Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 8
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
grudzień 2023r.

Zagadnienie własne operatora liniowego

Notacja:

$End(V)$	algebra endomorfizmów przestrzeni V
$Spec(A)$	widmo (spektrum) macierzy A, tj. zbiór wartości własnych
E_λ	podprzestrzeń własna odpowiadająca wartości własnej λ
$\chi_A(t) \in K[t]$	wielomian charakterystyczny macierzy $A \in M_n(K)$

1 Algebra endomorfizmów (operatorów liniowych)

Zadanie 1. *Niech V będzie przestrzenią liniową (nad ciałem K). Czy $\varphi \in End(V)$?*

a) V *- dowolna,* $\varphi(x) = a$*, gdzie* $a \in V$ *ustalony wektor*
b) V *- dowolna,* $\varphi(x) = x + a$*, gdzie* $a \in V$ *ustalony wektor*
c) V *- dowolna,* $\varphi(x) = \alpha \cdot x$*, gdzie* $\alpha \in K$ *ustalony skalar*
d) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(f) = f \circ p$, $p(x) = ax + b$*, gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$ *ustalone*
e) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(f) = f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ *ustalone*
f) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$
g) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2, x_3)$
h) $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\varphi(f(x)) = 2f(\frac{x}{2})$ *dla* $x \in [0, 1]$
i) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = 3A - A^T$
j) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (xy, x, z)$
k) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- obrót o kąt* $\frac{\pi}{2}$ *w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół* $P_0 = (1, 2)$
l) $V = \mathbb{R}^3$, φ *- rzut prostokątny na prostą* $l : x = 1, z = 0$
m) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- rzut prostokątny na oś* Ox
n) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- obrót o kąt* $\frac{\pi}{4}$ *w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół* $O = (0, 0)$

Zadanie 2. *Wyznacz wzór podanych endomorfizmów.*

a) φ^3*, jeśli* $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x_1, x_2) = (4x_1 - 6x_2, x_1 - x_2)$
b) φ^4*, jeśli* $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1)$
c) φ^4*, jeśli* $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2, x_2)$
d) φ^2*, jeśli* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 - 4x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Zadanie 3. *Dla danego* $\varphi \in Aut(\mathbb{R}^3)$ *wyznacz* φ^{-1}.

a) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$
b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + x_3, 4x_1 + 9x_2 + 5x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$

Zadanie 4. *Niech* $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$. *Czy podprzestrzenie liniowe* U, W, Z *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *są* φ*-niezmiennicze?*

a) $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$, $U = \text{lin}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$, $W = \text{lin}\{(1,0,-1),(1,2,1)\}$

b) $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_3, 3x_3)$, $U = \text{lin}\{(0,1,0)\}$, $W = \text{lin}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

c) $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (-3x_1-2x_2-4x_3, 2x_1+7x_2+10x_3, x_1-2x_2-2x_3)$, $U = \text{lin}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $W = \text{lin}\{(1,0,-1),(4,2,-5)\}$, $Z = \text{lin}\{(3,2,1),(1,0,1)\}$

2 Wartości i wektory własne, podprzestrzenie własne, diagonalizacja endomorfizmu

Zadanie 5. *Czy λ jest wartością własną macierzy A?*

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\lambda = -3$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

Zadanie 6. *Czy v jest wektorem własnym macierzy A?*

a) $v = (-1,1)$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ *?* *b)* $v = (1,-2,2)$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

Zadanie 7. *Podaj wartości własne macierzy $A \in M_4(\mathbb{R})$ oraz określ ich krotności algebraiczne.*

