Metody algebry liniowej w fizyce

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków 2024

References

[1] Z. Furdzik, J. Maj-Kluskowa, A. Kulczycka, M. Sękowska, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów. Część I - Algebra*, Wydawnictwo AGH, Kraków, 1993

[2] B. Gleichgewicht, *Algebra*, PWN, Warszawa, 1983, wydanie III zmienione

[3] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2020, wydanie XXII

[4] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2015, wydanie VIII poprawione

[5] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry, tomy 1,2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 1
Data: ....

TEMAT: *Działania i wybrane struktury algebraiczne*

1.1 Notacja

Przyjmujemy następującą notację.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych

Oznaczenia kwantyfikatorów

$\forall$	kwantyfikator ogólny (duży)	*dla każdego*
$\exists$	kwantyfikator szczegółowy (mały)	*istnieje*
$\exists!$		*istnieje dokładnie jeden*

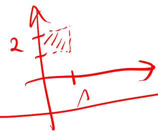
Iloczyn kartezjański

A, B – zbiory

para uporządkowana

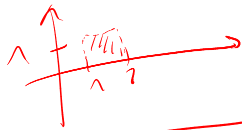
$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Np. $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$
$B = (1,2) \subset \mathbb{R}$



$A \times B = \{(x,y) : 0<x<1, 1<y<2\}$

$B \times A = \{(x,y) : 1<x<2, 0<y<1\}$



$A \times B \neq B \times A$

Symbol sumy i iloczynu

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ to dowolny ciąg liczb.

Sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ oznaczamy symbolem $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Symbol i to wskaźnik sumowania lub indeks sumowania, m to dolna granica sumowania, zaś n to górna granica sumowania.

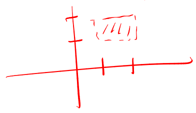
Zauważmy że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ oraz $c \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n)$ oraz $c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n$, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i, \qquad c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i.$$

$A \times A = A^2$

$A = (1,2) \subset \mathbb{R}$

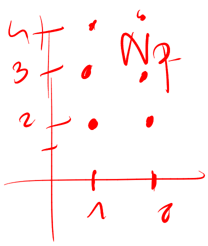
$A^2 = A \times A = \{(x,y) : x \in A, y \in A\}$
$= \{(x,y) : 1<x<2, 1<y<2\}$



Przykład 1.1.1. $\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
$\sum_{i=5}^{9} \frac{i}{i+2} = \frac{5}{7} + \frac{6}{8} + \frac{7}{9} + \frac{8}{10} + \frac{9}{11}$
$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ oznaczamy symbolem $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Symbol i to wskaźnik iloczynu, m to dolny wskaźnik iloczynu, zaś n to górny wskaźnik iloczynu.

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4),$
$(2,2), (2,3), (2,4)\}$



$A = \{1,2\}$
$B = \{2,3,4\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ płaszczyzna

Przykład 1.1.2. $\prod_{i=0}^{6}(9-j) = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$
$\prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot n = n!$

$$\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\ razy} = \prod_{i=1}^{n} x$$

1.2 Działania wewnętrzne i ich własności

h np "+"
$h(x,y)$ $x+y$

Niech A będzie zbiorem niepustym. $(x,y)\longmapsto h(x,y)$

Definicja 1.2.1. Dowolną funkcję $h : A\times A\to A$ nazywamy *działaniem wewnętrznym* w zbiorze A. Wartość funkcji $h(a,b)\in A$ nazywamy *wynikiem* działania dla pary argumentów $a,b\in A$.

Przykład 1.2.2.
i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$.
ii) Odejmowanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$. $2-8=-6\notin\mathbb{N}$
iii) Dodawanie nie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $(\sqrt{3}+1)+(-\sqrt{3})=1\in\mathbb{Q}$

Własności działań wewnętrznych

struktura $(A,*)$

Definicja 1.2.3. Niech $*: A\times A\to A$ będzie działaniem wewnętrznym.

i) Działanie $*$ nazywamy *przemiennym*, jeśli $\forall\, a,b\in A \quad a*b=b*a$.
ii) Działanie $*$ nazywamy *łącznym*, jeśli $\forall\, a,b,c\in A \quad (a*b)*c = a*(b*c)$.
iii) Element $e\in A$ nazywamy *elementem neutralnym* działania $*$, jeśli $\forall\, a\in A \quad a*e = e*a = a$.

