Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 7
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
listopad 2023r.

Przekształcenia liniowe

Notacja:

$M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C})$	macierz odwzorowania liniowego φ w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$
$Aut(V)$	grupa automorfizmów przestrzeni liniowej V

UWAGA: $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ oraz $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$, chyba że wyszczególniono inaczej.

1 Definicja odwzorowania liniowego

Zadanie 1. *Sprawdź, czy podane przekształcenia są liniowe.*

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+2y, 2z+3y, y-5x)$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=(5x, x+2)$

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f$ *- symetria względem osi* Ox

d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f$ *- rzut prostokątny na płaszczyznę* Oxz

e) $f:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_2[x],\ \forall p\in\mathbb{R}_4[x]\ f(p)(x)=p''(x)$

f) $f:\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ \forall g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}):\ f(g)(x)=\int_a^b g(x)dx$

g) $f:M_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ \forall A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})\ f(A)=\det(A)$

h) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \forall u\in\mathbb{R}^3\ f(u)=u\circ v,$ *gdzie* $v\in\mathbb{R}^3$ *ustalony*

i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \forall u\in\mathbb{R}^3\ f(u)=u\times v,$ *gdzie* $v\in\mathbb{R}^3$ *ustalony*

j) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(u)=|u|$ *długość wektora*

k) $f:\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathcal{C}[0,1],\ \forall g\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}):\ f(g)(x)=2g(\frac{x}{2})$ *dla* $x\in[0,1]$

l) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f$ *- obrót o kąt* $\frac{\pi}{2}$ *w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół punktu* $(1,2)$

m) $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}[x],\ \forall p\in\mathbb{R}_2[x]:\ f(p)(x)=\int_0^x p(t)p'(t)dt$

n) $f:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^2,\ f\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)=(a_1,a_2)$

o) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = a + d$

p) $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $f(p)(x) = p(x+1) - p(x)$

q) $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $f(p)(x) = x \cdot p(x)$

Zadanie 2. *Odwzorowanie liniowe φ jest zadane poprzez poniższe przyporządkowania. Podaj wzór φ.*

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(1,3) = (1,1)$, $\varphi(3,7) = (5,7)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(3,4) = (3,5,7)$, $\varphi(4,5) = (4,7,9)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(1,1,1) = (1,4,6)$, $\varphi(4,5,1) = (0,3,7)$, $\varphi(4,7,4) = (1,4,9)$

d) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $\varphi(5x) = 10$, $\varphi(x+3) = 6$, $\varphi(x^2 - x) = 6x - 2$

e) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $\varphi : (x^2 + x) = 6x + 10$, $f(x-1) = 4$, $f(2x) = 8$

2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Zadanie 3. *Wyznacz jądro i obraz odwzorowania liniowego φ.*
a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *rzut prostokątny na oś Ox*
b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara*
c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *symetria względem osi Oy*
d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *rzut prostokątny na płaszczyznę Oyz*

Zadanie 4. *Wyznacz jądro i obraz odwzorowania liniowego φ, wskaż ich bazy i określ wymiary. Czy φ jesy monomorfizmem / epimorfizmem?*

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (2x - y, 3y - 6x)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x,y,z) = (2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z,t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$

d) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p)(x) = (x^2 + 2x) \cdot p'(-x),\ x \in \mathbb{R}$

e) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(a,b) = ax^2 + ax + a$

f) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z) = (x - 3y + 2z, -2x + 6y - 4z)$

g) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z,t) = (x + 2y + z - t, x + 2z + t, 2x + y + 3t)$

h) $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(A) = tr(A)$, *tzn.* $\varphi\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = a + d$

i) $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi\Big(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Big) = dx^2 + c + b + a$

j) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *odwzorowanie zerowe, tzn.* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \varphi(x,y,z) = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$

Zadanie 5. *Podaj wymiar przestrzeni* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *dla odwzorowania liniowego* φ.

