Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 9
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
styczeń 2024r.

Przestrzenie euklidesowe

1 Iloczyn skalarny i norma

Zadanie 1. *Czy $g : V \times V \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$?*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + 7x_2y_2$
b) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 7x_2y_2$
c) $V = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$
d) $V = \mathbb{R}^n$, $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$, *gdzie* $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$
e) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1(x)f_2(x)dx$
f) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_0^{\pi} f_1(x)f_2(x)dx$
g) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$
h) $V = \mathbb{R}_1[x]$, $g(p, q) = p(1)q(1) + 2p(2)q(2)$
i) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $g(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$
j)* $V = \mathbb{R}_n[x]$, $g(p, q) = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i)$, *gdzie* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
k) $V = M_n(\mathbb{R})$, $g(A, B) = \operatorname{tr}(A \cdot B^T)$
l) $V = \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = [x_1\, x_2\, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$
m) $V = \mathbb{R}[x]$, $g(p, g) = \deg(p \cdot q)$
n) $V = \mathbb{R}[x]$, $g(p, q) = (p \cdot q)(\alpha)$, *gdzie* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ustalone*
o) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $g(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$
p) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $g(p, q) = \int_0^{\infty} e^{-x}p(x)q(x)dx$
q) $V = \mathcal{C}([-2, 2], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 (x + 1)f_1(2x)f_2(2x)dx$
r) $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, $g(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 f_1(x)f_2(\frac{x}{2})dx$

WSKAZÓWKA do j): Wykorzystaj wyznacznik Vandermonde'a.

Zadanie 2. *Oblicz iloczyn skalarny wektorów $u, v \in V$ w danej przestrzeni euklidesowej.*

a) $V = \mathbb{R}^2$ *ze standardowym iloczynem skalarnym,* $u = (2, 3), v = (-1, 5)$
b) $V = \mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym,* $u = (1, 0, 1, 1), v = (-1, 2, 0, 1)$
c) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$,
$u = 2x^2 + 3x - 1, v = -7x + 5$
d) $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $u = e^{3x}, v = e^{-2x} + 5$
e) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A \cdot B^T)$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. *Niech $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, przy czym $\forall x \in [a, b]\ h(x) \geq 0$. Uzasadnij, że funkcja*

$\Phi : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\Phi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx,$$

jest iloczynem skalarnym w $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Zadanie 4. *Sprawdź, że poniższe odwzorowania to normy w podanej przestrzeni* $\mathbb{R}$*-liniowej.*

a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = |x|$ *b)* $||.||_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||x||_t = \sum_{i=1}^n |x_i|$

c) $||.||_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||x||_m = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ *d)* $||.||_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $||x||_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$

e) Niech $l^\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \mathbb{R} \wedge \sup |a_n| < \infty\}$ *przestrzeń ciągów ograniczonych oraz* $||.|| : l^\infty \to \mathbb{R}$, $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup |a_n|$

f) Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ *zbiór otwarty,* $k \in \mathbb{N}$ *oraz* $||.|| : \mathcal{C}^k(X) \to \mathbb{R}$, $||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|$

g) Niech $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ *to przestrzeń ciągów zbieżnych oraz* $||.|| : c \to \mathbb{R}$, $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup |a_n|$

h) Niech $c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ *to przestrzeń ciągów zbieżnych oraz* $||.|| : c_0 \to \mathbb{R}$, $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup |a_n|$

Zauważ, że zachodzą inkluzje $c_0 \subset c \subset l^\infty$.

Zadanie 5. *Niech* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Oblicz normy podanych wektorów.*

a) $V = \mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $v = (2, 7, -1, 0)$
b) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $f = 5$, $g = x + 5$, $h = 2\sin x - \cos x$
c) $V = \mathbb{R}_1[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0)$; $f = 3 - 7x$, $g = x + 1$
d) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A\cdot B^T)$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 6. *Niech* V *będzie przestrzenią euklidesową oraz niech* $u, v \in V$ *będą takie, że* $||u|| = 3, ||u+v|| = 4, ||u-v|| = 6$. *Oblicz* $||v||$.

