Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 6
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
listopad 2023r.

Przestrzenie wektorowe

Notacja:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	oraz $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbf{0}_V$ lub $\mathbf{0}$	wektor zerowy danej przestrzeni wektorowej V
Y^X	zbiór odwzorowań $f : X \to Y$
$\deg f$	stopień wielomianu f
$\mathrm{lin}S$	powłoka liniowa zbioru S
$v = [v_1, \ldots, v_n]_{\mathcal{B}}$	współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}$

UWAGA: $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ oraz $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$, chyba że wyszczególniono inaczej.

1 Przestrzenie wektorowe i ich podprzestrzenie

Zadanie 1. *Sprawdź, czy zbiór V wraz z podanymi działaniami jest przestrzenią liniową nad ciałem K.*

a) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zbiór ciągów liczbowych o wyrazach rzeczywistych, $K = \mathbb{R}$, z działaniami $(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$, $\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots) = (\lambda a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}_+, K = \mathbb{R}$ z działaniami $\oplus, \odot$, gdzie $x \oplus y = xy$ oraz $\alpha \odot x = x^\alpha$, dla $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $K = \mathbb{R}$, ze standardowymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę

d) $V = \{X \in K^n : AX = \mathbf{0}\}$, gdzie $A \in M_{m\times n}(K)$, tj. zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych nad ustalonym ciałem K

e) $V = W^X = \{f : X \to W\}$, gdzie $X, W \neq \varnothing$, K dowolne, z działaniami $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ dla $f, g \in V, \lambda \in K$

f) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ z działaniami $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_2 + y_2)$, $\lambda \odot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, y_1)$ dla $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

g) V to pewne ciało, zaś $K \subset V$ to jego podciało, z działaniami dodawania i mnożenia w ciele

h) V to zbiór okręgów $O(S, r)$ o środku $S = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i promieniu $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $K = \mathbb{R}$, z działaniami $O((x_1, y_1), r_1) \oplus O((x_2, y_2), r_2) = O((x_1 + x_2, y_1 + y_2), r_1 + r_1)$, $\lambda \odot O((x_1, y_1), r_1) = O((\lambda x_1, \lambda y_1), \lambda r_1)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, $K = \mathbb{R}$ z działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę *j) $V = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami*

k) $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{C}$, z działaniami $\oplus$ - naturalne dodawanie w $\mathbb{C}$ oraz $\odot$ takim, że $\lambda \odot z = \mathrm{Re}(\lambda) \cdot z$, dla $\lambda, z \in \mathbb{C}$ (gdzie $\mathrm{Re}(\lambda) \cdot z$ to naturalne mnożenie w $\mathbb{C}$)

Zadanie 2. *Niech $(V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.*

a) Uzasadnij, że $\forall x, y, z \in V \ x + y = x + z \Rightarrow y = z$.
b) Każdy element $x \in V$ ma element przeciwny $y \in V$, czyli taki, że $x + y = \mathbf{0}$. Czy może istnieć więcej niż jeden element przeciwny do danego elementu x?

Zadanie 3. *Czy zbiór A jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$?*

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}^* \textit{ ustalone}\}$

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ *c)* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, z = 0\}$ *e)* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y + z = 0\}$

f) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xz = 1 \vee yz = 0\}$

Zadanie 4. *Czy zbiór Y jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}[x]$?*

a) $Y = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 1\}$ *b)* $Y = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 0\}$

c) $Y = \{f \in \mathbb{R}[x] : -3f(1) + 2f(0) = 0\}$

d) $Y = \{f \in \mathbb{R}[x] : \textit{dla}\, k \in \mathbb{N}\, \textit{ustalonego}\ f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = 0\}$

e) $Y = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f)\, \textit{jest parzysty}\}$ *f)* $Y = \{f \in \mathbb{R}[x] : f'(1) = 0\}$

Zadanie 5. *Czy zbiór Z jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V?*

a) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $Z = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Z to podzbiór ciągów zbieżnych do ustalonego $g \in \mathbb{R}$

c) $V = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 4y^2 = 0\}$

d) $V = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, $Z = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1)\}$

e) $V = (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, $Z = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : \int_a^b f(x)dx = 0\}$

f) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, Z to podzbiór ciągów ograniczonych

g) $V = (\mathbb{R}_3[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $Z = \{f \in \mathbb{R}_3[x] : \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)\}$

h) $V = (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, $Z = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

i) $V = (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot),\ Z = \Big\{A \in M_{2\times 2} :\ \det(A) = 0\Big\}$

j) $V = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot),\ Z = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(7) = 0\}$

k) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot),\ Z = \{f \in \mathbb{R}[x] :\ \deg(f) \geq 2\} \cup \{wielomian\, zerowy\}$

l) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot),\ Z = \{f \in \mathbb{R}[x] :\ \deg(f) = n,\ n \in \mathbb{N}\, ustalone\}$

m) $V = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot),\ Z = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f'(x) - \sqrt{f(x)} = 0\}$

n) $V = (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot),\ Z = \Big\{A \in M_{2\times 2} :\ A + A^T = \boldsymbol{0}\Big\}$