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 8. *Niech $V = \mathbb{R}^2$ lub $V = \mathbb{R}^3$. Jeśli $v \in V$ to wektor własny $\varphi \in End(V)$ odpowiadający wartości własnej λ, to $\varphi(v)$ może mieć inny zwrot lub długość, ale nie kierunek. Korzystając z tej interpretacji geometrycznej wyznacz wartości własne i wektory własne podanych endomorfizmów.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- rzut na oś Ox*
b) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- obrót o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół punktu $O = (0,0)$ (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)*
c) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- symetria względem osi Oy*
d) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- jednokładność względem punktu $O = (0,0)$ w skali $k = \frac{1}{3}$*
e) $V = \mathbb{R}^2$, φ *- obrót o kąt $\alpha \in [0, 2\pi)$ (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)*
f) $V = \mathbb{R}^3$, φ *- rzut prostokątny na płaszczyznę Oxy*
g) $V = \mathbb{R}^3$, φ *- obrót wokół osi Oz o kąt $\frac{\pi}{12}$ (przeciwnie do ruchu wsk. zegara patrząc z góry)*
h) $V = \mathbb{R}^3$, φ *- symetria względem płaszczyzny Oxz*
i) $V = \mathbb{R}^3$, φ *- symetria względem osi Oz*
j) $V = \mathbb{R}^3$, φ *- rzut prostokątny na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$*

Zadanie 9. *Wyznacz wielomian charakterystyczny χ_A oraz spektrum $Spec(A)$ macierzy rzeczywistej A. Określ krotności algebraiczne wartości własnych. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy podane macierze są diagonalizowalne? Jeśli tak, wskaż macierz diagonalizującą P i dokonaj diagonalizacji.*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *d)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *f)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *g)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 10. *Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.*

a) $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x,y) = (x, x+y)$
b) $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x,y) = (-y, x)$
c) $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (-y, x, z)$
d) $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (x, 2x+2y, -x-y-z)$
e) $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (x-z, 2y, x+z)$
f) $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (3x-y, 6x-2y, 2x-y+z)$
g) $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (-7x+2y+6z, -4x+2y+3z, -8x+2y+7z)$
h) $\varphi \in End(\mathbb{R}_2[x])$, $\varphi\big(p(x)\big) = x \cdot p'(x)$
i) $\varphi \in End(\mathbb{R}_3[x])$, $\varphi\big(p(x)\big) = p'''(x)$
j) $\varphi \in End(\mathbb{R}_2[x])$, $\varphi\big(p(x)\big) = 2xp'(x) + x^2p(0) + p(2)$
k) $\varphi \in End(M_2(\mathbb{R}))$, $\varphi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$
l) $\varphi \in End(M_2(\mathbb{R}))$, $\varphi(A) = A + A^T$

Zadanie 11. *Czy wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ stanowią bazę przestrzeni V? Jeśli tak, zapisz macierz endomorfizmu φ w tejże bazie.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (4x+2y, y-x)$
b) $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (3x-y, 3y)$
c) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = (x-z, x+2y+z, z-x)$
d) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = (-x-3y-2z, -x+y+2z, x+3y+2z)$

Zadanie 12. *Wyznacz spektrum macierzy rzeczywistej A. Czy A jest diagonalizowalna?*

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 8 & -11 & -8 \\ -10 & 11 & 7 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 8 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e)* $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Zadanie 13. *Podane macierze mają tylko jedną wartość własną $\lambda = 1$. Nie wyznaczając podprzestrzeni* *własnych określ krotność geometryczną λ.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Zadanie 14. *Wyznacz wielomian charakterystyczny χ_A oraz spektrum $Spec(A)$ macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \in \{2,3,4\}$. Określ krotności algebraiczne wartości własnych. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy podane macierze są diagonalizowalne? Jeśli tak, wskaż macierz diagonalizującą P i dokonaj diagonalizacji.*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}$ *d)* $A = \begin{bmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \\ 0 & 0 & i-1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Zadanie 15. *Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.*

a) $\varphi \in End(\mathbb{C}^2)$, $\varphi(z,w) = (-w, z)$
b) $\varphi \in End(\mathbb{C}^3)$, $\varphi(z,w,v) = (z-v, 2w, z+v)$
c) $\varphi \in End(\mathbb{C}^3)$, $\varphi(z_1,z_2,z_3) = (-iz_1 - 2z_3, z_2, 2z_1 - iz_3)$