a) $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$, $rank(\varphi) = 5$ *b)* $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ *epimorfizm*

c) $\varphi : V \to W$ *i macierzą* φ *pewnych bazach przestrzeni* V, W *jest* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 6. *Czy odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, $k > 0$ *może być epimorfizmem?*

Zadanie 7. *Niech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie dowolnym odwzorowaniem liniowym. Niech* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x, y - f(x))$.
a) Uzasadnij, że g *jest odwzorowaniem liniowym.*
b) Wyznacz jądro g. *Czy* g *jest izomorfizmem?*

Zadanie 8. *Niech* $\Sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Sigma\Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *gdzie* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Uzasadnij, że* $\Sigma \in Aut(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. *Podaj wzór odwzorowania odwrotnego.*

Zadanie 9. *Znajdź przykład odwzorowania liniowego* φ *spełniającego podane warunki.*

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \{(r,s,t) \in \mathbb{R}^3 : 2r = 3s = 6t\}$

b) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(x,-x,z,-z) : x, z, \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \{(s+t, s-t) : s,t \in \mathbb{R}\}$

c) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{lin}\{x-1, x^2-1\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{lin}\{x^2\}$

d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi) = \{(2t, 3t), t \in \mathbb{R}\}$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(1,2,1) = (1,1)$, $\varphi(0,1,-1) = (-2,2)$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(t,t,t) : t \in \mathbb{R}\}$

f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *takie, że* $\mathrm{Ker}(f) = U$ *oraz* $g \circ f = 0$, *gdzie* $U = \mathrm{lin}\{u_1 = (0,-1,1), u_2 = (1,0,1)\}$, $g : \mathbb{R}^2 \ni (s,t) \mapsto 3s - t \in \mathbb{R}$

3 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Zadanie 10. *Napisz macierze podanych odwzorowań liniowych względem baz standardowych rozważanych przestrzeni wektorowych.*

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *symetria względem prostej* $y = x$

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = (x+y, 3x-6y, 4x-y)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, rzut prostokątny na prostą* $l : x = 2y = 4z$

c) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$*,* $\varphi(p)(x) = (3-x)p''(x) + 4p'(x)$

d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$*,* $\varphi(x,y,z) = (x+y, x+z, y-z, y+2z)$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, rzut prostokątny na płaszczyznę* $\pi : x + 2y + 4z = 0$

f) $\varphi : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$*,* $\varphi(A) = A^T$

g) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$*,* $\varphi(p)(x) = \Big(p(0), p'(1), p''(2)\Big)$

h) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$*,* $\varphi(p)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Big[(x^2+3x+2)\cdot p(x)\Big]$

Zadanie 11. *Zapisz macierz odwzorowania liniowego* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*,* $g(x,y,z) = (2x, y+z)$ *w podanych bazach.*

a) w $\mathbb{R}^3$ *oraz w* $\mathbb{R}^2$ *bazy kanoniczne*
b) w $\mathbb{R}^2$ *baza kanoniczna, zaś w* $\mathbb{R}^3$ *baza* $\big(u_1 = (1,2,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,0,1)\big)$
c) w $\mathbb{R}^3$ *baza kanoniczna zaś w* $\mathbb{R}^2$ *baza* $\big(v_1 = (1,2), v_2 = (0,1)\big)$
d) w $\mathbb{R}^3$ *baza* $\big(u_1 = (1,2,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,0,1)\big)$*, zaś w* $\mathbb{R}^2$ *baza* $\big(v_1 = (1,2), v_2 = (0,1)\big)$

Zadanie 12. *Korzystając z definicji, zapisz reprezentacje macierzowe podanych odwzorowań liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych.*