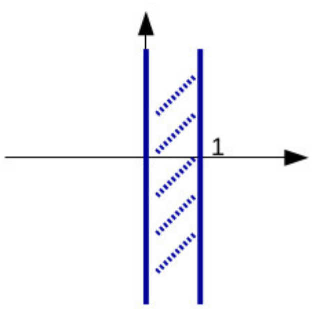
o) $V = \mathbb{R}^2,\ Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ln(1 - x^2 + y^2) \geq 0\}$

p) $V = \mathbb{R}^4,\ Z = \{(2x, x + y, 0, 1) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$

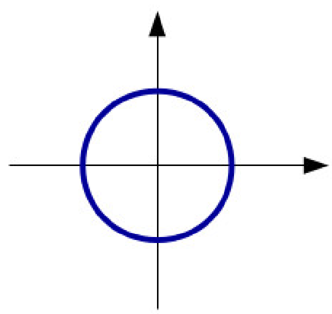
q) $V = \mathbb{R}^4,\ Z = \{(x, y, z, t) :\ (x + z)^2 = 2(x^2 + z^2)\}$

Zadanie 6. *Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi płaszczyzny* $\mathbb{R}^2$*?*

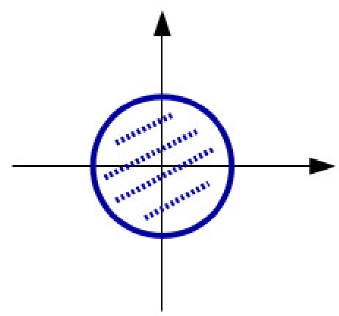
a)



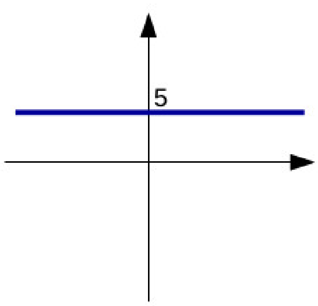
b)



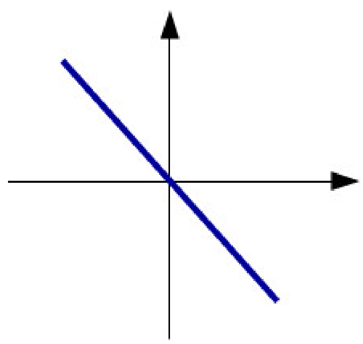
c)



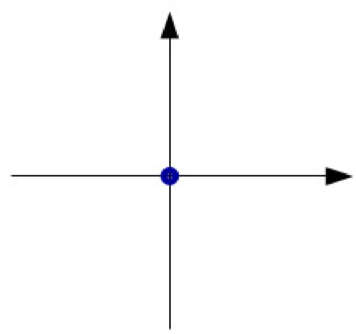
d)



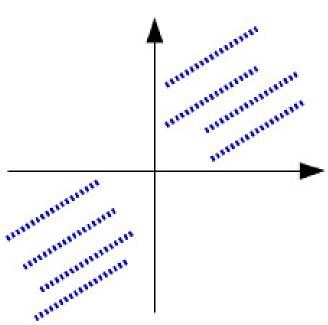
e)



f)



g)



Zadanie 7. *Które z następujących zbiorów macierzy kwadratowych stopnia n są podprzestrzeniami przestrzeni $M_{n\times n}(K)$?*

a) macierze symetryczne   b) macierze osobliwe   c) macierze nieosobliwe

d) macierze antysymetryczne   e) macierze ze śladem równym zero

f) macierze komutujące z ustaloną macierzą A

2 Liniowa niezależność wektorów, powłoka liniowa

Zadanie 8. *Zbadaj liniową niezależność układów wektorów w przestrzeni liniowej V.*

a) $V = \mathbb{R}^3,\ x = (1,2,3), y = (-2,-4,-6)$
b) $V = \mathbb{R}^3,\ x = (1,-1,0), y = (2,1,1), z = (3,0,2)$
c) $V = \mathbb{R}^3,\ x = (1,4,3), y = (-1,2,1), z = (0,6,4)$
d) $V = \mathbb{R}^3,\ x = (2,3,-1), y = (2,0,0), z = (0,3,1)$
e) $V = \mathbb{R}^3,\ u = (56,94,16), v = (48,67,81), w = (29,82,53), x = (74,15,38)$
f) $V = \mathbb{R}^4,\ u = (2,1,3,5), v = (1,4,-1,2), w = (3,3,1,1)$
g) $V = \mathbb{R}^6,\ u = (1,-1,2,1,1,1), v = (2,2,1,1,-2,3), w = (5,-1,7,4,2,6)$
h) $V = \mathbb{R}_2[x],\ p(x) = 1+x^2, q(x) = 1-x^2, r(x) = 1+2x$
i) $V = \mathbb{R}_3[x],\ f(x) = 8+3x+3x^2, g(x) = x+2x^2, h(x) = 2+2x+2x^2, w(x) = 8-2x+5x^2$
j) $V = \mathbb{R}_3[x],\ p(x) = x^3+2x-1, q(x) = 3x^2+x+1, r(x) = 2x^3+3x^2+5x-1, s(x) = x^3+3x^2+3x$
k) $V = \mathbb{R}_4[x],\ p(x) = x^4-x^2+x, q(x) = x^4+2x^3+x^2+1, r(x) = x^3+x+1$
l) $V = M_2(\mathbb{R});\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
m) $V = M_2(\mathbb{R}),\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
n) $V = M_2(\mathbb{R}),\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$
o) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+},\ f(x) = e^x, g(x) = \ln x$
p) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(x) = e^x, g(x) = e^{2x}, h(x) = e^{3x}$
q) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(x) = x, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$
r) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R});\ f(x) = 2^x, g(x) = 4^x, h(x) = 8^x$
s) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R});\ f(x) = 2+7\cdot 4^x, g(x) = 4+5\cdot 4^x+3\cdot 5^x, h(x) = 4-4^x+5^{x+1}$
t) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R});\ f(x) = 1, g(x) = \cos x, h(x) = \sin x$
u) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R});\ f(x) = 1, g(x) = \cos x, h(x) = \cos 2x, w(x) = \cos^2 x$