Zadanie 16. *a) Dla jakiej wartości $x \in \mathbb{R}$ macierz $A \in M_4(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & x & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Dana jest macierz A endomrofzimu $\varphi \in End(\mathbb{R}^4)$ w bazach kanonicznych. Dobierz wartość parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, by φ miał dwuwymiarową podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 5$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & p & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 17. *Niech $f \in End(\mathbb{R}^n)$ i niech A to reprezentacja macierzowa f w bazie kanonicznej. Przedyskutuj diagonalizowalność f w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.*

a) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a^2+1 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 18. *W tym zadaniu wykorzystaj diagonalizację endomorfizmu.*

a) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ *taki, że* $\varphi(1,2) = (2,4)$, $\varphi(-2,1) = (-2,1)$. *Wyznacz* $\varphi^{150}(1,0)$.

b) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ *taki, że* $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(2,2,0) = (0,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (-1,0,0)$. *Wyznacz wzór na* $\varphi(x,y,z)$ *i oblicz* $\varphi^{105}(2,3,6)$.

c) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ *taki, że* $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$, $\varphi(1,1,0) = (-1,-1,0)$, $\varphi(1,1,1) = (0,0,0)$. *Oblicz* $\varphi^{100}(3,6,9)$.

d) Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(x,y,z) = (-7x+2y+6z, -4x+2y+3z, -8x+2y+7z)$. *Oblicz* $\varphi^{1683}(0,0,-1)$.

Zadanie 19. *Wyznacz widmo macierzy* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(K)$ *w podanych przypadkach.*

a) $K = \mathbb{R}$ *b)* $K = \mathbb{C}$ *c)* $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Zadanie 20. *Dany jest endomorfizm* φ *przestrzeni* $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

a) Niech $\varphi(f) = 2f' - 4f$. *Znajdź wektor własny* f_0 *odpowiadający wartości własnej* $\lambda = 2$, *taki że* $f_0(1) = 1$.

b) Niech $\varphi(f) = f''$. *Podaj przykład wektora własngo odpowadającego wartościom własnym* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 10$.

Zadanie 21. *Wyznacz wartości własne i wektory własne podanych operatorów.*

a) operator różniczkowania $\frac{d}{dx}$ *na* $\mathbb{R}_n[x]$,
b) operator transponowania $T \in End(M_n(\mathbb{R}))$, $T(A) = A^T$.

Zadanie 22. *a) Dana jest podprzestrzeń* $W = \mathrm{lin}\{e^{ax};\, a \in \mathbb{R}\}$ *przestrzeni liniowej* $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Wyznacz widmo operatora różniczkowania* $\frac{d}{dx} \in End(W)$.

b) Podaj przykład endomorfizmu przestrzeni zespolonych ciągów liczbowych $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *nie posiadającego żadnych wartości własnych.*

c) Podaj przykład macierzy, która jest diagonalizowalna, ale nie jest odwracalna.

d) Uzasadnij, że każda macierz $A \in M_2(\mathbb{R})$ *taka, że* $\det(A) < 0$, *jest diagonalizowalna.*

Zadanie 23. *Niech* V *to skończenie wymiarowa (rzeczywista lub zespolona) przestrzeń liniowa. Jakie wartości własne może mieć endomorfizm* $\varphi \in End(V)$ *posiadający zadane własności?*

a) $\varphi^2 = \varphi$ *b)* $\varphi^2 = 0$ *c)* $\varphi^2 = -\varphi$ *d)* $\varphi^3 = \mathrm{id}$

Zadanie 24. *Niech* V *będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem* K. *Niech* $A \in M_n(K)$, $\lambda \in Spec(A)$ *oraz niech* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ *będzie wektorem własnym odpowiadającym* *wartości własnej λ. Uzasadnij, że prawdziwe są następujące stwierdzenia.*

a) $\lambda^k \in Spec(A^k)$ *dla każdego* $k = 2, 3, \ldots$, *oraz* v *jest wektorem własnym odpowiadającym* λ^k

b) $c \cdot \lambda \in Spec(c \cdot A)$ *dla każdego* $c \in K$, *oraz* v *jest wektorem własnym odpowiadającym* $c \cdot \lambda$

c) $p(\lambda) \in Spec\big(p(A)\big)$ *dla każdego wielomianu* $p \in K[X]$, *oraz* v *jest wektorem własnym odpowiadającym* $p(\lambda)$

d) Jeśli A *jest nieosobliwa oraz* $\lambda \neq 0$, *to* $\frac{1}{\lambda} \in Spec(A^{-1})$ *oraz* v *jest wektorem własnym odpowiadającym* $\frac{1}{\lambda}$.

