WFiIS, fizyka techniczna, I rok, grupa 1 16 stycznia 2024r.

ALGEBRA - Kartkówka 4

Proszę nie zapominać o niezbędnych komentarzach.
Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. *Dane są zespolona przestrzeń liniowa* $(\mathbb{C}^2, +, \mathbb{C}\cdot)$ *oraz endomorfizm*

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad \varphi(z, w) = (iz, 2z + w - iw).$$

a) (2 pkt) Uzasadnij, że φ *jest diagonalizowalny.*
b) (7 pkt) Wyznacz macierz diagonalizującą P *oraz macierz diagonalną* D.

Zadanie 2. *(8 pkt) Endomorfizm* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ *dany jest za pomocą przyporządkowania*

$$f(1, 0, 0) = (-3, 0, 0), \quad f(2, 2, 0) = (0, 0, 0), \quad f(0, 1, 1) = (0, 3, 3).$$

Wyznacz $f^{314}(2, 7, 2)$ *i podaj wynik w bazie kanonicznej przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. *a) (3 pkt) Dana jest macierz* A *endomorfizmu* $\varphi \in End(\mathbb{R}^4)$ *w bazach kanonicznych. Dobierz wartość parametru* $p \in \mathbb{R}$ *tak, by* φ *miał dwuwymiarową podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej* $\lambda = 7$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) (3 pkt) Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, oblicz B^5, *dla* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. *W przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}_2[x]$ *rozważamy iloczyn skalarny taki, że*

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_2[x] \quad \langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Dana jest podprzestrzeń liniowa

$$U = \operatorname{lin}\{b_1 = x,\, b_2 = -1 - x + x^2\}.$$

a) (3 pkt) Metodą Grama-Schmidta dokonaj ortogonalizacji bazy przestrzeni U.

b) (4 pkt) Wykorzystując znalezioną bazę ortogonalną, wyznacz rzut ortogonalny wektora $r = 5 + x^2$ *na podprzestrzeń* U *i podaj jego współrzędne w bazie standardowej przestrzeni* $\mathbb{R}_2[x]$.