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*,* $\varphi(x,y) = (x+y, 2x+y, x-3y)$ *w bazach* $\big(u_1 = (1,1), u_2 = (1,-1)\big)$ *oraz* $\big(v_1 = (1,-1,0), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (0,0,1)\big)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*,* φ *- symetria względem osi* Oy*, w bazach* $\big(u_1 = (-3,5), u_2 = (2,1)\big)$ *oraz* $\big(v_1 = (2,4), v_2 = (3,1)\big)$

c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$*,* $\varphi(p)(x) = p'(x-1)$*, w bazach* $\big(p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = \frac{x^2}{2}, p_3 = \frac{x^3}{3}\big)$ *oraz* $\big(q_0 = 1, q_1 = x, q_2 = x^2\big)$

d) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{R}\}$ *- ciało,* $\varphi : K^3 \to K^2$*,* $\varphi(x,y,z) = (x+y, y-z)$*, w bazach* $\big(u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,\sqrt{2},0), u_3 = (0,0,1+\sqrt{2})\big)$ *oraz* $\big(v_1 = (1,\sqrt{2}), v_2 = (\sqrt{2},0)\big)$

e) $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$*, w bazie* $\big(1, x, x^2, \ldots, x^n\big)$

f) $\int : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$*, w bazach* $\mathcal{B}_n$*,* $\mathcal{B}_{n+1}$*, gdzie* $\mathcal{B}_i = \big(1, x, x^2, \ldots, x^i\big)$ *dla* $i = n, n+1$

g) $Ev_3 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$*,* $Ev_3(p(x)) = p(3)$*, w bazach* $(1, x, \ldots, x^n)$ *,* $\{1\}$

h) $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$*,* $\varphi(p)(x) = p(x+1)$*, w bazie* $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$

i) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$*,* $\varphi(p)(x) = 3x \cdot p(-x)$*, w bazach* $\mathcal{B} = \big(b_1 = x^2 + 2x,\ b_2 = 3x - 1,\ b_3 = x - 5\big)$*,* $\mathcal{C} = \big(c_1 = x^3 + x,\ c_2 = x^3 - x,\ c_3 = x^2 + 1,\ c_4 = x^2 - 1\big)$

Zadanie 13. *a) Znajdź w bazach kanonicznych macierz odwzorowania liniowego* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *takiego, że* $\varphi(1,1) = (0,1)$, $\varphi(-1,1) = (3,2)$.
b) Dane jest odwzorowanie liniowe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. *W przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *rozważamy bazę kanoniczną* $\big(e_1, e_2, e_3\big)$. *Wiedząc, że* $g(e_1) = (1,-3,2,4), g(e_2) = (5,-3,0,2), g(e_3) = (-2,0,1,1)$, *znajdź* $g(1,2,-1)$ *oraz jądro odwzorowania* g.

Zadanie 14. *Uzasadnij, że* f *jest odwzorowaniem liniowym. Zapisz macierz tego odwzorowania w bazach standardowych i wyznacz* $\mathrm{Ker} f$. *Czy* f *jest monomorfizmem?*

a) $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $f(p)(x) = (3-x)p''(x) + 6p'(x)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x], \quad f(a,b) = (a+b)x^2 + (3a-b)x + 6a$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\forall w \in \mathbb{R}^3\ f(w) = v \times w$, *gdzie* $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ *to ustalony wektor niezerowy, zaś* $v \times w$ *oznacza iloczyn wektorowy*

Zadanie 15. *Czy ta sama macierz może reprezentować dwa różne odwzorowania liniowe? Dokładniej mówiąc, czy mogą istnieć bazy* $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *i odwzorowania liniowe* φ, ψ *takie, że* $M_{\mathcal{BC}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(\psi)$?

Zadanie 16. *Dane jest odwzorowanie liniowe* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *takie, że* $f \neq 0$, $f \circ f = 0$ *oraz baza* $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. *Wyznacz macierz* $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ *jeśli wiadomo, że* $f(v_2) = v_1$.