e) $Spec(A) = Spec(A^T)$

f) Jeśli $\lambda \in K = \mathbb{C}$, *ale wielomian charakterystyczny* χ_A *macierzy* A *ma współczynniki rzeczywiste, to* $\overline{\lambda} \in Spec(A)$. *Ponadto wektor* $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$ *taki, że* $\overline{w_i} = v_i$ *jest wektorem własnym odpowiadającym* $\overline{\lambda}$.

g) Jeśli K *jest ciałem algebraicznie domkniętym (np.* $\mathbb{C}$*),* $Spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *oraz* χ_A *jest wielomianem charakterystycznym macierzy* A*, to wówczas* $\det(A) = \chi_A(0) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

h) A *jest odwracalna* $\Leftrightarrow 0 \notin Spec(A)$

i) Jeśli K *jest ciałem algebraicznie domkniętym (np.* $\mathbb{C}$*) oraz* $Spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *to wówczas* $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Zadanie 25. *Dane są macierze* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. *Sprawdź, że* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$, $\det(A) = \det(B)$, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, $\chi_A(t) = \chi_B(t)$, *a mimo to macierze* A *i* B *nie są podobne.*

Zadanie 26. *a) Wyznacz wartości własne macierzy* $A \in M_3(\mathbb{C})$ *oraz* A^T *oraz odpowiadające im wektory własne. Zauważ, że choć na mocy zadania 24 wartości własne są identyczne, to wektory własne* <u>*mogą być różne*</u>.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy $A \in GL_3(\mathbb{C})$ *oraz macierzy* A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Wyznacz wartości i wektory własne macierzy $A, A^2, A^{-1}, A + 4I$, *gdy*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Zadanie 27. *a) Dana jest macierz $A \in M_3(\mathbb{C})$ taka, że jej ślad $\mathrm{tr}(A) = 2$ oraz $\lambda_1 = 7$ to wartość własna macierzy A, której odpowiadają wektory własne $v = (1, 2, 1)$ oraz $w = (1, 1, 0)$. Oblicz* $\det A$.

b) Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. *Wyznacz $Spec(A)$ oraz $Spec(A^2)$. Określ krotności algebraiczne wartości własnych.*

c) Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. *Bez wyznaczania wartości własnych, znajdź sumę kwadratów wartości własnych.*

Zadanie 28. *a) Uzasadnij, że wielomian charakterystyczny podanej macierzy $A \in M_n(K)$ ma postać $\chi_A(t) = (-1)^n(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0)$. Zauważ, iż oznacza to, że każdy wielomian $p \in K_n[X]$ stopnia n, o współczynniku wiodącym $(-1)^n$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy stopnia n.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

b) Podaj przykład macierzy $B \in M_2(\mathbb{R})$ mającej dokładnie jedną wartość własną.
c) Podaj przykład macierzy $B \in M_2(\mathbb{R})$ mającej dokładnie jedną wartość własną i nie będącej macierzą trójkątną.
d) Podaj przykład macierzy $B \in M_2(\mathbb{R})$ nie mającej żadnej wartości własnej.
e) Podaj przykład macierzy $B \in M_2(\mathbb{R})$ mającej dwie wartości własne i nie będącej macierzą trójkątną.
f) Podaj przykład macierzy $C \in M_3(\mathbb{Q})$ mającej dwie wartości własne i nie będącej macierzą trójkątną.
g) Podaj przykład macierzy, której wielomianem charakterystycznym jest $\chi(t) = t^3 - 8t^2 + 5t + 7$.

