WFiIS, fizyka techniczna, I rok, grupa 1 19 grudnia 2023r.

ALGEBRA - Kartkówka 3

Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. *Podaj i uzasadnij odpowiedź na poniższe pytania.*

a) (2 pkt) Czy $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0 \ \vee \ yz = 0\}$ *jest podprzestrzenią liniową* $\mathbb{R}^3$*?*

b) (6 pkt) Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ *podany układ wektorów jest bazą przestrzeni* $\mathbb{R}_2[x]$*?*

$$p = -2ax + 1 \quad q = -x^2 - 4x + 1 \quad r = a^2x^2 - ax + 1$$

c) (2 pkt) Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dane wzorem* $\varphi(x) = (x + \pi, \pi x, -\pi x)$ *jest liniowe?*

Zadanie 2. *(12 pkt) W przestrzeniach* $\mathbb{R}^4$ *i* $\mathbb{R}^3$ *rozważamy odpowiednio bazy* $\mathcal{B}$ *oraz* $\mathcal{C}$*.*

$$\mathcal{B} = \Big(b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (1, 1, 1, 0), b_3 = (1, 1, 0, 0), b_4 = (1, 0, 0, 0)\Big)$$

$$\mathcal{C} = \Big(c_1 = (0, -1, 0), c_2 = (1, 0, 0), c_3 = (1, 1, 1)\Big)$$

Dane jest odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *takie, że* $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Za pomocą A' *wyznacz obraz wektora* $v = (5, 0, 1, 0)$ *poprzez* φ*. Podaj jego współrzędne w bazie kanonicznej* $\mathbb{R}^3$*.*

b) Podaj wzór odwzorowania φ*.*

Zadanie 3. *Odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *dane jest wzorem*

$$\varphi(x, y, z) = (5x - y + z, x + z, y - z, -x - y - z).$$

a) (3 pkt) Wyznacz $Ker(\varphi)$ *oraz* $Im(\varphi)$*. Podaj ich wymiary.*

b) (2 pkt) Czy φ *jest monomorfizmem / epimorfizmem / izomorfizmem? Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 4. *(3 pkt) Układ macierzy* $\{A, B\}$ *uzupełnij do bazy przestrzeni* $M_2(\mathbb{R})$*.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$