Zadanie 17. *Rozważmy przestrzeń wektorową* $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. *Znajdź macierz odwzorowania liniowego* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (2+3i)z$ *przyjmując w* $\mathbb{C}$ *bazę* $\mathcal{B}$.

a) $\mathcal{B} = \big(b_1 = 1, b_2 = i\big)$ *b)* $\mathcal{B} = \big(b_1 = 1+i, b_2 = 1-i\big)$

Zadanie 18. *Macierz odwzorowania liniowego* $\varphi : U \to V$ *w bazach* $\mathcal{B}_U = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$ *ma postać* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. *Znajdź macierz* A' *tego odwzorowania względem baz* $\mathcal{B}'_U = (2u_1, u_3, u_2 + u_3)$, $\mathcal{B}'_V = (v_1 - v_2, 2v_1 + v_2)$.

Zadanie 19. *Stosując wzór na zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, znajdź macierz odwzorowania liniowego* $\varphi : V \to W$ *w zadanych bazach* $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$.

a) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z) = (x-y, y-z)$, $\mathcal{B}'_V = \big(v_1 = (1,2,2), v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,1,2)\big)$,
$\mathcal{B}'_W = \big(w_1 = (1,1), w_2 = (1,0)\big)$

b) $V = \mathbb{R}_2[x], W = \mathbb{R}_3[x]$, $\varphi(p)(x) = 3xp(-x)$, $\mathcal{B}'_V = \big(p_1 = x^2 + 2x, p_2 = 3x - 1, p_3 = x - 5\big)$,
$\mathcal{B}'_W = \big(q_1 = x^3 + x, q_2 = x^3 - x, q_3 = x^2 + 1, q_4 = x^2 - 1\big)$

Zadanie 20. *Wyznacz wzór odwzorowania liniowego* φ *reprezentowanego w zdanych bazach przez macierz* $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.
a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (8,2), b_2 = (7,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (6,7), c_2 = (4,5)\big)$,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (2,1), b_2 = (4,-1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,-1), c_2 = (2,5)\big)$,

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,0,1), b_2 = (0,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C}$ *- baza kanoniczna,*

$$M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

d) $\varphi : V \to V$, $V = \{a\cos\theta + b\sin\theta,\ a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = \cos\theta - \sin\theta, b_2 = \sin\theta\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = \cos\theta + \sin\theta, c_2 = \cos\theta\big)$,

$$M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \big(b_1 = (1,0,1), b_2 = (4,-2,1), b_3 = (-2,3,3)\big)$,

$$M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 21. *a) Odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *w bazach kanonicznych reprezentowane jest przez macierz* $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. *Czy wektor* $v = (1,3)$ *należy do* $Im\varphi$*?*

b) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ *w bazach* $\mathcal{B} = \big(b_1 = 1+x, b_2 = x\big), \mathcal{C} = \big(c_1 = (1,1), c_2 = (1,0)\big)$ *jest reprezentowane przez macierz* $M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. *Znajdź obraz* $p(x) = 2x - 1$ *poprzez* φ.

c) Podaj przykłady baz przestrzeni $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$, *w których odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dane wzorem* $\varphi(x,y,z) = (x+y, z-y)$ *jest reprezentowane przez macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Dany jest endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (x+4y, 3x-y)$ *oraz baza* $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,1), b_2 = (3,4)\big)$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^2$. *Znajdź taką bazę* $\mathcal{C}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^2$, *że*

$$M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *w bazach* $\mathcal{B} = \big(b_1 = (3,1), b_2 = (5,2)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (-1,7), c_2 = (1,-6)\big)$ *jest reprezentowany przez macierz* $M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. *Wyznacz macierz* $M_\varphi(\mathcal{B}',\mathcal{C}')$ *tego odwzorowania w bazach* $\mathcal{B}' = \big(b_1' = (-1,4), b_2' = (-1,3)\big)$, $\mathcal{C}' = \big(c_1' = (5,-6), c_2' = (-4,5)\big)$.

f) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *w bazach* $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,2), b_2 = (1,1,1), b_3 = (1,1,2)\big), \mathcal{C} = \big(c_1 = (1,1), c_2 = (1,0)\big)$ *reprezentowane jest przez macierz* $M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Za pomocą macierzy* $M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{C})$ *wyznacz obraz wektora* $v = (1,1,4)$ *poprzez* φ.