Zadanie 7. *Oblicz miary kątów pomiędzy parami wektorów w danych przestrzeniach euklidesowych.*

a) $V = \mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym;* $u = (3, 2, -1, 0), v = (7, 0, 1, -1)$

b) $V = \mathbb{R}_1[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$; $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$

c) $V = \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$; $u(x) = \sin x, v(x) = \cos x$

Zadanie 8. *Rozważmy* $V = \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. *Podaj przykład wielomianu możliwie najniższego stopnia, tworzącego z funkcją* $f(x) = \sin x$ *kąt* $\arccos \frac{\sqrt{6}}{2\pi}$.

2 Dopełnienie ortogonalne, baza ortogonalna

UWAGA: Jeśli nie podano inaczej, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny.

Zadanie 9. *Czy podane układy wektorów są ortogonalne w przestrzeni euklidesowej V.*

a) $V = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 0, 1), v = (3, 1, -1)$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $u = (2, -3, 1, -1), v = (6, 1, -2, 7)$

c) $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, $u(x) = \sin x, v = \cos x$

d) $V = M_2(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

e) $V = \mathbb{R}^3$ *ze iloczynem skalarnym* $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$, $u = (1, 1, 0), v = (1, -1, -1)$

Zadanie 10. *a) Niech $u = (1, 2, 0, 3), v = (2, 3, -1, 0)$. Dobierz parametry $a, b \in \mathbb{R}$ w taki sposób, aby wektor $z = (0, 0, 1, 1,) + au + b$ ortogonalny do u i do v.*
b) Wyznacz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^4$ ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$ i takie że $||v|| = 2$.
c) Niech $u = (1, 1, -1, 0)$. Znajdź przykład wersora $v \in \mathbb{R}^4$ takiego, że $\sphericalangle(u, v) = \frac{\pi}{4}$.

Zadanie 11. *Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.*

a) Oblicz $\langle x^2, -1\rangle$, $||x + 1||$ oraz $\cos \sphericalangle(x + 1, x - 1)$.

b) Znajdź niezerowy wielomian możliwie najniższego stopnia należący do $\Big(\mathrm{lin}\{x - 1, x^2\}\Big)^{\perp}$.

c) Dobierz $a \in \mathbb{R}$ tak, by wielomiany $p(x) = 3x^2 + ax - 1$, $q(x) = 2x^2 + 6x - 1$ były ortogonalne.

Zadanie 12. *Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$-liniową V (ze standardowym iloczynem skalarnym, jeśli nie podano inaczej) i jej podprzestrzeń liniową $U \subset V$. Sprawdź, że $w \in U^{\perp}$.*

a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(3x - y, x + 2y + z, 2x - z, x + 4z), x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, $w = (2, 1, -3, -1)$

b) $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $U = \mathrm{lin}\{1, x^2, \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \sin^2 x\}$, $w = \sin x$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) : 2x = 3y = 5z\}$, $w = (4, -6, 0)$

d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, z + t = 0\}$, $w = (0, 0, 1, -1)$

e) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $U = \mathrm{lin}\{1, \cos 2x, \sin 2x\}$, $w = 2\sin x - 3\cos x$

f) $V = \mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $U = \mathbb{R}_1[x]$, $w = 6x^2 - 6x + 1$

Zadanie 13. *a) Dana jest podprzestrzeń $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę przestrzeni $W^{\perp}$.*

b) Dana jest podprzestrzeń $W = \operatorname{lin}\{w_1 = (3, 2, 0, 1, -4), w_2 = (1, 2, -2, 0, 1), w_3 = (3, -2, 6, -2, 5)\}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^5$. *Wyznacz bazę przestrzeni* $W^{\perp}$.