• można "przesuwać" nawiasy
• można ich nie pisać

$\begin{cases} a*e=a \\ e*a=a \end{cases}$

$a,b,c\in\mathbb{R}$ $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$

Przykład 1.2.4.
i) Dodawanie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemiennym w $\mathbb{R}$. 0 jest elementem neutralnym. $e_+ = 0$ $\forall a\in\mathbb{R}$ $a+0=0+a=a$
ii) Mnożenie jest działaniem wewnętrznym łącznym i przemiennym w $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. 1 jest elementem neutralnym. $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $a\cdot1=1\cdot a=a$

!
Twierdzenie 1.2.5. Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją $e_1, e_2\in A$ będące elementami neutralnymi w A. Wówczas $e_2 = e_1 * e_2 = e_1$. $\square$

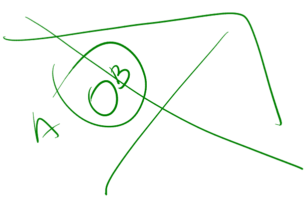
$\mathcal{P}(X)$ $\mathcal{P}(X)$ zbiór potęgowy zbioru X

Przykład 1.2.6. Niech X to dowolny zbiór.

$\forall A\subseteq X$
i) Zbiór pusty $\varnothing$ jest elementem neutralnym w $\big(P(X),\cup\big)$. $A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$
ii) Zbiór X jest elementem neutralnym w $\big(P(X),\cap\big)$. $A\cap X = X\cap A = A$

rodzina wszystkich podzbiorów ~~wszystkich~~ zbioru X

Definicja 1.2.7. Niech $*: A\times A\to A$ będzie działaniem wewnętrznym, posiadającym element neutralny $e\in A$. Dla dowolnego $a\in A$ każdy element $a'\in A$ taki, że $a*a' = a'*a = e$, nazywamy *elementem symetrycznym* do a względem działania $*$.



2 warunki
$\begin{cases} a*a'=e \\ a'*a=e \end{cases}$

bo działanie nie musi być przemienne

$\mathcal{P}(X)=\{A : A\subseteq X\}$
$X\in\mathcal{P}(X)$
$\varnothing\in\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X) = \{X, \emptyset, A \subseteq X, B \subseteq X \dots$

$e_+ = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ szukam $x' \in \mathbb{R}$

$x + x' = 0$

~~$x' + x = 0$~~

Przykład 1.2.8. i) W $(\mathbb{R}, +)$ elementem symetrycznym do 5 jest -5 (tzw. element przeciwny).

$e_\cdot = 1$ $\quad x' = -x$

$\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ii) W $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ elementem symetrycznym do 5 jest $\frac{1}{5}$ (tzw. element odwrotny).

$x \cdot x' = 1$

iii) W $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $x \circ y = x + y + 1$, elementem neutralnym jest -1, zaś elementem symetrycznym do x jest $-2 - x$.

wewnętrzne, przemienne, łączne

$e = ?$ $e \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}$ $e \circ x = x$ $\iff$ $e + x + 1 = x$ $\Rightarrow$ $e = -1 \in \mathbb{R}$

Ustalam $x \in \mathbb{R}$ szukam $x' \in \mathbb{R}$ t. że $x \circ x' = e \iff x + x' + 1 = -1$

$x' = -2 - x$

Twierdzenie 1.2.9. Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

TEZA $\quad$ ZAŁ

Dowód. Rozważmy zbiór A z działaniem łącznym $\circ$. Niech e będzie elementem neutralnym działania $\circ$. Niech a', a'' to dwa elementy symetryczne do $a \in A$. Wówczas

el. symetryczny

$$
\begin{aligned}
a \circ a' = e \;\Rightarrow\; a'' \circ (a \circ a') &= a'' \circ e \\
(a'' \circ a) \circ a' &= a'' \\
e \circ a' &= a'' \\
a' &= a''
\end{aligned}
$$

$(\mathbb{R}, \cdot)$ $\quad e = 1$

□

1.3 Podstawowe struktury algebraiczne

Niech G będzie zbiorem niepustym, zaś $* : G \times G \to G$ działaniem wewnętrznym w G.