Zadanie 22. *Odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *w bazach kanonicznych reprezentowane jest przez macierz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ tego odwzorowania w bazach $\mathcal{B}' = \big(b_1' = (1,1,1,1), b_2' = (1,1,1,0), b_3' = (1,1,0,0), b_4' = (1,0,0,0)\big)$, $\mathcal{C}' = \big(c_1' = (0,-1,0), c_2' = (1,0,0), c_3' = (1,1,1)\big)$.
b) Oblicz $\varphi(2,0,0,1)$ na dwa sposoby, za pomocą A i za pomocą A'.
c) Czy φ jest monomorfizmem lub epimorfizmem?

Zadanie 23. *Odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *dane jest za pomocą przyporządkowania.*

$$\varphi(2,3,0,0,) = (-1,3,-2,-3),\ \varphi(0,0,1,1,) = (1,0,-1,0),$$

$$\varphi(1,3,0,1) = (1,4,-5,-4),\ \varphi(0,2,1,0) = (3,1,-4,-1)$$

a) Podaj wzór φ.
b) Wyznacz jądro i obraz φ, wskaż ich bazy i określ wymiary. Czy φ jest monomorfizmem lub epimorfizmem?
c) Wyznacz macierz A odwzorowania φ w bazach kanonicznych.
d) Wyznacz macierz $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ odwzorowania φ w bazie

$$\mathcal{B}' = \big(b_1' = (1,0,1,0), b_2' = (0,0,0,1), b_3' = (1,1,0,0), b_4' = (1,1,1,0)\big).$$

e) Wyznacz $\varphi(1,2,3,4)$ na dwa sposoby, za pomocą A i za pomocą A'.

Zadanie 24. *Dane są dwie macierze* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Jakie odwzorowania liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (względem baz kanonicznych) reprezentują te macierze?
b) Jakie odwzorowanie liniowe reprezentuje iloczyn AB?

Zadanie 25. *a) Czy odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (x+3y, 2x-y)$ *jest odwracalne? Jeśli tak, podaj wzór i macierz odwzorowania odwrotnego do* φ *w bazach standardowych.*

b) Przekształcenia liniowe $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone są w bazach kanonicznych przez macierze

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, M_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podaj macierze odwzorowań $\varphi + \psi, 2\varphi, \varphi - 3\psi$.

c) Dane są odwzorowania liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (4x+3y+z, 5x+4y+2z)$ oraz $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (3x-y, 5x-3y, 7x-5y)$. Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzory odwzorowań $h = g \circ f$ oraz $\varphi = f \circ g$.

d) Dane są odwzorowania liniowe f i g. Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania $h = g^2 \circ f$ oraz $h(1,2,0)$.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x-y+z, 2y+z), \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = (2x+y, z-y)$$

e) Dane są odwzorowania liniowe f, g, h. Za pomocą rachunku macierzowego uzasadnij, że h jest odwracalne i podaj macierz odwzorowania h^{-1} w bazach kanonicznych. Ponadto wyznacz wzór odwzorowania $\varphi = 3g \circ f + h^{-1}$.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ f(x,y,z) = (x, y+z, x+z, z), \quad g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z,t) = (x+t, y-t, z-t)$$

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad h(x,y,z) = (x+2y, x+z, x+y+z)$$