Zadanie 14. *Rozważmy przestrzeń liniową* $\mathbb{R}_n[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$, *gdzie* $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. *Wyznacz dopełnienia ortogonalne podprzestrzeni* U *i* W.

$$U = \{f \in \mathbb{R}_n[x] : \ f(1) = 0\} \quad W = \{f \in \mathbb{R}_n[x] : \ \deg(f) - parzysty\}$$

Zadanie 15. *Uzasadnij, że* $\mathcal{B}$ *jest bazą ortogonalną przestrzeni* V *i wyznacz współrzędne wektora* $v \in V$ *w tejże bazie.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, -2), b_2 = (12, 6)\big)$, $v = (1, 3)$

b) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), b_2 = (\frac{12}{13}, \frac{-5}{13})\big)$, $v = (13, 26)$

c) $V = \mathbb{R}_3[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = aa_1 + (b - c)(b_1 - c_1) + (2c - b)(2c_1 - b_1) + dd_1$, *gdzie* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $q(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$,
$\mathcal{B} = \big(b_1(x) = 2, b_2(x) = x + x^2, b_3(x) = x + 2x^2, b_4(x) = 3x^3\big)$, $v(x) = x^2 - x + 1$

d) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (2, 1, 1, 0), b_2 = (0, 1, -1, 3), b_3 = (2, -5, 1, 2), b_4 = (-11, 2, 20, 6)\big)$, $v = (1, 0, 0, -1)$

Zadanie 16. *Rozważmy przestrzeń* $\mathbb{R}_n[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = a_0b + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, *dla* $p = a_nx^n + \ldots a_1x + a_0$, $q = b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0$.

a) *Uzasadnij, że baza standardowa* $\mathcal{B} = \big(b_1 = 1, b_2 = x, \ldots, b_n = x^n\big)$ *jest ortonormalna.*
b) *Oblicz iloczyn skalarny wektorów* $p = x^2 + x - 1, q = 3x + 1$ *w przestrzeni* $R_2[x]$.

Zadanie 17. *Korzystając z macierzy przejścia* $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ *od bazy kanonicznej* $\mathcal{C}$ *do bazy ortonormalnej* $\mathcal{B}$ *przestrzeni* V, *oblicz współrzędne podanych wektorów w bazie* $\mathcal{B}$.

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), b_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})\big)$, $v = (1, 4)$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \big(b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, 3, 1), b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-4, 1, 5)\big)$, $v = (1, 1, 1)$

Zadanie 18. ***Metodą Grama-Schmidta*** *dokonaj ortogonalizacji baz podanych przestrzeni euklidesowych* V, *a następnie wskaż bazy ortonormalne.*

a) $V = \mathbb{R}^3$, *baza* $\{u_1 = (1, -2, 0), u_2 = (5, 5, 1), u_3 = (5, 4, 4)\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, *baza* $\{u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-3, -4, -1), u_3 = (-4, -7, 0)\}$

c) $V = \operatorname{lin}\{u_1 = (1, 2, -2, 1), u_2 = (1, 1, 0, 2), u_3 = (1, 8, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$

d) $V = \mathbb{R}_2[x]$, *z iloczynem skalarnym* $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$, *baza* $\{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$

e) $V = \operatorname{lin}\{u_1 = (1, 8, 4), u_2 = (2, 6, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$

f) $V = \mathrm{lin}\{f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2\} \subset \mathcal{C}([1,1],\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

g) $V = \mathbb{R}^2$, baza $\{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$ z iloczynem skalarnym $\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

h) $V = \mathrm{lin}\{f_1 = 1, f_2 = x+1, f_3 = |x|, f_4 = \sin x\} \subset \mathcal{C}([1,1],\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

i) $V = \mathbb{R}_2[x]$, z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$, baza $\{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$

Zadanie 19. *Podane układy wektorów uzupełnij do bazy ortogonalnej przestrzeni V.*

a) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,4,-1), v_2 = (2,-1,-1)$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,1,1,0), v_2 = (0,1,-1,1)$

c) $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = \langle ax^2 + bx + c, a_1x^2 + b_1x + c_1\rangle = aa_1 + bb_1 + cc_1$, $v_1 = 2x + 1$

d) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y + z = t\} \subset \mathbb{R}^4$, $v_1 = (3,2,3,5)$