Zadanie 9. *a) Dla jakich wartości $p \in \mathbb{R}$ układ wektorów $u = (1,0,2,1,2), v = (2,1,1,2,1), w = (5,1,7,5,p) \in \mathbb{R}^5$ jest liniowo niezależny?*
b) Dla jakich wartości $p \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathrm{lin}\{(2,1,0,p),(0,1,2,2),(0,1,1,2),(p,0,2,p)\} = \mathbb{R}^4$?

Zadanie 10. *Wektory u, v, w, x są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$. Zbadaj liniową niezależność podanych układów wektorów.*

a) $a = u - v, b = v - w, w$
b) $a = u + 2v,\ b = v - 3w,\ c = w + 6x,\ d = u - 4x$
c) $a = u + 2v + w, b = v - 3w + x, c = u - x$
d) $a = u + v + 2w - x,\ b = 2u - v + w + 3x,\ c = 4u + v + 5w + x$

Zadanie 11. *Rozważmy przestrzeń* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *rzeczywistych ciągów liczbowych. Niech* $a, b \in \mathbb{R}$ *będą liczbami ustalonymi.*

a) Uzasadnij, że zbiór $U = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}\}$ *jest podprzestrzenią liniową* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*
b) Uzasadnij, że wektory $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *takie, że* $v_1 = 0, v_2 = 1, w_1 = 1, w_2 = 0$ *są liniowo niezależne.*

Zadanie 12. *a) Czy w* $\mathbb{R}^3$ *istnieje układ czterech wektorów, który jest liniowo zależny i przy tym każde trzy wektory tego układu są liniowo niezależne?*
b) Uzasadnij, że w $\mathbb{R}^2$ *dowolny układ trzech wektorów jest liniowo zależny.*
c) Czy każdy układ liniowo zależny musi zawierać podukład liniowo zależny i podukład liniowo niezależny?
d) Czy część wspólna dwóch liniowo niezależnych układów wektorów może (a może musi) być układem liniowo niezależnym?
e) Podaj przykłady na to, że suma dwóch układów liniowo niezależnych może być układem liniowo zależnym jak również może być układem liniowo niezależnym.

Zadanie 13. *Wektory* $(1,2,3), (1,3,5)$ *przedstaw na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów* $(2,0,6), (0,1,0), (1,-1,3)$.

Zadanie 14. *Rozważmy przestrzeń wektorową* $\mathbb{R}^4$*. Czy jest prawdą,że:*

a) $(4,6,4,5) \in \operatorname{lin}\{(1,4,6,5),(5,6,2,4)\}$, *b)* $(3,4,3,7) \in \operatorname{lin}\{(1,4,5,3),(7,6,2,10)\}$*?*

Zadanie 15. *Rozważmy* $W_1 = \operatorname{lin}\{(1,4,5),(8,7,0)\}$, $W_2 = \operatorname{lin}\{(3,7,7),(0,5,8)\}$ *podprzestrzenie* $\mathbb{R}^3$*. Uzasadnij, że* $W_1 = W_2$*.*

Zadanie 16. *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową oraz niech* $x, x_1, \ldots, x_n \in V$*. Uzasadnij, że* x *jest kombinacją liniową elementów* $x_1, \ldots, x_n$ *wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\operatorname{lin}\{x, x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Zadanie 17. *Opisz słownie lub geometrycznie zbiór* $\operatorname{lin}A$.

a) $A = \{(1,3,1),(0,5,2)\} \subset \mathbb{R}^3$ *b)* $A = \{x, x^3, x^5, x^7\} \subset \mathbb{R}[x]$

c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Zadanie 18. *Czy podane układy wektorów generują przestrzeń* $\mathbb{R}^3$*?*

a) $u = (1,3,5), v = (2,7,5), w = (1,1,9)$ *b)* $u = (1,4,5), v = (3,2,1), w = (5,5,4)$

Zadanie 19. *Wskaż generatory przestrzeni liniowej V.*

a) $V = \{(x-3y, x+y+7z, y-5z, 2x+4z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$

b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-1}\}$ *c)* $V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$

Zadanie 20. *Podaj przykład struktury zamkniętej na kombinacje liniowe, a mimo to nie będącej przestrzenią wektorową.*

