  $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$ .

**Zadanie 46.** Uzasadnij, że równanie płaszczyzny  $\pi$  przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  można zapisać w postaci

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## Odpowiedzi

1. a)  $3\sqrt{6}$  b) 4 c)  $\sqrt{44}$  d)  $r$  e)  $\sqrt{21}$  2. a)  $\alpha = \frac{2}{3}$  b)  $-\hat{a} = [\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}]$

3. a)  $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$  b)  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  c)  $B = (0, -4, -9)$  d)  $\vec{v} = [\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}]$  4. a)

$\hat{u} = [\frac{5}{\sqrt{59}}, \frac{-5}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}]$  b)  $[2, -1, \frac{4}{3}]$  c)  $[0, \frac{1}{2}, 0]$  5. a) 11 b) 1 c) -1 6. a)  $t = 7 \pm 4\sqrt{3}$

b)  $t = \frac{\sqrt{3}}{6} \pm \frac{1}{2}$ ,  $s = -\frac{\sqrt{3}}{6} \mp \frac{1}{2}$  7. a)  $\arccos \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{5}}$  b)  $\arccos \frac{1}{\sqrt{540}}$  c)  $\arccos \sqrt{\frac{68}{69}}$  d)  $\frac{\pi}{3}$  e)

$\frac{\pi}{3}$  9. a)  $[-17, 3, 13]$  b)  $[3, -1, -3]$  c)  $5\vec{r} - 7\vec{q} + \vec{p}$  10. a)  $\frac{\sqrt{1178}}{2}$  b)  $\sqrt{74}$  c) 5 d)

$P = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| + \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{c}| + \frac{1}{2}|\vec{b} \times \vec{c}| + \frac{1}{2}|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})|$  e)  $P = 2|\vec{a} \times \vec{b}| + 2|\vec{a} \times \vec{c}| + 2|\vec{b} \times \vec{c}|$  11.

a) -3 b) -9 12. a)  $\vec{u} = [-32, -2, -12]$  b)  $\vec{u} = [-3, 3, 3]$  13. a)  $[-32, -448, -96]$

b) -2800 14.  $\vec{r} - 2\vec{p} + 3\vec{q}$  15. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{19}{6}$  c)  $6\sqrt{2}$  16. a), c) nie b) tak

17.  $(1, 0, 0), (0, -2, 0), (0, 0, \frac{2}{7})$  18.  $m = -\frac{2}{3}, k = 2$  19. a)  $\pi : x + y - 2z + 7 = 0$  b)

$\pi : \begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = 3 + t - s \\ z = 6 + t \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$  20. a)  $\pi : x + y - 3 = 0, \pi : \begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$

b)  $\pi : x - 24y + 6z + 5 = 0, \pi : \begin{cases} x = 1 - 3t + 6s \\ y = t + 2s \\ z = -1 + 4t + 6s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$  c)  $\pi : -x + y + 2z - 5 = 0,$

$\pi : \begin{cases} x = 2t + s \\ y = 1 + s \\ z = 2t \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$

d)  $\pi : -13x + y - 9z + 17 = 0, \pi : \begin{cases} x = 1 - 2t + s \\ y = 5 + t + 4s \\ z = 1 + 3t - s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$  e)  $\pi : x - 2y + z = 0,$

$$\pi : \begin{cases} x = 2t - s \\ y = 1 + t + s \\ z = 2 + 3s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R} \quad f) \pi : -x - 3y + 5 = 0, \pi : \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 1 + s \\ z = 3 + t - 2s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

$$g) \pi : -x + 7y + 4z - 60 = 0, \pi : \begin{cases} x = 3 + t + 3s \\ y = 5 - t + s \\ z = 7 + 2t - s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R} \quad h) \pi : -13x - y + 5z - 5 = 0, \pi :$$

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 + 2t + 3s \\ z = 4 + 3t - 2s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R} \quad i) \pi : -6x + 20y + 11z - 1 = 0, \pi : \begin{cases} x = 2 + 3t - s \\ y = -1 + 2t + 3s \\ z = 3 - 2t - 6s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

$$j) \pi : \begin{cases} x = -1 + 4t + 2s \\ y = 1 + 4t + 2s \\ z = -6t - 3s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R} \quad \mathbf{21.} \quad a) \text{ tak} \quad b) \text{ nie} \quad \mathbf{22.} \quad a) x + 4y + 3z + 4 = 0 \text{ lub}$$