Zadanie 20. *Wyznacz bazę ortnornormalną $\mathcal{B}'$ przestrzeni euklidesowej V i podaj współrzędne wektora $v \in V$ w tejże bazie.*

a) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 4x - z = 2y - 3z + 2w = 0\} \subset \mathbb{R}^4$, $v = (1,1,4,5)$

b) $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, $v = x$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$, $v = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$, $v = x^2 + x + 1$

3 Projekcje ortogonalne

UWAGA: Jeśli nie podano inaczej, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny.

Zadanie 21. *Dana jest podprzestrzeń $U \subset V$ przestrzeni euklidesowej V. Wyznacz rzut ortogonalny $\pi_U(v)$ wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, U to oś Oy; $v = (7,4)$

b) $V = \mathbb{R}^2$, U to prosta $x = \frac{1}{3}y$, $v = (-3,5)$

c) $V = \mathbb{R}^3$, U to prosta $l : \frac{x}{2} = -y = z$; $v = (-4,5,6)$

d) $V = \mathbb{R}^3$, U to prosta $l : x = 2y = 4z$; $v = (3,-2,1)$

e) $V=\mathbb{R}^4$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=(1,1,-1,0),u_2=(0,2,-1,1),u_3=(3,5,-4,1)\}$; $v=(3,2,7,0)$

f) $V=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=x+1,u_2=x-1\}$; $v=x^2$

g) $V=\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=1,u_2=\cos x\}$; $v=x$

h) $V=\mathbb{R}^4$, $U=\operatorname{lin}\{u_1=(1,1,1,1),u_2=(1,2,2,-1),u_3=(1,0,0,3)\}$, $v=(4,-1,3,4)$

i) $V=\mathbb{R}^3$ *z iloczynem skalarnym* $\langle x,y\rangle=2x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_1y_3-x_3y_1$,
$U=\operatorname{lin}\{u_1=(0,1,1),u_2=(0,0,1)\}$, $v=(1,1,1)$

j) $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x-y+3z=0\}$, $v=(1,1,1)$

Zadanie 22. *Wyznacz rzut ortogonalny* $\pi_U(v)$ *wektora* $v\in V$ *na podprzestrzeń* U*, dla której wskazano bazę ortogonalną* $\mathcal{B}$*.*

a) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\big(b_1=(5,-1,3),b_2=(1,2,-1)\big)$; $v=(1,1,1)$

b) $V=\mathbb{R}^5$, $\mathcal{B}=\big(e_1=(1,0,0,0,0),e_3=(0,0,1,0,0),e_5=(0,0,0,0,1)\big)$; $v=(1,2,3,4,5)$

c) $V=\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}=\big(b_1=\frac{1}{\sqrt5}(1,0,2,0),b_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(2,2,-1,1)\big)$; $v=(1,0,0,0)$

d) $V=\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\big(u_1=\sin x+\cos x,u_2=\sin x-\cos x\big)$; $v=x$

e) $V=\mathbb{R}_2[x]$ *z iloczynem skalarnym* $\langle p,q\rangle=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$,
$\mathcal{B}=\big(b_1=x-1,b_2=3x^2-6x+1\big)$; $v=1$

f) $V=\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\big(b_1=\sin x,b_2=\sin 2x,\dots,b_n=\sin nx\big)$; $v=x$

Zadanie 23. *Dana jest podprzestrzeń liniowa* U *przestrzeni* $\mathbb{R}^5$*.*

$$U=\{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5:\ x+y+2z=0\ \wedge\ x+z+t+2u=0\}$$

a) Wyznacz bazę U*.*
b) Metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji tejże bazy.
c) Podaj bazę ortonormalną.
d) Wyznacz współrzędne wektora $p=(1,7,-4,1,1)$ *w znalezionej bazie ortogonalnej.*
e) Wyznacz rzut ortogonalny wektora $v=(1,0,2,1,1)$ *na podprzestrzeń* U*.*