Zadanie 21. *Niech $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci*

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & & \ldots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

*nazywamy **macierzą Wrońskiego**, a jej wyznacznik **wrońskianem**.*

a) Uzasadnij, że jeśli $\det W(x)$ *nie zeruje się tożsamościowo na* $\mathbb{R}$ *(tzn.* $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W(x_0) \neq 0$*), to funkcje* $f_1, \ldots, f_n$ *są liniowo niezależne w* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

b) Podaj przykład na to, że twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe, tzn. istnieją funkcje liniowo niezależne w $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ *i takie, że* $\det W(x)$ *zeruje się na* $\mathbb{R}$.

c) Korzystając ze sformułowanego w podpunkcie a) kryterium liniowej niezależności funkcji uzasadnij, liniową niezależność następujących układów funkcji:

$$\{e^{-x}, 1, e^x\}, \qquad \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}.$$

3 Baza i wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne wektora w bazie

Zadanie 22. *Korzystając z definicji zbadaj, czy podane zbiory wektorów $\mathcal{B}$ są bazami podanych przestrzeni wektorowych V.*

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,2,2)\}$ *b)* $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(2,0,2), (2,4,4), (4,4,6)\}$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,2,2), (0,1,1)\}$ *d)* $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{x^2 - x + 1, 2x+1, 2x-1\}$

e) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{x + x^2, x - x^2\}$ *f)* $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$

Zadanie 23. *a) Czy baza przestrzeni wektorowej może zawierać wektor zerowy?*
b) Baza przestrzeni wektorowej V to podzbiór V. Czy baza może być równa V?
c) Uzasadnij, że jeśli przestrzeń liniowa jest wymiaru n, to wówczas dowolny układ n liniowo niezależnych wektorów tej przestrzeni jest jej bazą.
d) Niech V będzie przestrzenią wektorową i niech układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ będzie bazą tej przestrzeni. Uzasadnij, że wówczas wektory

$v_1 = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + \ldots + \alpha_{n1} b_n$, $v_2 = \alpha_{12} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \ldots + \alpha_{n2} b_n$, $\ldots$ $v_n = \alpha_{1n} b_1 + \alpha_{2n} b_2 + \ldots + \alpha_{nn} b_n$

tworzą bazę przestrzeni V wtedy i tylko wtedy gdy $\det\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \neq 0.$

Zadanie 24. *Czy podany układ wektorów jest bazą przestrzeni liniowej V?*
a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (3,2,0), v_2 = (4,2,-1), v_3 = (1,2,2)$
b) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (1,2,2,1), v_3 = (5,4,4,5), v_4(0,0,1,2)$
c) $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (3,2), v_2 = (7,2)$
d) $V = \mathbb{R}_2[x]$; $\quad p(x) = 2 + x^2, q(x) = 1 - x, r(x) = 1 + x + x^2$
e) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$; $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 25. *a) Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układ $\mathcal{B} = \{(p-2,-p),(3,2+p)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$?*

b) W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadaj liniową niezależność wektorów $u = (1,0,1,1), v = (2,2,2,0), w = (-1,2,3,1)$ i przedstaw wektor $x = (-3,4,9,5)$ jako kombinację liniową wektorów u, v, w. Czy dowolny wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^4$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów u, v, w?

c) Wykaż, że wektory $u_1 = (1,2,-1), u_2 = (0,-1,1), u_3 = (1,1,1)$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Oblicz współrzędne wektorów $v_1 = (1,2,5), v_2 = (0,-1,1), v_3 = (3,2,5)$ w tejże bazie.

d) Wykaż, że $f_1 = 2$, $f_2 = x+3$, $f_3 = 2x^2+1$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$. Oblicz współrzędne $p = x^2 - x$, $q = 1$ w tejże bazie.

e) Wykaż, że $p = 1 + 2x + 3x^2$, $q = 1 + 7x^2$, $r = 4x^2$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$. Oblicz współrzędne $w = 2x - x^2$ w tejże bazie.

f) Wykaż, ze układ $\{(2i,1,0),(2,-i,1),(0,1+i,1-i)\}$ stanowi bazę przestrzeni $(\mathbb{C}^3,+,\mathbb{C},\cdot)$. Znajdź współrzędne wektora $(1,0,1)$ w tejże bazie.

g) Wyznacz współrzędne $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *w bazie*

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Zadanie 26. *Niech $\{b_1, b_2, b_3\}$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V. Zbadaj, czy podane układy wektorów również są bazami przestrzeni V.*

a) $u_1 = b_1 - 2b_2 + b_3, u_2 = 2b_1 - b_2, u_3 = b_1 + b_2 - b_3$

b) $u_1 = b_1 - 2b_2 + b_3, u_2 = 2b_1 - b_2, u_3 = 3b_2 + b_3$

Zadanie 27. *Wskaż bazę przestrzeni liniowej i określ jej wymiar.*

q) $V = (\mathbb{C}^2,+,\mathbb{C},\cdot)$ *oraz* $W = (\mathbb{C}^2,+,\mathbb{R},\cdot)$
Zauważ, że wymiar przestrzeni $\mathbb{C}^2$ ***zależy do tego nad jakim ciałem ją rozpatrujemy.***