Zadanie 29. *Wykorzystując diagonalizację macierzy wyznacz wzór na A^k, $k \in \mathbb{N}$.*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Zadanie 30. *Korzystając z diagonalizowalności macierzy, wyznacz wzór ogólny ciągów zadanych rekurencyjnie.*

a) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 9 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 2 \\ b_n = 6b_{n-1} + b_{n-2} - 30b_{n-3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 5 \\ a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 6 \\ a_3 = 8 \\ a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3} \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \\ a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \end{cases}$

3 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Zadanie 31. *Dla danej macierzy rzeczywistej A oblicz A^{-1}, wykorzystując w tym celu twierdzenie Cayleya-Hamiltona.*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Zadanie 32. *Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona oblicz podane macierze.*

a) $A^5 + A^3$, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) A^{50}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) A^{100}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) A^6, gdy $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ e) A^3, gdy $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ f) A^{100}, gdy $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $A^{1000} + A^{998}$, gdy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ h) A^6, gdy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i) A^9, gdy $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ j) $A^6 - 25A^2 + 112A$, gdy $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

k) A^{50}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ l) $-A^3 + 4A^2 + 5A - 2I$, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

m) A^3, gdy $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Zadanie 33. *Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona oblicz wartości własne macierzy $B = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - 2A + 8I$, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.*

Odpowiedzi

1. *endomorfizmy: a) oraz b) tylko dla $a = 0$, c), d), e), g), h), i), m), n)* **2.** *Posługując sie mnożeniem macierzy znajdujemy: a) $\varphi^3(x_1, x_2) = (22x_1 - 42x_2, 7x_1 - 13x_2)$ b) $\varphi^4(x_1, x_2) = (11x_1+10x_2, 5x_1+6x_2)$ c) $\varphi^4(x_1, x_2) = (x_1+20x_2, x_2)$ d) $\varphi^2(x_1, x_2, x_3) = (3x_1+5x_2-5x_3, 7x_1+11x_2 - 5x_3, 4x_1 + 6x_2 - 2x_3)$* **3.** *a) $\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$ b) $\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (-13x_1 + 8x_2 - 6x_3, 3x_1 - x_2 + x_3, 5x_1 - 2x_2 + 3x_3)$* **4.** *a) tylko W b) tylko W c) tylko W* **5.** *a) tak b) nie* **6.** *a) tak, $\lambda = 3$ b) nie* **7.** *a) $\lambda_1 = 5$, $k_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $k_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $k_3 = 1$ b) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -1$ wszystkie krotności 1* **8.** *a) $\lambda_1 = 1$, $v = (x, 0)$ dla $x \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, $v = (0, y)$ dla $y \neq 0$ b) brak wartości własnych c) $\lambda_1 = -1$, $v = (x, 0)$ dla $x \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $v = (0, y)$ dla $y \neq 0$ d) $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $v \neq 0$ dowolny e) gdy $\alpha = 0$, to $\lambda = 1$, $v \neq 0$ dowolny; gdy $\alpha = \pi$, to $\lambda = -1$, $v \neq 0$ dowolny; gdy $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ brak wartości własnych f) $\lambda_1 = 1$, $v = (x, y, 0) \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, $v = (0, 0, z) \neq 0$ g) $\lambda_1 = 1$, $v = (0, 0, z)$ dla $z \neq 0$ h) $\lambda_1 = 1$, $v = (0, 0, z)$ dla $z \neq 0$; $\lambda_2 = -1$, $v = (x, y, 0) \neq 0$ i) $\lambda_1 = 1$, $v = (0, 0, z)$ dla $z \neq 0$; $\lambda_2 = -1$, $v = (x, y, 0) \neq 0$ j) $\lambda_1 = 0$, $v = (x, x, x)$ dla $x \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $v = (x, y, -x - y - D) \neq$*

0 **9.** *a)* $\chi_A(t) = t^2 - 3t + 5$, *brak wartości własnych, A - nie jest diagonalizowalna* *b)* $\chi_A(t) = t^2 - 1$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1\}$, *widmo proste tzn.* $k_1 = k_2 = 1$, $E_1 = \operatorname{lin}\{(1,-1)\}$, $\dim E_1 = 1$, $E_{-1} = \operatorname{lin}\{(1,-3)\}$, $\dim E_{-1} = 1$, *diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *c)* $\chi_A(t) = -t^3 + 6t^2 - 8t$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4\}$ *widmo proste,* $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,-1,-1)\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{(-1,1,1)\}$, $\dim E_2 = 1$, $E_4 = \operatorname{lin}\{(-1,1,-1)\}$, $\dim E_4 = 1$, *diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *d)* $\chi_A(t) = (4-t)(t^2+1)$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 4\}$, $k_1 = 1$, $E_4 = \operatorname{lin}\{(0,1,0)\}$, $\dim E_4 = 1$, *nie jest diagonalizowalna* *e)* $\chi_A(t) = (2-t)^3$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 2\}$, $k_1 = 3$, $E_2 = \operatorname{lin}\{(1,2,0),(0,0,1)\}$, $\dim E_2 = 2$, *nie jest diagonalizowalna* *f)* $\chi_A(t) = t^3(t-7)$, $Spec(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7\}$, $k_1 = 3, k_2 = 1$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$, $\dim E_0 = 3$, $E_7 = \operatorname{lin}\{(2,0,3,2)\}$, $\dim E_7 = 1$, *diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *g) diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *h) diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