3.1 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Zadanie 24. *Sprawdź, że podane macierze są ortogonalne.*

a) $A=\begin{bmatrix}\frac45 & \frac35\\ \frac35 & -\frac45\end{bmatrix}$ *b)* $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ *c)* $A=\frac13\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *ustalone* *e)* $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

Zadanie 25. *Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?*

Zadanie 26. *a) Uzasadnij, że macierz trójkątna górna (lub trójkątna dolna) i ortogonalna jest diagonalna.*
b) Niech A będzie macierzą ortogonalną, zaś B macierzą powstałą przez permutację wierszy macierzy A. Uzasadnij, że B również jest ortogonalna.

Zadanie 27 (Izometrie liniowe na płaszczyźnie)**.** *Nazwij przekształcenia ortogonalne płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, reprezentowane przez macierz A. Określ, czy są to symetrie (względem czego?) czy rotacje (o jaki kąt?).*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *d)* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *g)* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 28. *Wyznacz współrzędne punktu, który otrzymujemy poprzez zadany obrót.*

a) obrót punktu $P = (1, -2)$ o kąt $\frac{\pi}{3}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
b) obrót punktu $P = (3, 4)$ o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara
c) obrót punktu $P = (5, 2, 60)$ o kąt π wokół osi Ox w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (parząc z góry)

Zadanie 29. *Rozważamy w $\mathbb{R}^3$ bazę kanoniczną (e_1, e_2, e_3) i standardowy iloczyn skalarny. Dane jest $f \in End(\mathbb{R}^3)$ takie, że $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = -e_1$. Czy f jest izometrią liniową? Jeśli tak, podaj jaką.*

Zadanie 30. *a) Wyznacz macierz izometrii liniowej płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.*

b) Wyznacz macierz izometrii liniowej płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 3x$.

c) Wyznacz macierz odpowiadającą izometrii liniowej $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, gdzie φ_1 jest obrotem (rotacją) o kąt 30° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, φ_2 jest odbiciem (symetrią ortogonalną) względem prostej tworzącej z dodatnią półosią Ox kąt 120°, zaś φ_3 jest obrotem o kąt 210° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 31. *Dany jest punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Podaj jego współrzędne po dokonaniu obrotu o $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Ox, następnie obrotu o $\frac{\pi}{4}$ wokół osi Oy i kolejno obrotu o $\frac{\pi}{3}$ wokół osi Oz.*

Zadanie 32. *W $\mathbb{R}^n$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Czy $A \in O(2)$ ($A \in O(3)$)? Jeśli tak, jakie przekształcenie liniowe płaszczyzny (przestrzeni) reprezentuje?*

a) $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *d)* $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

e) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ *f)* $A = \begin{bmatrix} \cos\eta & \sin\eta & 0 \\ \sin\eta & -\cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\eta \in \mathbb{R}$ *ustalone*

g) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ *h)* $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *i)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Zadanie 33 (Obrót prostej na płaszczyźnie)**.** *Wyznacz równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.*

Zadanie 34. *Wyznacz macierz rotacji w przestrzeni o kąt θ wokół osi o kierunku u.*

a) $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ *oraz* $\theta = \frac{2}{3}\pi$

Zadanie 35. *a) Dane jest $f \in End(\mathbb{R}^2)$ będące złożeniem odbicia względem prostej $y = x$ z rotacją o kąt $\frac{\pi}{3}$ i następnie z odbiciem względem osi Oy. Wyznacz reprezentację macierzową f w bazie kanonicznej. Czy f jest obrotem, czy odbiciem?*

b) Zapisz macierz reprezentującą $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$, będące złożeniem obrotu o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół osi Oy, potem obrotu o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz. Wyznacz obraz odcinka $\overline{OP}$ poprzez φ, gdzie $O = (0,0,0)$, $P = (1,1,1)$.