b) $V = \{(-t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

c) $V = \{(2x, x+y, 3x-y, x-2y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$

d) $V = \{(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) : r, s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

e) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z-y\}$

f) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+3z = y-2z+t = x+y+z = 0\}$

g) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x-y+3z-3t = 0 \wedge 4x-4y+11z-9t = 0\}$

h) $V = \mathrm{lin}\{a = (3,2,0),\ b = (4,2,-1),\ c = (1,0,-1),\ d = (1,2,2),\ e = (2,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

i) $V = W_1 \cap W_2$; $W_1 = \mathrm{lin}\{(0,1,0,1), (1,2,3,0)\}$, $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x-y-z+7t = 0\}$

j) V *generowana przez wektory wierszowe macierzy* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

k) $V = \mathrm{lin}\{x^3+2x^2+x,\ x^2-x+1,\ x^3+x^2,\ x^3-x,\ 2x^2-1\} \subset \mathbb{R}_3[x]$

l) $V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1)+p(-1) = p'(0)\}$

m) $V = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : A + A^T = \boldsymbol{0}\}$

n) $V = \mathrm{lin}\Big\{A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\Big\} \subset M_2(\mathbb{R})$

o) $V = \mathrm{lin}\Big\{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\Big\} \subset M_{3\times2}(\mathbb{R})$

p) V *- zbiór wielomianów* $p \in \mathbb{R}_6[x]$ *podzielnych przez* $q = x-1$

q) $V = \mathrm{lin}\{1, \sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$

<u>Zadanie</u> 28. *a) Niech* $U = \mathrm{lin}\{1-x^2+x^3, 1+2x+x^3, 3+x-x^2+x^3, -2+3x+2x^2\} \subset \mathbb{R}_3[x]$. *Wskaż bazę przestrzeni* U *i określ* $\dim U$. *Czy* $p = x^3+x-1$ *należy do* U*?*

b) Niech $U = \mathrm{lin}\{p = x^4-x^2+x, q = x^4+2x^3+x^2+1, r = x^3+x+10\} \subset \mathbb{R}_4[x]$. *Wskaż bazę przestrzeni* U *i określ* $\dim U$. *Czy* $w = 3x^4+3x^3+x^2-8$ *należy do* U*? Jeśli tak, wyznacz jego współrzędne w bazie przestrzeni* U.

<u>Zadanie</u> 29. *a) Dla jakich* $a \in \mathbb{R}$ *układ wektorów* $p = x^2-2x+3, q = 2x^2-x+1, r = x^2+ax+a^2$ *jest bazą przestrzeni* $\mathbb{R}_2[x]$*?*
b) Przyjmij $a = 0$ *i wyznacz współrzędne wektora* $w = x^2-5x+7w$ *bazie* (p, q, r).

<u>Zadanie</u> 30. *Wektory u, v, w, x są liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$. Określ wymiary podprzestrzeni liniowych generowanych przez podane układy wektorów w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.*

a) $a = 2pu + 3pv + 5pw,\ b = u + pv + (1+p)w,\ c = pu + v + (1+p)w$
b) $a = 3u - pv + 3w - px,\ b = u + v + w + x,\ c = 4u + 4v + pw + px$

<u>Zadanie</u> 31. *Symbolem $\dim_K V$ oznaczamy wymiar przestrzeni wektorowej V rozpatrywanej nad ciałem K. K oznacza ciało dowolne. Uzasadnij poniższe równości:*

a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ *b)* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1$ *c)* $\dim_K M_{m\times n}(K) = m \cdot n$ *d)* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \infty$

e) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{47} = 94$ *f)* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\infty} = \infty$ *g)* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}([0,1]) = \infty$

<u>Zadanie</u> 32. *Czy podane zbiory to podprzestrzenie przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_n[x]$? Jesli tak, wskaż ich bazy i określ wymiar.*

a) wielomiany których pierwiastkiem jest ustalona liczba $a \in \mathbb{R}$
b) wielomiany których pierwiastkami są ustalone liczby $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$
c) wielomiany dla których ustalone $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem pojedynczym

<u>Zadanie</u> 33. *Niech $A = \mathrm{lin}\{f, f', f'', \ldots\}$. Podaj przykład funkcji $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ takiej, że:*

a) $\dim A = 1$ *b)* $\dim A = 2$ *c)* $\dim A = 3$

<u>Zadanie</u> 34. *Podane układy wektorów uzupełnij do baz wskazanych przestrzeni liniowych.*

a) $\{u_1 = (2,1,0), u_2 = (1,1,1)\}$ *w* $\mathbb{R}^3$ *b)* $\{u_1 = (1,3,2,1), u_2 = (5,-4,7,1)\}$ *w* $\mathbb{R}^4$

c) $\{p_1(x) = (x-1)^2, p_2(x) = x^3 - 5x, p_3(x) = 1 - 4x + 2x^2\}$ *w* $\mathbb{R}_3[x]$