10. *a)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1\}$, $k_1 = 2$, $E_1 = \operatorname{lin}\{(0,1)\}$, $\dim E_1 = 1$, φ *- nie jest diagonalizowalny* *b) brak wartości własnych,* φ *- nie jest diagonalizowalny* *c)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1\}$, $k_1 = 1$, φ *- nie jest diagonalizowalny* *d)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\}$, *widmo proste,* $E_{-1} = \operatorname{lin}\{(0,0,1)\}$, $\dim E_{-1} = 1$, $E_1 = \operatorname{lin}\{(1,-2,\frac{1}{2})\}$, $\dim E_1 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{(0,-3,1)\}$, $\dim E_2 = 1$, φ *- diagonalizowalny, baza wektorów własnych* $\{(0,0,1),(1,-2,\frac{1}{2}),(0,-3,1)\}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ *e)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 2\}$, $k_1 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{(0,1,0)\}$, $\dim E_2 = 1$, φ *- nie jest diagonizowalny* *f)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 2$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(1,3,1)\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_1 = \operatorname{lin}\{(1,2,0),(0,0,1)\}$, $\dim E_1 = 2$, φ *- diagonalizowalny* *g)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 2$, $E_0 = \operatorname{lin}\{(2,1,2)\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_1 = \operatorname{lin}\{(1,4,0),(0,-3,1)\}$, $\dim E_1 = 2$, φ *- diagonalizowalny* *)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\}$, *widmo proste,* $E_0 = \operatorname{lin}\{1\}$ *wielomiany stałe,* $\dim E_0 = 1$, $E_1 = \operatorname{lin}\{x\}$, $\dim E_1 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{x^2\}$, $\dim E_2 = 1$, φ *- diagonalizowalny, a w zasadzie* $P = I$, $D = M_\varphi$, *gdzie* M_φ *to macierz w bazie standardowej* *i)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0\}$, $k_1 = 4$, $E_0 = \operatorname{lin}\{1, x, x^2\}$, $\dim E_0 = 3$, φ *- nie jest diagonalizowalny* *j)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5\}$, *widmo proste,* $E_0 = \operatorname{lin}\{x^2 - 4\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{x^2 - 3x - 2\}$, $\dim E_2 = 1$, $E_5 = \operatorname{lin}\{x^2 + 1\}$, $\dim E_5 = 1$, φ *- diagonalizowalny, baza wektorów własnych* $\{b_1 = x^2 - 4, b_2 = x^3 - 3x - 2, b_3 = x^2 + 1\}$, $P = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *k)* $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = k_2 = 2$, $E_{-1} = \operatorname{lin}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_{-1} = 2$, $E_1 = \operatorname{lin}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$,

