Fizyka techniczna - Kartkówka 1 $\qquad$ 20 pkt

Zad. 1 Czy zbiór $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ z działaniem "$\circ$" zadanym wzorem $x\circ y := x\cdot|y|$ stanowi półgrupę / grupę (przemienną)?

Działanie "$\circ$"

- wewnętrzne : $x\neq 0,\ y\neq 0 \Rightarrow |y|\neq 0 \ \wedge\ x\cdot|y| = x\circ y \neq 0$
- nieprzemienne : $2\circ(-1) = 2\cdot|-1| = 2 \neq (-1)\circ 2 = -1\cdot 2 = -2$
- łączne : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad L = (x\circ y)\circ z = (x\cdot|y|)\circ z = x\cdot|y|\cdot|z|$ $\qquad L=P$
  $P = x\circ(y\circ z) = x\circ(y\cdot|z|) = x\cdot\big|y\cdot|z|\big| = x\cdot|y|\cdot|z|$
- brak el. neutralnego

$$\begin{cases} x\circ e = x \\ e\circ x = x\end{cases} \iff \begin{cases} x\cdot|e| = x \Rightarrow |e| = 1 \\ e\cdot|x| = x \end{cases}$$ $x\geq 0$ powinno być 1, $x<0$ powinno być -1

Półgrupa nieprzemienna bez el. neutralnego

Zad. 2

a) Rozwiąż równanie $-i\cdot(\bar{z})^2 = z^3$

$z=0$ spełnia równanie

Zał. $z\neq 0 \Rightarrow \exists r>0,\ \varphi\in\mathbb{R}:\ z = r\cdot e^{i\varphi}$

$$-i\cdot(\bar{z})^2 = z^3$$
$$e^{\frac{3}{2}\pi i}\cdot(re^{-i\varphi})^2 = (re^{\varphi i})^3$$
$$e^{\frac{3}{2}\pi i}\cdot r^2 e^{-2i\varphi} = r^3 e^{3\varphi i} \quad /:r^2 /\cdot e^{2i\varphi}$$
$$1\cdot e^{\frac{3}{2}\pi i} = r\cdot e^{5\varphi i} \Rightarrow r = 1 \ \wedge\ 5\varphi = \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$\varphi_k = \frac{3}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi,\ k\in\{0,1,2,3,4\}$

Rozw: $\quad z=0,\quad z_k = e^{\varphi_k\cdot i},\ k\in\{0,1,2,3,4\}$

b) Zaznacz na płaszczyźnie zbiór $\left\{z\in\mathbb{C}:\ \arg(z) = \arg\left[\underbrace{\frac{(1-i)^5}{i^{11}\cdot(1+i\sqrt{3})^3}}_{w}\right]\right\}$

$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

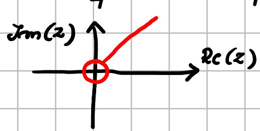
$i^{11} = (i^2)^5\cdot i = -i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})$

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$w = \frac{(\sqrt{2})^5\cdot\left(\cos(-\frac{5}{4}\pi) + i\sin(-\frac{5}{4}\pi)\right)}{\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right)\cdot 2^3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{8}$$

$$-\frac{5}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{7}{4}\pi$$

$\arg(w) = -\frac{7}{4}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{4}$



Zad. 3 Korzystając z zasady indukcji matematycznej, uzasadnij stwierdzenie.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k\cdot(k!) = (n+1)! - 1$$

1) $n_0 = 1 \qquad L = \sum_{k=1}^{1} k\cdot(k!) = 1\cdot(1!) = 1 \qquad P = 2! - 1 = 1 \qquad L=P$

2) Czy $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k!) = (n+1)! - 1}_{\text{zał. indukcyjne}} \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot(k!) = (n+2)! - 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot(k!) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot(k!) + (n+1)\cdot(n+1)! \overset{\text{zał. ind.}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! =$$
$$= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 \qquad \text{cbdo}$$

3) Na mocy zasady indukcji matematycznej $\forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=1}^{n} k\cdot(k!) = (n+1)! - 1$