<u>Zadanie</u> 35. *Korzystając z definicji, wyznacz współrzędne wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{B}'$ przestrzeni liniowej V, jeśli dane są jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$.*

a) $v = [0,1,-2]_{\mathcal{B}},\ \mathcal{B} = \Big(b_1, b_2, b_3\Big),\ \mathcal{B}' = \Big(b_1, b_1 - b_2, b_1 - b_3\Big),\ V = \mathbb{R}^3$

b) $v = [3,2,1]_{\mathcal{B}},\ \mathcal{B} = \Big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\Big),\ \mathcal{B}' = \Big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\Big),\ V = \mathbb{R}^3$

c) $v = [3,1,8]_{\mathcal{B}},\ \mathcal{B} = \Big(1, x, x^2\Big),\ \mathcal{B}' = \Big(1, 1+x, 1+x+x^2\Big),\ V = \mathbb{R}_2[x]$

d) $v = [1,1,-2]_{\mathcal{B}},\ \mathcal{B} = \Big(x, x+1, x^2+1\Big),\ \mathcal{B}' = \Big(1, 1+x^2, x+x^2\Big),\ V = \mathbb{R}_2[x]$

<u>Zadanie</u> 36. *Wyznacz współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych V.*

a) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x - y = z + 3t\},\ v = (1,1,-2,1)$

b) $V=\{p\in\mathbb{R}_2[x]:\ p'(3)=0\}$, $v(x)=4x^2-24x-3$

c) $V=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}):\ A=A^T\}$ *macierze symetryczne stopnia 2,* $B=\begin{bmatrix}2&3\\3&-1\end{bmatrix}$

Zadanie 37. *Wyznacz takie bazy* $\mathcal{B}$ *odpowiednich przestrzeni wektorowych, w których podane wektory* v *mają wskazane współrzędne.*

a) $v=(3,-5)\in\mathbb{R}^2$, $v=[5,-2]_{\mathcal{B}}$ *b)* $v=(1,0,1,0)\in\mathbb{R}^3$, $v=[1,-2,4,-1]_{\mathcal{B}}$

c) $v=(1,2,3,-6)\in V$, $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ x+y+z+t=0\}$, $v=[1,0,0,0]_{\mathcal{B}}$

d) $v(x)=x^2-2x\in\mathbb{R}_2[x]$, $v=[-1,3,1]_{\mathcal{B}}$

Zadanie 38. *Czy istnieje baza* $\mathcal{B}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *taka, że*

$$(1,2,1)=[1,1,-1]_{\mathcal{B}},\ (1,1,2)=[1,1,0]_{\mathcal{B}},\ (1,1,0)=[0,1,-1]_{\mathcal{B}}\quad ?$$

Zadanie 39. *Zapisz macierz przejścia* $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ *od bazy* $\mathcal{B}$ *do bazy* $\mathcal{B}'$ *dla przestrzeni wektorowej* V.

a) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$, $\mathcal{B}'=\Big((3,3,4),(-1,2,2),(1,1,1)\Big)$

b) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\Big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\Big)$, $\mathcal{B}'=\Big((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\Big)$

c) $V=\mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B}=\Big(1,x,x^2,x^3\Big)$, $\mathcal{B}'=\Big(2x^2-3,x^3+x,4-x,1+x+x^2\Big)$

d) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B}=\Big(x+1,x+2,x^2+1\Big)$, $\mathcal{B}'=\Big(x+3,x+4,x^2\Big)$

Zadanie 40. *Dana jest baza* $\mathcal{B}'=\Big(b_1'=(1,1,1),b_2'=(1,0,0),b_3'=(1,2,0)\Big)$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *oraz macierz przejścia od pewnej bazy* $\mathcal{B}$ *do bazy* $\mathcal{B}'$. *Wyznacz bazę* $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Zadanie 41. *Wykorzystując macierz przejścia* $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ *od bazy* $\mathcal{B}$ *do bazy* $\mathcal{B}'$ *wyznacz współrzędne podanych wektorów w bazie* $\mathcal{B}'$, *jeśli podano ich współrzędne w bazie* $\mathcal{B}$.

a) $\mathcal{B}$ *baza standardowa w* $\mathbb{R}^2$, $v=[2,-1]_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}'=\Big((5,3),(-2,7)\Big)$

b) $\mathcal{B}=\Big(b_1=x^2,b_2=x,b_3=1\Big)$ *baza* $\mathbb{R}_2[x]$, $v(x)=x^2+x+2$, $\mathcal{B}'=\Big(x^2-1,x^2+1,2-2x\Big)$

c) $\mathcal{B}$ *baza standardowa w* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}$, $\mathcal{B}'=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\right)$

d) $V=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\Big((2,1),(1,0)\Big)$, $\mathbb{R}^2\ni v=[1,-2]_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}'=\Big((-1,1),(1,1)\Big)$

Zadanie 42. *Niech* $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ 2x-y=z+3t\}$.

a) Uzasadnij, że U *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathbb{R}^4$.
b) Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni U.
c) Czy $v=(5,11,-2,1)\in U$*? Jeśli tak, podaj współrzędne wektora* v *w bazie przestrzeni* U.