Odpowiedzi

1. *odwzorowania liniowe: a), c), d), e), f), h), i), k), n), o), p), q)* **2.** *a)* $\varphi(x_1,x_2)=(4x_1-x_2,7x_1-2x_2)$ *b)* $\varphi(x_1,x_2)=(x_1,3x_1-x_2,x_1+x_2)$ *c)* $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3,5x_1-4x_2+3x_3,7x_1-5x_2+4x_3)$ *d)* $\varphi(ax^2+bx+c)=6ax+2b+\frac{4}{3}c$ *e)* $\varphi(ax^2+bx+c)=6ax+6a+4b$ **3.** *a)* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *- oś* Oy*,* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *- oś* Ox *b)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(0,0)\}$, $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}^2$ *c)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(0,0,0)\}$, $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}^3$ *d)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(x,0,0):x\in\mathbb{R}\}$ *oś* Ox*,* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *- płaszczyzna* Oyz **4.** *a)* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *- prosta* $y=2x$*, baza* $\{(1,2)\}$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=\{(2x-y,3y-6x):x,y,\in\mathbb{R}\}$*, baza* $\{(-1,3)\}$, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=1$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm* *b)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(-t,-3t,t):t\in\mathbb{R}\}$*, baza* $\{(-1,-3,1)\}$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=\{(2x-y-z,x+y+4z,2x+y+5z,-x-z):x,y,z\in\mathbb{R}\}$*, baza* $\{(2,1,2,-1),(-1,1,1,0)\}$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=1$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=2$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm* *c)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(-2z-t,-z+3t,z,t):z,t\in\mathbb{R}\}$*, baza* $\{(-2,-1,1,0),(-1,3,0,1)\}$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *płaszczyzna* $\pi:x=t,y=-2t+s,z=t-s,\ t,s\in\mathbb{R}$*, baza* $\{(1,-2,1),(0,1,-1)\}$, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=2$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm* *d)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{p\in\mathbb{R}_2[x]:p(x)=\mathrm{const}\}$*, baza* $\{q(x)=1\}$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=-2ax^3+(b-4a)x^2+2bx$*, dla* $p(x)=x^2+bx+c$*, baza* $\{-2x^3-4x^2,x^2+2x\}$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=1$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=2$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm* *e)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(0,b):b\in\mathbb{R}\}=\mathrm{lin}\{(0,1)\}$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=1$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{lin}\{x^2+x+1\}$*,* $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=1$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm* *f)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{lin}\{(3,1,0),(-2,0,1)\}$*,* $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{lin}\{(1,-2)\}$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=2$*,* $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=1$*, nie epimorfizm* *g)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{lin}\{(3,-\frac{9}{7},\frac{4}{7},1)\}$*,* $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}^3$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=1$*,* $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=3$*, epimorfizm, nie monomorfizm* *h)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{\begin{bmatrix}-d & b\\ c & d\end{bmatrix}:b,c,d\in\mathbb{R}\}$*, baza* $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=3$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}$*,* $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=1$*, epimorfizm, nie monomorfizm* *i)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{\begin{bmatrix}-b-c & b\\ c & 0\end{bmatrix}:b,c\in\mathbb{R}\}$*, baza* $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=2$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=\{rx^2+s:r,z,\in\mathbb{R}\}=\mathrm{lin}\{1,x^2\}$*,* $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=2$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm* *j)* $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathbb{R}^3$*,* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=3$*;* $\mathrm{Im}(\varphi)=\{(0,0,0,0)\}$*,* $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=0$*, nie monomorfizm, nie epimorfizm*

5. *a)* 0 *b)* 3 *c)* 3 **6.** *nie* **7.** *izomorfizm* **8.** $\Sigma^{-1}\Big((S_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, gdzie* $a_1=S_1$ *oraz* $\forall k\geq 2\ a_k=S_{k+1}-S_k$*.* **9.** *a)* $\varphi(x,y)=(3cy,2cy,cy)$*,* $c\neq 0$ *b)* $\varphi(x,y,z,t)=(x+y+z+t,x+y-z-t)$ *c)* $\varphi(p)=x^2\cdot p(1)=(a+b+c)x^2$*, dla* $p(x)=ax^2+bx+c$ *d)* $\varphi(x,y)=(6x-4y,9x-6y)$ *e)* $\varphi(x,y,z)=(-4x+y+3z,y-z)$ *f)* $f(x,y,z)=(-x+y+z,-3x+3y+3z)$ **10.** *a)* $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ *a)* $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -6\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ *b)* $\frac{1}{21}\begin{bmatrix}16 & 8 & 4\\ 8 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ *e)* $\frac{1}{21}\begin{bmatrix}20 & -2 & -4\\ 19 & -4 & -2\\ 17 & -8 & -4\end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix}2 & 6 & 4 & 0\\ 0 & 6 & 18 & 24\\ 0 & 0 & 12 & 36\\ 0 & 0 & 0 & 20\end{bmatrix}$ **11.** *a)* $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ *b)*