$\dim E_1 = 2$, *φ - diagonalizowalny,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *l)* *Spec*$(\varphi) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $E_0 = \operatorname{lin}\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_0 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, $\dim E_2 = 3$, *φ - diagonalizowalny,* $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** *a) tak,* $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *b) nie* *c) tak,* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *d) tak,* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **12.** *a) Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3\}$, $\dim E_1 = 1, \dim E_{-3} = 1$, *$A$ nie jest diagonalizowalna* *b) Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3\}$, $\dim E_1 = 1, \dim E_{-3} = 2$, *$A$ diagonalizowalna* *c) Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 5\}$, $\dim E_7 = 2, \dim E_5 = 1$, *$A$ nie jest diagonalizowalna* *d) Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2\}$, $\dim E_4 = \dim E_2 = 1, \dim E_6 = 2$, *$A$ diagonalizowalna* *e) Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3\}$, $\dim E_5 = \dim E_{-3} = 2$, *$A$ diagonalizowalna* **13.** *Dla macierzy A, B, C, D odpowiednio* $3, 1, 1, 2$. **14.** *a)* $\chi_A(t) = t^2 - 3t + 5$, *Spec*$(A) = \{\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{11}i}{2}, \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{11}i}{2}\}$, *widmo proste,* $E_{\lambda_1} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(\frac{1+\sqrt{11}i}{2}, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_1} = 1$, $E_{\lambda_2} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(\frac{1-\sqrt{11}i}{2}, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_2} = 1$, *$A$ - diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{11}i}{2} & \frac{1-\sqrt{11}i}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{11}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{11}i}{2} \end{bmatrix}$ *b)* $\chi_A(t) = (i - t)(1 - i - t)$, *Spec*$(A) = \{\lambda_1 = i, \lambda_2 = 1 - i\}$, *widmo proste,* $E_i = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(i - \frac{1}{2}, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_i = 1$, $E_{1-i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{1-i} = 1$, *$A$ - diagonalizowalna* *c)* $\chi_A(t) = (4 - t)(t - i)(t + 3i)$, *Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -3i\}$, *widmo proste,* $E_4 = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(0, 1, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_4 = 1$, $E_i = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(i, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_i = 1$, $E_{-3i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(-i, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{-3i} = 1$, *$A$ - diagonalizowalna,* $P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{bmatrix}$ *d)* $\chi_A(t) = (i - 1 - t)(2i - t)(i - 1 - t)$, *Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = i - 1\}$, $k_1 = 1, k_2 = 2$, $E_{2i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(2, 1 + i, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{2i} = 1$, $E_{i-1} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(1, 0, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{i-1} = 1$, *$A$ - nie jest diagonalizowalna* *e)* $\chi_A(t) =$, *Spec*$(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 =\}$, $k_1 = k_2 = 2$, $E_1 = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(1, 0, 0, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = 1$, $E_2 = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(0, 0, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_2 = 1$, *$A$ - nie jest diagonalizowalna* **15.** *a) Spec*$(\varphi) = \{\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i\}$, *widmo proste,* $E_i = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(i, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_i = 1$, $E_{-i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(1, i)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{-i} = 1$, *$\varphi$ - diagonalizowalny* *b) Spec*$(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 - i, \lambda_3 = 1 + i\}$, *widmo proste,* $E_2 = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(0, 1, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_2 = 1$, $E_{1-i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(-i, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{1-i} = 1$, $E_{1+i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(i, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{1+i} = 1$, *$\varphi$ - diagonalizowalny* *c) Spec*$(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3i, \lambda_3 = i\}$, *widmo proste,* $E_1 = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(0, 1, 0)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = 1$, $E_i = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(i, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_i = 1$, $E_{-3i} = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}}\{(-i, 0, 1)\}$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{-3i} = 1$, *$\varphi$ - diagonalizowalny* **16.** *a)* $x = 0$ *b)* $p = 6$ **17.** *a) dlagonalizaowalna dla* $a \in \mathbb{R}$ *b) diagonalizowalna dla* $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