Zadanie 43. *a) Sprawdź, że układ wektorów* $p' = 3x^2 - x, q' = 2x^2 + x - 1, r' = x^2 + 5x - 6$ *tworzy bazę przestrzeni* $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Wyznacz macierz przejścia $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ *od bazy* $\mathcal{B} = \Big(p = x^2,\ q = x,\ r = 1\Big)$ *do bazy* $\mathcal{B}' = \Big(p', q', r'\Big)$.
c) Wyznacz współrzędne wektora $w = 2x^2 + x$ *w bazie* $\mathcal{B}'$.

Zadanie 44. *Rozważmy przestrzeń wektorową* $\mathbb{R}_3[x]$ *i jej bazę* $\mathcal{B} = \Big(b_1 = 1 + x, b_2 = 1 - x, b_3 = x^2 + x^3, b_4 = x^2 - x^3\Big)$ *oraz* $p(x) = 1 - x + 3x^2 - x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.
a) Wyznacz współrzędne p *w bazie* $\mathcal{B}$
b) Znajdź taką bazę $\mathcal{B}'$ *przestrzeni* $\mathbb{R}_3[x]$, *że* $p = [1, 0, 2, 0]_{\mathcal{B}'}$.

Zadanie 45. *Dana jest baza* $\mathcal{B} = \Big(b_1, b_2, b_3\Big)$ *przestrzeni* $\mathbb{R}$*-liniowej* V.
a) Uzasadnij, że układ $\mathcal{B}' = \Big(b_1, b_1 - b_2, b_1 - b_3\Big)$ *jest bazą* V.
b) Wyznacz współrzędne wektora v *w bazie* $\mathcal{B}'$, *jeśli* $v = [0, 1, -2]_{\mathcal{B}}$.

Odpowiedzi

1. *tak: a), b), c), d), e), g) nie: f), h), i), j), k)* **2.** *b) nie może* **3.** *tak: d), e) nie: a), b), c), f)* **4.** *tak: b), c), d), f) nie: a), e)* **5.** *tak: a), d), e), f), g) h), j), n), o), q) nie: b) (chyba że g=0, wtedy to podprzestrzeń), c), i), k), l), m), p)* **6.** *tak: e), f) nie: a), b), c), d), g)* **7.** *podprzestrzenie: a), d), e), f)* **8.** *liniowo niezależne są: b), d), f), h), k), n), o), p), q), r), t), u),* **9.** *a)* $p \neq 7$ *b)* $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ **10.** *d) liniowo zależne a), b), c) liniowo niezależne* **11.** *a), b) tak* **12.** *a) tak, np.* $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ *c) tak, zbiór pusty i cały układ d) Część wspólna zawsze jest układem liniowo niezależnym. e) Np. w* $\mathbb{R}^3$ *mamy* $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $T = \{(2, 0, 0)\}$, $S \cup T$ *liniowo zależny Np. w* $\mathbb{R}^2$ *mamy* $S = \{(1, 0)\}$, $T = \{(0, 1)\}$, $S \cup T$ *liniowo niezależny* **13.** $(1, 2, 3) = \frac{1-\gamma}{2} \cdot (2, 0, 6) + (2+\gamma) \cdot (0, 1, 0) + \gamma \cdot (1, -1, 3)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. *Dla* $(1, 3, 5)$ *nie ma takiego przedstawienia.*
14. *a) tak b) nie* **17.** *a) płaszczyzna* $\pi : \begin{cases} x = s \\ y = 3s + 5t \\ z = s + 2t \end{cases}$, $s, t \in \mathbb{R}$ *b) wielomiany stopnia nie większego niż* 7 *określające funkcje parzyste c) macierze symetryczne stopnia* 2 **18.** *a) tak b) nie* **19.** *a)* $V = \operatorname{lin}\{(1, 1, 0, 2), (-3, 1, 1, 0), (0, 7, -5, 4)\}$ *b)* $V = \operatorname{lin}\{(3, 5, -1)\}$ *c)* $V = \operatorname{lin}\{x^4 - 4x + 7, x^3 - 3x + 5, x^2 - 4x + 7\}$ **20.** *Na przykład* $\mathbb{R}^2$ *z działaniami* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (0, 0)$, $\lambda \cdot (x_1, y_1) = (0, 0)$. *Wówczas* $1 \cdot (1, 1) = (0, 0) \neq (1, 1)$. **21.** *b)* $f_1(x) = \begin{cases} x^2 & dla \quad x < 0 \\ 0 & dla \quad x \geq 0 \end{cases}$, $f_1(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x < 0 \\ x^2 & dla \quad x \geq 0 \end{cases}$ **22.** *bazy: c), d), f)* **23.** *a) nie b) nie* **24.** *a), b), d), e) nie c) tak* **25.** *a)* $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$ *b)* $x = 2u - v + 3w$, *dowolnego wektora nie można otrzymać jako kombinację* u, v, w *c)* $v_1 = (-5, -6, 6)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 4)$ *d)* $p = (-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$, $q = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
f) $(1, 0, 1)$ *ma w tej bazie współrzędne* $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)$ *g)* $A = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1)_{\mathcal{B}}$ **26.** *a) Są liniowo zależne, więc nie tworzą bazy. b) Tworzą bazę.* **27.** *a) baza* V *to* $\{(1, 0), (0, 1)\}$, $\dim V = 2$, *baza* W *to* $\{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$, $\dim W = 4$ *b) baza* $\{(-1, 0, 1)\}$, $\dim V = 1$ *c) baza* $\{(2, 1, 3, 1), (0, 1, -1, -2)\}$, $\dim V = 2$ *d) baza* $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 4)\}$, $\dim V = 2$ *e) baza* $\{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim V = 3$ *f) baza* $\{(-3, 2, 1, 0)\}$, $\dim V = 1$ *g) baza*