$$3x - 6y + 7z + 2 = 0 \quad b) \text{ na przyk\u0142ad } x + 3y = 0 \quad \mathbf{23.} \quad \pi : -2x + y - z + 2 = 0, d(\pi, \pi_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{24.} \quad a) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad b) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad c) : \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{25.} \quad l : \begin{cases} 3x + y - z - 8 = 0 \\ -5x - 2y + 3z - 13 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{26.} \quad a)$$

$$l : \begin{cases} x = 6t \\ y = -1 - 15t \\ z = 7 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad b) l : \begin{cases} x = 2t \\ y = 6 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{27.} \quad a) l : \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{3}t \\ y = 6 - t \\ z = 4 + \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$b) l : \begin{cases} x = -3 + \frac{4}{3}t \\ y = -1 + t \\ z = 8 - \frac{7}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{28.} \quad a) (0, 3, 10), (\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0), (\frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2}) \quad b) l : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$$

$$c) \text{ na przyk\u0142ad } l : \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{29.} \quad B = -5 \quad \mathbf{30.} \quad a) \text{ tak oba} \quad b) \text{ tak}$$

$$c) \text{ tak, tak} \quad d) \text{ nie} \quad \mathbf{31.} \quad a) l : \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 - t \\ z = 6 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, l : \frac{x+2}{0} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-6}{5} \quad b)$$

$$l : \begin{cases} x = -12 + 28t \\ y = \frac{11}{2} - 22t \\ z = -11 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, l : \frac{x+12}{28} = \frac{y-\frac{11}{2}}{-22} = \frac{z+11}{-10} \quad \mathbf{32.} \quad a) \text{ tak} \quad b) \text{ nie} \quad \mathbf{33.}$$

$$a) (3, -3, 3) \quad b) (2, -3, 6) \quad c) (1, -1, 1) \quad \mathbf{34.} \quad 3\sqrt{2} \quad \mathbf{35.} \quad a) \frac{8}{\sqrt{14}} \quad b) \frac{1}{\sqrt{14}} \quad c) \frac{1}{3}\sqrt{101}$$

$$d) 3\sqrt{\frac{20}{21}} \quad e) 1 \quad f) 2\sqrt{3} \quad \mathbf{36.} \quad a) \frac{4}{5} \quad b) \sqrt{21} \quad c) 8 \quad d) \sqrt{\frac{21}{26}} \quad \mathbf{37.} \quad a) \text{ s\u0105 r\u00f3wnoleg\u0142e,}$$

$$\text{bez punkt\u00f3w wsp\u00f3lnych} \quad b) \frac{3}{2\sqrt{14}} \quad c) 2x - 3y + z - \frac{3}{4} = 0 \quad \mathbf{38.} \quad a), b) \text{ proste sko\u015bne} \quad \mathbf{39.}$$

$$a) \arcsin \frac{2}{3} \quad b) \arccos \frac{1}{\sqrt{319}} \quad c) \arccos \frac{15}{\sqrt{294}} \quad \mathbf{40.} \quad (2x + 3y + z - 8) + \lambda(x + 4y - 2z + 3) = 0,$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ parametr} \quad \mathbf{41.} \quad a) (\frac{10}{7}, -\frac{17}{14}, -\frac{19}{14}) \quad b) (\frac{133}{66}, \frac{56}{66}, \frac{217}{66}) \quad c) (\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}) \quad d) (\frac{28}{59}, -\frac{29}{59}, \frac{85}{59})$$

$$e) \begin{cases} -2x + 13y - 11z + 20 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad f) \text{ punkt } (-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}) \quad g) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 5x - 10y + 20z - 69 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{42.}$$

$$a) (\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -2) \quad b) \text{ nie istnieje, bowiem } \vec{v} \parallel \pi \text{ oraz } P \notin \pi \quad c) (-1, 7, -2) \quad d) \text{ nie istnieje,}$$

$$\text{bowiem prosta } l \text{ oraz prosta przechodz\u0105ca przez } P \text{ o kierunku } \vec{v} \text{ s\u0105 sko\u015bne} \quad \mathbf{43.} \quad l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} =$$

$$\frac{z+1}{-3} \quad \mathbf{44.} \quad a) (3, 5, 10) \quad b) S = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) \quad c) P' = (x_0 + 6t_0, y_0 - 10t_0, z_0 - 4t_0),$$

$$\text{gdzie } t_0 = -\frac{3}{38}x_0 + \frac{5}{38}y_0 + \frac{2}{38}z_0 \quad d) A = A', B' = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{13}{3}) \quad \mathbf{45.} \quad a) (0, -5, 5) \quad b)$$

$$(-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3}) \quad c) (6, 1, 1)$$