Zadanie 36. *Uzasadnij, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ macierz* $A_t = \frac{1}{1+t+t^2}\begin{bmatrix} -t & t+t^2 & 1+t \\ 1+t & -t & t+t^2 \\ t+t^2 & 1+t & -t \end{bmatrix}$ *reprezentuje obrót. Wyznacz cosinus kąta obrotu oraz oś obrotu.*

Zadanie 37. *Uzasadni, że jeśli $A, B \in SO(2)$, to wówczas $AB = BA$.*

Zadanie 38. *W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane jest odwzorowanie $g \in End(\mathbb{R}^4)$ takie, że $g\Big((2,2,2,2)\Big) = (4,0,0,0)$, $g\Big((2,0,2,2)\Big) = (3,-1,1,1)$, $g\Big((2,2,0,2)\Big) = (3,1,-1,1)$, $g\Big((2,2,2,0)\Big) = (3,1,1,-1)$. Czy g jest przekształceniem ortogonalnym?*

Zadanie 39. *a) Rozważmy przestrzeń $V = \mathbb{R}_n[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ oraz odwzorowania $f_1, f_2 \in End(V)$ dane $f_1(p(x)) = p(-x)$ oraz $f_2(p(x)) = x^n p(\frac{1}{x})$ dla $p \in V$. Czy są to przekształcenia ortogonalne?*

b) Czy f_1 i f_2 są przekształceniami ortogonalnymi, jeśli w przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$ rozważymy iloczyn skalarny $\langle p,q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$, dla $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots b_n x^n$?

Zadanie 40. *Wykorzystując **rotacje Givensa**, skonstruuj bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zawierającą dany wersor x.*

a) $x = \frac{1}{3}(-1,2,0,-2)$ *b)* $x = \frac{1}{\sqrt{35}}(5,-1,3)$ *c)* $x = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ *d)* $x = \frac{1}{5}(3,0,4)$