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **12.** *a)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}$ *c)*

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3^2 \\ \dots \\ 3^n \end{bmatrix}^T$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{3} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *i)* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 3 & 3 & 15 \\ -6 & -9 & -3 \\ -6 & -9 & -3 \end{bmatrix}$ **13.** *a)* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $g(1,2,-1) = (13,-9,17)$, $\mathrm{Ker}(g) = \{(x,-x,-2x) : x \in \mathbb{R}\}$ **14.** *a)* $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Ker} f = \{a : a \in \mathbb{R}\}$, *nie monomorfizm* *b)* $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$, *monomorfizm* *c)* $\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Ker} f = \{a \cdot v | \, a \in \mathbb{R}\}$ *wektory równoległe do v, nie monomorfizm* **15.** *tak* **16.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** *a)* $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **18.** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -14 & -9 & -17 \\ 10 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

19. *a)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -3 & -15 \\ 3 & 3 & 15 \\ -6 & -9 & -3 \\ -6 & -9 & -3 \end{bmatrix}$ **20.** *a)* $\varphi(x,y) = (x+y, x+2y)$ *b)* $\varphi(x,y) = (3x+7y, 4x+7y)$ *c)* $\varphi(x,y,z) = (x+y, -2x-4y+5z)$ *d)* $\varphi(a\cos\theta + b\sin\theta) = a\cos\theta$ *e)* $\varphi(x,y,z) = (-105x-165y+94z, 39x+61y-33z, -50x-79y+48z)$ **21.** *a) tak* *b)* $\varphi(p) = (3,1)$ *c)* $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,-1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,-1),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$ *d)* $\mathcal{C} = \{(4,1),(7,2)\}$ *e)* $M_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ *f)* $\varphi(v) = [-3,3]_{\mathcal{C}} = (0,-3)$ **22.** *a)* $A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\varphi(2,0,0,1) = (5,3,2)$ *c) nie monomorfizm, ale epimorfizm* **23.** *a)* $\varphi(x,y,z,t) = (-2x+y+z, y-z+t, 2x-2y-t, -y+z-t)$ *b)* $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{lin}\{(\frac{1}{2},1,0,-1)(\frac{1}{2},0,1,1)\}$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1,1,-2,-1),(0,1,-1,-1)\}$, *nie epimorfizm, nie monomorfizm* *c)* $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *e)* $\varphi(1,2,3,4) = (3,3,-6,-3)$ **24.** *a)* $\varphi_A(x,y,z,t) =$

$(2x+z+5t,-4x+5y-2t)$, $\varphi_B(x,y,z,t)=(5x+y+3z-5t,3x+2z,2x+2y+z,y+5z+t)$ *b)* $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z)=(3x-12y+23z,x+3y-7z)$ **25.** *a) odwracalne,* $M_{\varphi^{-1}}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $\varphi^{-1}(x,y)=(\frac{x+3y}{7},\frac{2x-y}{7})$ *b)* $M_{\varphi+\psi}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $M_{2\varphi}=\begin{bmatrix}8 & 6 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$, $M_{\varphi-3\psi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ -8 & 2 & -3\end{bmatrix}$ *c)* $h(x,y,z)=(7x+5y+z,5x+3y-z,3x+y-3z)$, $\varphi(x,y)=(34x-18y,49x-27y)$ *d)* $h(x,y,z)=(5x-3y+6z,x+3y+3z)$, $h(1,2,0)=(-1,7)$ *e)* $M_{h^{-1}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $\varphi(x,y,z)=(4x+2y+z,2y+z,2x-y+2z)$