18. *a)* $\varphi^{150}(1,0)=(\frac{2^{150}+4}{5},\frac{2^{151}-1}{5})$ *b)* $\varphi(x,y,z)=(-x+y-z,z,z)$, $\varphi^{105}(2,3,6)=(-5,6,6)$ *c)* $\varphi^{100}(3,6,9)=(-6,-3,0)$ **19.** *a)* $Spec(A)=\{0\}$ *b)* $Spec(A)=\{0,i,-i\}$ *c)* $Spec(A)=\{0,1\}$ **20.** *a)* $f_0(x)=e^{3x-3}$ *b)* $f_1(x)=x+5$, $f_2(x)=-9\sin 3x$, $f_3(x)=e^{\sqrt{10}x}$ **21.** *a)* $\lambda=0$, E_0 *- niezerowe wielomiany stałe* *b)* $\lambda_1=1$, E_1 *- niezerowe macierze symetryczne,* $\lambda_2=-1$, E_{-1} *- niezerowe macierze antysymetryczne,* **22.** *a)* $Spec(\frac{d}{dx})=\mathbb{R}$ *b)* $\varphi(a_1,a_2,a_3,\ldots)=(0,a_1,a_2,\ldots)$ *c)* $\begin{bmatrix}2&6\\1&3\end{bmatrix}$ **23.** *a)* $0,1$ *b)* 0 *c)* $0,-1$ *d) nad* $\mathbb{R}:1$, *nad* $\mathbb{C}:1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **26.** *a)* $Spec(A)=Spec(A^T)=\{1,6\}$, *dla macierzy A:* $E_1=\text{lin}\{(1,1,0),(-2,0,1)\}$, $E_6=\text{lin}\{(1,-2,1)\}$, *dla macierzy* A^T*:* $E_1=\text{lin}\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$, $E_6=\text{lin}\{(-1,1,-2)\}$ *b) dla macierzy A:* $Spec(A)=\{1,6\}$, $E_1=\text{lin}\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$, $E_6=\text{lin}\{(-1,1,-2)\}$, *dla macierzy* A^{-1}*:* $Spec(A^{-1})=\{1,\frac{1}{6}\}$, $E_1=\text{lin}\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$, $E_6=\text{lin}\{(-1,1,-2)\}$ *c)* $Spec(A)=\{1,3\}$, $E_1=\text{lin}\{(1,1)\}$, $E_3=\text{lin}\{(1,-1)\}$, $Spec(A^2)=\{1,9\}$, $Spec(A^{-1})=\{1,\frac{1}{3}\}$, $Spec(A+4I)=\{5,7\}$, *wektory własne te same dla wszystkich macierzy* **27.** *a)* $\det A=-588$ *b)* $Spec(A)=\{\lambda_1=-1,\lambda_2=1\}$, $k_1=k_2=1$, $Spec(A^2)=\{1\}$, $k=2$ *c)* 38 **28.** *b)* $\begin{bmatrix}2&3\\0&2\end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix}0&-2\\1&3\end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix}0&0&0\\8&0&7\\0&1&1\end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix}0&0&7\\0&0&5\\0&1&-8\end{bmatrix}$ **29.** *a)*

$$A^k=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^k&0\\0&(-3)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$$

b) $A^k=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3&1\\-8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-4)^n&0\\0&7^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\8&3\end{bmatrix}$ **30.** *a)* $a_n=2\cdot(-1)^n+2\cdot 3^n$ *b)* $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ *c)* $b_n=\frac{1}{70}\cdot 5^n+\frac{1}{30}\cdot 3^n+\frac{3}{35}\cdot(-2)^n$ *d)* $a_n=-\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}+\frac{3}{2}\cdot 4^{n-1}$ *e)* $a_n=2^n+4\cdot(-1)^n+(-2)^{n-1}$ *f)* $a_n=i(1+i)^{n-1}-i(1-i)^{n-1}$ *g)* $a_n=1+\frac{4}{3}\cdot(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n$

31. *a)* $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&4\\2&-1\end{bmatrix}$ *b)* $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$ *c)* $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&-2&2\\6&5&-2\\-6&-2&5\end{bmatrix}$ *d)* $A^{-1}=\frac{1}{75}\begin{bmatrix}15&10&-5\\-18&13&-14\\6&4&13\end{bmatrix}$ **32.** *a)* $\begin{bmatrix}2&8\\0&2\end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix}1&50\\0&1\end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix}1&2^{100}-1\\0&2^{100}\end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix}2724&-1330\\3990&-1931\end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix}8&0&38\\0&8&19\\0&0&27\end{bmatrix}$ *f)* $2^{99}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix}2&2&2\\3&2&2\\2&1&1\end{bmatrix}$ *i)* $B^9=256B$ *j)* $\begin{bmatrix}-44&0&-40\\-40&-64&0\\20&20&-104\end{bmatrix}$ *k)* $\begin{bmatrix}1&0&0\\25&1&0\\25&0&1\end{bmatrix}$ *l)* $\begin{bmatrix}6&0&20\\0&6&10\\0&0&16\end{bmatrix}$ *m)* $\begin{bmatrix}47&12\\60&-13\end{bmatrix}$

33. $Spec(B)=\{i,-i\}$