Definicja 1.3.1. i) Parę $(G, *)$ nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie jest łączne.

ii) Parę $(G, *)$ nazywamy *monoidem*, jeżeli działanie jest łączne i posiada element neutralny.

półgrupa z el. neutralnym

ĆW

iii) Parę $(G, *)$ nazywamy *grupą*, jeżeli działanie jest łączne, posiada element neutralny oraz każdy element G posiada element symetryczny względem $*$ w G.

WEWN.

Jeśli dodatkowo działanie $*$ jest przemienne, to mówimy o *półgrupie przemiennej, monoidzie przemiennym, grupie przemiennej (abelowej).*

Przykład 1.3.2. Oznaczmy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ĆW

Czy to półgrupa / grupa?

Ozn. $\mathbb{N}\cup\{0\}$

$\mathbb{N}_0$

sprawdzić na początku

	$(\mathbb{N},+)$	$(\mathbb{Z},\cdot)$	$(\mathbb{Q},+)$	$(\mathbb{Q},\cdot)$	$(\mathbb{R}^*,+)$	$(\mathbb{R}^*,\cdot)$
wewnętrzność	✓	✓	✓	✓	nie $-1+1=0$ $0\notin\mathbb{R}^*$	✓
łączność	✓	✓	✓	✓		✓
przemienność	✓	✓	✓	✓		✓
el. neutralny	brak $0\notin\mathbb{N}$	✓ $1\in\mathbb{Z}$	✓ $0\in\mathbb{Q}$	✓ $1\in\mathbb{Q}$	nie będzie to zatem nawet półgrupa	✓ $1\in\mathbb{R}^*$
el. symetryczny		brak $2\cdot b=1$ $b=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$	✓ $a+a'=0$ $a'=-a\in\mathbb{Q}$	brak $a\cdot a'=1$ $a'=\frac{1}{a}$ nie dla $a=0$		✓ $a\cdot a'=1$ $a'=\frac{1}{a}$ $\forall a\in\mathbb{R}^*$
	półgrupa przemienna bez el. neutr.	monoid przemienny	grupa abelowa przemienna	NIE GRUPA! monoid przemienny	półgrupa przemienna z el. neutr.	grupa abelowa

Przykład 1.3.3. Niech $X=\{1,2,4,\ldots,2^n,\ldots\}$, $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, zaś działanie $\circ$ to mnożenie liczb. Czy $(X,\circ)$ jest półgrupą/grupą (abelową)?

Jeśli $a,b,c\in X$, to istnieją $k,m,n\in\mathbb{N}_0$ takie, ze $a=2^n, b=2^m, c=2^k$.

wewnętrzne $\quad a\circ b=2^n\cdot 2^m=2^{n+m}\in A$

przemienne $\quad a\circ b=2^n\cdot 2^m=2^{n+m}=2^{m+n}=2^m\cdot 2^n=b\circ a$

łączne $\quad (a\circ b)\circ c=2^{n+m}\cdot 2^k=2^{n+m+k}=2^n\cdot 2^{m+k}=a\circ(b\circ c)$

el. neutralny $\quad e=2^s, s\in\mathbb{N}_0 \quad a\circ e=a \;\Leftrightarrow\; 2^{n+s}=2^n \;\Rightarrow\; s=0,\ e=1\in X$

brak el. odwrotnego $\quad a\circ b=1 \;\Leftrightarrow\; 2^{n+m}=2^0 \;\Leftrightarrow\; m=-n \;\Rightarrow\; m=-n\notin\mathbb{N}_0$

Wniosek: monoid przemienny (tj. półgrupa przemienna z jedynką)

Definicja 1.3.4. Zespół $(A,\circ,*)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ: A\times A\to A$, $*: A\times A\to A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A,\circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

$$\forall a,b,c\in A \quad (a\circ b)*c=(a*c)\circ(b*c) \;\wedge\; c*(a\circ b)=(c*a)\circ(c*b).$$

$(a+b)\cdot c=$
$a\cdot c+b\cdot c$