$\{(1,1,0,0),(-6,0,3,1)\}$, $\dim V=2$ *h)* $\dim V=2$, *baza* $\{a,b\}$ *i)* *baza* $\{(3,7,9,1)\}$, $\dim V=1$ *j)* $\dim(\text{lin}(u,v,w,x))=2$, *baza* $\{(1,-1,1,-1),(1,2,0,1)\}$ *k)* $\dim(\text{lin}(p,q,r,s,t))=4$, *baza* $\{p,q,r,t\}$ *l)* *baza* $\{x^4+2x,x^3,x^2+2x,2x+1\}$, $\dim V=4$ *m)* *baza* $\left\{\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\right\}$, $\dim V=3$ *n)* $\dim V=3$, *baza* $\{A,B,D\}$ *o)* $\dim V=4$, *baza* $\{A,B,C,D\}$ *p)* *baza* $\{x^6-x^5,x^5-x^4,x^4-x^3,x^3-x^3,x^2-x,x-1\}$, $\dim V=6$ *q)* *baza* $\{\sin^2 x,\cos^2 x\}$, $\dim V=2$ **28.** *a)* *baza* $\{1-x^2+x^3,x+2x^2-2x^3,-3x^2+4x^3\}$, $\dim U=3$, $p\in U$ *b)* *reper bazowy* (p,q,r), $\dim U=3$, $w\in U$, $w=p+2q-r$ **29.** *a)* *dla* $a\neq\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$ *b)* $w=2p+q-3r$ **30.** *a)* 2 *dla dowolnego* p *b)* 3 *dla* $p\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$, 2 *dla* $p\in\{-3,4\}$ **32.** *a) podprzestrzeń, baza* $\{x-a,\ (x-a)x,,\ldots,(x-a)x^{n-1}\}$, *wymiar* n *b) podprzestrzeń, baza* $\{(x-a_1)\ldots(x-a_k),\ (x-a_1)\ldots(x-a_k)x,,\ldots,(x-a_1)\ldots(x-a_k)x^{n-k}\}$, *wymiar* $n-k+1$ *c) to nie podprzestrzeń* **33.** *a)* $f(x)=e^x$ *b)* $f(x)=\sin x$ *c)* $f(x)=x^2$ **34.** *a)* $u_3=(0,0,1)$ *b)* $u_3=(0,0,1,0),u_4=(0,0,0,1)$ *c)* $p_4(x)=x$ **35.** *a)* $v=[-1,-1,2]_{\mathcal{B}'}$ *b)* $v=[4,2,1]_{\mathcal{B}'}$ *c)* $v=[2,-7,8]_{\mathcal{B}'}$ *d)* $v=[3,-4,2]_{\mathcal{B}'}$ **36.** *a)* $v=(1,-2,1)$ *b)* $v=(4,-3)$ *c)* $B=(2,3,-1)$ **37.** *a)* $\mathcal{B}=\{(\frac{3}{5},0),(0,\frac{5}{2})\}$ *b)* $\mathcal{B}=\{(1,1,1,1),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}),(0,0,0,1)\}$ *c)* $\mathcal{B}=\{(1,2,3,-6),(1,0,0,-1),(0,1,0,-1)\}$ *d)* $\mathcal{B}=\{2x,\frac{1}{3}x^2-1,-3\}$ **38.** *tak,* $\mathcal{B}=\big((0,1,1),(1,0,1),(0,-1,1)\big)$ **39.** *a)* $P=\begin{bmatrix}3&-1&1\\3&2&1\\4&2&1\end{bmatrix}$ *b)* $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$ *c)* $P=\begin{bmatrix}-3&0&4&1\\0&1&-1&1\\2&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ *d)* $P=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&3&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ **40.** $\mathcal{B}=\{b_1=(1,-1,1),b_2=(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}),b_3=(\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3})\}$ **41.** *a)* $(\frac{12}{41},-\frac{11}{41})$ *b)* $(-1,2,-\frac{1}{2})$ *c)* $(1,-2,1,1)$ *d)* $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ **42.** *b)* *baza* $\mathcal{B}=\{b_1=(1,2,0,0),b_2=(0,-1,1,0),b_3=(0,-3,0,1)\}$, $\dim U=3$ *c)* $v\in U$, $v=[5,-2,1]_{\mathcal{B}}$ **43.** *b)* $\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&1&5\\0&-1&-6\end{bmatrix}$ *c)* $w=\frac{1}{14}[-9,30,-5]_{\mathcal{B}'}$ **44.** *a)* $(0,1,1,2)_{\mathcal{B}}$ *b)* $\mathcal{B}'=\{1-x,1x,\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3,x^2-x^3\}$ **45.** *b)* $v=[-1,-1,2]_{\mathcal{B}'}$