e) $x = \frac{1}{\sqrt{46}}(6,-1,3)$

Odpowiedzi

1. *a), b), f), i), l), m), n), r) nie* *c), d) e), g), h), j), k), o), p), q) tak* **2.** *a)* 13 *b)* 0 *c)* -37 *d)* $e-1+\frac{5}{3}(e^3-1)$ *e)* 3 **5.** *a)* $\sqrt{54}$ *b)* $3\sqrt{\pi}$ *c)* 1 *d)* $\sqrt{3}$ **6.** $||v|| = \sqrt{17}$ **7.** *a)* $\arccos\frac{20}{\sqrt{714}}$ *b)* $\arccos\frac{3}{\sqrt{82}}$ *c)* $\arccos(-\frac{1}{4})$ **8.** $1-\frac{1}{2\pi}x$ **9.** *b), c), d), e) są ortogonalne* **10.** *a)* $a=-\frac{25}{66}, b=\frac{19}{66}$ *b)* $v=(v_1,v_2,-v_1,v_4)$ *takie, że* $2v_1^2+v_2^2+v_4^2=4$, *np.* $v=(1,1,-1,1)$ *c)* $v=\frac{1}{8}(\sqrt{6},\sqrt{6},\sqrt{6},\sqrt{56})$ **11.** *a)* $\langle x^2,-1\rangle=-\frac{1}{3}$, $||x+1||=\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\cos\sphericalangle(x+1,x-1)=-\frac{2}{\sqrt{7}}$ *b)* $50x^2-52x+9$ *c)* $a=-\frac{61}{60}$ **13.** *a)* $\{(1,0,0,0),(0,1,-1,1)\}$ *b)* $\{(-1,\frac{3}{2},1,0,0),(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,1,0),(-\frac{3}{2},\frac{1}{4},0,0,1)\}$ **14.** $U^\perp=\mathrm{lin}\{1+x+\ldots+x^n\}$ *- wielomiany, których wszystkie współczynniki są takie same,* $W^\perp$ *- wielomiany stopnia nieparzystego* **15.** *a)* $v=(-1,\frac{1}{6})_\mathcal{B}$ *b)* $v=(29,2)_\mathcal{B}$ *c)* $v=(\frac{1}{2},-3,2,0)_\mathcal{B}$ *d)* $v=(\frac{1}{3},-\frac{3}{11},0,-\frac{1}{33})_\mathcal{B}$ **16.** 1 **17.** *a)* $v=(\frac{9}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})_\mathcal{B}$ *b)* $v=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{42}})_\mathcal{B}$ **18.** *a)* $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0),\frac{1}{\sqrt{46}}(6,3,1),\frac{1}{\sqrt{46}}(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},3)\}$ *b)* $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\}$ *c)* $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,1),\sqrt{\frac{2}{7}}(\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2}),\frac{14}{\sqrt{8682}}(-\frac{5}{7},5,\frac{41}{14},-\frac{51}{14})\}$ *d)* $\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}x,\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-\frac{2}{3})\}$ *e)* $\{\frac{1}{9}(1,8,4),\frac{1}{9\sqrt{5}}(20,-2,-1)\}$ *f)* $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x,\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2-\frac{1}{3})\}$ *g)* $\{(1,0),\sqrt{\frac{3}{2}}(-1,-\frac{1}{2})\}$ *h)* $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x,\sqrt{6}(|x|-\frac{1}{2}),\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\sin x-3(\sin 1-\cos 1)x)\}$, *gdzie* $\alpha=1+\frac{137}{6}\sin 2$ *i)* $\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ **19.** *a)* $v_3=v_1\times v_2=(-6,-3,-9)$ *b)* $v_3=\frac{1}{3}(-1,0,1,1), v_4=\frac{1}{3}(1,-1,0,1)$ *c)* $v_2=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}, v_3=x^2$ *d)* $v_2=\frac{5}{47}(7,-11,7,-4)$ **20.** *a)* $\mathcal{B}'=\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{35}}(1,3,4,3)\}$, $v=(-2\sqrt{2},\frac{26}{\sqrt{35}})_{\mathcal{B}'}$ *b)* $\mathcal{B}'=\{1,\sqrt{3}(2x-1),6\sqrt{5}(x^2-x+\frac{1}{6})\}$, $v=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0)_{\mathcal{B}'}$ *c)* $\mathcal{B}'=\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\}$, $v=(1,5,2,-3)_{\mathcal{B}'}$ *d)* $\mathcal{B}'=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(3x^2-6x+1)\}$, $v=(\frac{11}{\sqrt{6}},\frac{6}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{6}})_{\mathcal{B}'}$ **21.** *a)* $(0,4)$ *b)* $\frac{1}{5}(6,18)$ *c)* $(-\frac{7}{3},\frac{7}{6},-\frac{7}{6})$ *d)* $\frac{3}{7}(4,2,1)$ *e)* $\frac{1}{3}(10,9,19,1)$ *f)* $x-\frac{1}{6}$ *g)* π *h)* $\frac{1}{2}(5,3,3,9)$ *i)* $(0,1,0)$ *j)* $\frac{1}{7}(3,9,1)$ **22.** *a)* $(\frac{4}{3},\frac{7}{15},\frac{4}{15})$ *b)* $(1,0,3,0,5)$ *c)* $\frac{1}{5}(3,2,1,1)$ *d)* $-2\sin x$ *e)* 0 *f)* $-2\pi\sin x-\pi\sin 2x-\frac{2}{3}\pi\sin 3x-\ldots-\frac{2\pi}{n}\sin nx$ **23.** *a) baza* $\{b_1=(1,1,-1,0,0),b_2=(0,2,-1,1,0),b_3=(0,4,-2,0,1,)\}$ *b) baza ortogonalna* $\mathcal{C}=\{c_1=(1,1,-1,0,0),c_2=(-1,1,0,1,0),c_3=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3},1)\}$ *c) baza ortonormalna* $\mathcal{C}'=\{c_1'=\frac{1}{\sqrt{3}}c_1,c_2'=\frac{1}{\sqrt{3}}c_2,c_3'=\frac{3}{\sqrt{33}}c_3\}$ *d)* $p=[4,\frac{7}{3},1]_\mathcal{C}$ *e)* $\pi_U(v)=\frac{1}{33}(-5,-17,11,12,-9)$ **25.** *nie* **27.** *a) identyczność* *b) odbicie względem osi Oy* *c) odbicie względem osi Ox* *d) obrót o kąt* $180°$ *e) odbicie względem prostej* $y=x$ *f) obrót o kąt* $90°$ *zgodnie z ruchem wskazówek zegara* *g) obrót o kąt* $90°$ *przeciwnie do ruchu wskazówek zegara* *h) odbicie względem prostej* $y=-x$ **28.** *a)* $(\frac{1}{2}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-1)$ *b)* $(4,-3)$ *c)* $(5,-2,-60)$ **29.** *izometria liniowa, złożenie obrotu o kąt* $\frac{\pi}{3}$ *wokół prostej o kierunku* $v=(1,-1,1)$ *i odbicia względem płaszczyzny prostopadłej do* v **30.** *a)* $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&4\\4&3\end{bmatrix}$ *b)* $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4&3\\3&4\end{bmatrix}$ *c)* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{bmatrix}$ **31.** $(\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0+y_0+\sqrt{6}z_0),\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}x_0+\sqrt{3}y_0-\sqrt{2}z_0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_0+y_0))$ **32.** *a) obrót o kąt* $210°$ *przeciwnie do ruchu wskazówek zegara* *b) odbicie względem* $y=\frac{1}{3}x$ *c) złożenie obrotu o kąt* $-\frac{\pi}{3}$ *wokół prostej o kierunku* $v=(1,1,1)$ *i odbicia względem płaszczyzny prostopadłej do* v *d) obrót o kąt* π *wokół prostej o kierunku* $v=(1,2,2)$ *e) obrót o kąt* $\arccos\frac{2+\sqrt{2}}{8}$ *wokół prostej o kierunku* $v=(\sqrt{2}+1,-1,1)$ *f) obrót o kąt* π *wokół prostej o kierunku* $v=(\sin\eta,-1-\cos\eta,0)$ *g) obrót o kąt* π *wokół prostej o kierunku* $v=(1,1,1)$ *h) obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt* $\frac{2}{3}\pi$ *i) obrót o kąt* $\frac{2}{3}\pi$ *wokół prostej o kierunku* $v=(1,1,1)$ **33.**

