Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA, zestaw zadań nr 10
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
styczeń 2024r.

Przestrzenie unitarne

1 Macierze hermitowskie, unitarne i normalne

Zadanie 1. *Dla danych macierzy A wyznacz macierz A^*.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3-i & 4 & 1+i \\ 0 & -1+3i & 2i \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 & 0 \\ 3 & 3i & 1 \\ 2-i & 5 & 5i \end{bmatrix}$$

Zadanie 2. *Czy podane macierze są hermitowskie? Czy są unitarne?*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \quad d)\ A = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$e)\ A = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad f)\ A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ -i\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$g)\ A = \begin{bmatrix} ai & -\sqrt{1+a^2} \\ \sqrt{1+a^2} & -ai \end{bmatrix},\ a\in\mathbb{R} \quad h)\ A = \tfrac{1}{\sqrt{2a^2+1}}\begin{bmatrix} ai & -\sqrt{1+a^2} \\ \sqrt{1+a^2} & -ai \end{bmatrix},\ a\in\mathbb{R}$$

$$i)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -4+3i \\ 2+i & -1 & -i \\ -4-3i & i & 5 \end{bmatrix} \quad j)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1+8i & 0 & 2i \\ 1-8i & -1 & 3-5i & 7+\frac{1}{2}i \\ 0 & 3+5i & 0 & 1 \\ -2i & 7-\frac{1}{2}i & 1 & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. *Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie rzeczywistą macierzą antysumetryczną. Uzasadnij poniże stwierdzenia.*

a) iA jest hermitowska

b) Jeśli istnieje $v \in V$ taki, że $A^2v = 0$, to wówczas $Av = 0$.

Zadanie 4. *Dana jest macierz* $A = \begin{bmatrix} i & 2+i \\ -2+i & 3i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Sprawdź, że A jest antyhermitowska.

b) Rozważmy iloczyn skalarny $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$. Oblicz normę macierzy A.

Zadanie 5. *Dana jest macierz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Uzasadnij, że A jest hermitowska.

b) Sprawdź, że wartości własne A są rzeczywiste.

c) Sprawdź, że wektory własne macierzy A odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

Zadanie 6. *Dana jest macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Uzasadnij poniższe stwierdzenia.*

a) $\det\overline{A} = \overline{\det A}$

b) Jeśli A jest hermitowska, to $\mathrm{tr}A \in \mathbb{R}$ oraz $\det A \in \mathbb{R}$.

b) A jest unitarna wtedy i tylko wtedy, gdy jej kolumny tworzą układ ortonormalny w $\mathbb{C}^n$.

Zadanie 7. *Czy podane macierze są normalne? A unitarne?*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8. *Uzasadnij, że macierz A jest unitarna wykazując, że zbiór wierszy tej macierzy jest układem ortonormalnym.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{5i}{2\sqrt{15}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

2 Unitarna diagonalizacja

Zadanie 9. *Dokonaj unitarnej diagonalizacji macierzy hermitowskiej $A \in M_n(\mathbb{C})$. Wskaż macierz unitarną U diagonalizującą A.*

$$a)\ A = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{bmatrix} \qquad c)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10. *Dokonaj ortogonalnej diagonalizacji rzeczywistej macierzy symetrycznej A. Podaj macierz ortogonalną Q diagonalizującą A.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \qquad d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 11. *Dokonaj unitarnej diagonalizacji podanych macierzy normalnych / antyhermitowskich $A \in M_3(\mathbb{C})$. Podaj macierz unitarną U diagonalizującą A.*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \tfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 4+3i & 4i & 6-2i \\ -4i & 4+3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 12. *a) Mówimy, że macierze diagonalizowalne $A_1, \ldots, A_r \in M_n(K)$ (endomorfizmy diagonalizowalne $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in End(V)$) są* ***wspólnie/równocześnie diagonalizowalne****, jeśli istnieje taka baza przestrzeni V, w której wszystkie $A_1, \ldots, A_r$ są diagonalne. Uzasadnij, że macierze diagonalizowalne $A_1, \ldots, A_r \in M_n(K)$ są wspólnie diagonalizowalne wtedy i tylko wtedy gdy $A_1, \ldots, A_r$ komutują parami.*

b) Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, gdzie $a \neq b$, $a \neq 0, b \neq 0$. Czy A i B komutują? Czy są diagonalizowalne?

Odpowiedzi

1. *a)* $A^* = \begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 4 & -1-3i \\ 1-i & -2i \end{bmatrix}$ *b)* $A^* = \begin{bmatrix} 2-i & 3 & 2+i \\ 1 & -3i & 5 \\ 0 & 1 & -5i \end{bmatrix}$ **2.** *unitarne: b), c), d), e), f) hermitowskie: a), b), f), i), j)* **3.** *b) Wskazówka:* $||Av|| = (Av)^T(Av)$ **4.** *b)* $||A|| = 2\sqrt{5}$ **7.** *a), b) normalne, ale nie unitarne* **9.** *a)* $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{bmatrix}, U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $U = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}, U^*AU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ *c)* $U = \begin{bmatrix} \frac{1+3i}{\sqrt{40}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} & \frac{1-21i}{\sqrt{728}} \\ \frac{-2-i}{\sqrt{40}} & \frac{1+2i}{\sqrt{7}} & \frac{6-9i}{\sqrt{728}} \\ \frac{5}{\sqrt{40}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{13}{\sqrt{728}} \end{bmatrix}, U^*AU = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

d) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **10.** *a)* $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, Q^TAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$

$Q^TAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *c)* $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, Q^TAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ *d)* $Q = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$

$Q^TAQ = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **11.** *a)* $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}, U^*AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}i \end{bmatrix}$

b) $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2i & i & 2i \\ i & -2i & 2i \end{bmatrix}, U^*AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$ **12.** *b) A i B komutują, nie są wspólnie diagonalizowalne (ani A, ani B nie jest diagonalizowalna)*