$(m+1)x+(m-1)y=0$ **34.** *a)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **35.** *a)* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, *rotacja o kąt* $\frac{\pi}{6}$ *zgodnie z ruchem wskazówek zegara* *b)* $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, *obrazem odcinka* $\overline{OP}$ *jest odcinek* $\overline{OP'}$, *gdzie* $P' = (-1, \sqrt{2}, 0)$ **36.** $\cos\theta = -\frac{1}{2}\frac{1+4t+t^2}{1+t+t^2}$, $v = (1,1,1)$ **38.** *tak* **39.** *a), b)* f_1 *i* f_2 *są ortogonalne* **40.** *a)* $\frac{1}{3}(-1,2,0,-2), (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, 0), (0,0,1,0), (\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, 0, \frac{\sqrt{5}}{3})$ *b)* $\frac{1}{\sqrt{35}}(5,-1,3), \frac{1}{\sqrt{26}}(1,5,0), \frac{1}{\sqrt{26\cdot 35}}(-15,3,26)$ *c)* $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$ *d)* $\frac{1}{5}(3,0,4), (0,1,0), \frac{1}{5}(-4,0,3)$ *e)* $\frac{1}{\sqrt{46}}(6,-1,3), \frac{1}{\sqrt{37}}(1,6,0), \frac{1}{\sqrt{37\cdot 46}}(-18,3,37)$