Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 2
Data: ....

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciało liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \underset{n\mapsto n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \underset{n\mapsto \frac{n}{1}}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \underset{x\mapsto (x,0)}{\overset{h}{\hookrightarrow}} \mathbb{C}$$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ ciało *algebraicznie domknięte* - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0) \in \Omega$

przemienność:
$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0) = (x_2x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$$

łączność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$$
$$[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot x_3, 0 = (x_1x_2x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia
el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność:
$$[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$$
$$= (x_1x + 3 + x_2x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$$

Niech $h : \mathbb{R} \to \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to *zanurzenie*, czyli bijekcja taka, że $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$.
Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

Zdefiniujmy $i := (0,1)$ tzw. *jednostka urojona.* Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y, \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Re} z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\mathrm{Im} z$. Liczby postaci iy, $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi.*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \big(\mathrm{Re} z_1 = \mathrm{Re} z_1 \wedge \mathrm{Im} z_1 = \mathrm{Im} z_2\big)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

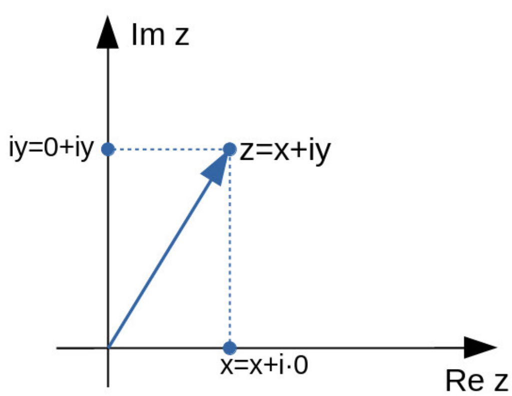
$$\tfrac{2+3i}{2-5i} = \tfrac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \tfrac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \tfrac{-11+16i}{29} = -\tfrac{11}{29} + \tfrac{16}{29}i$$

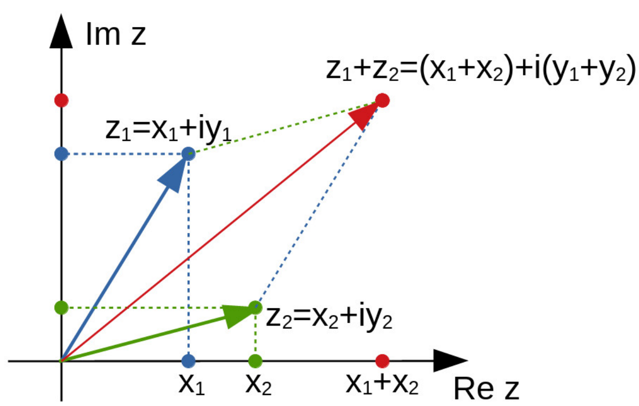
Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \qquad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0,0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$

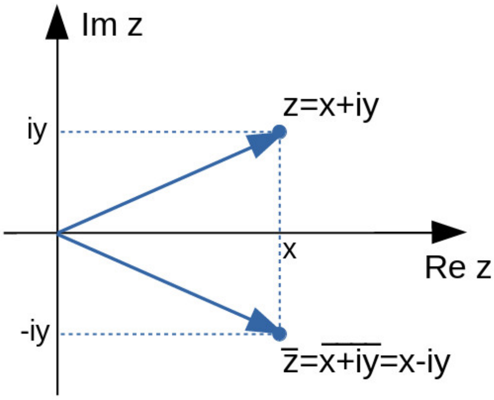


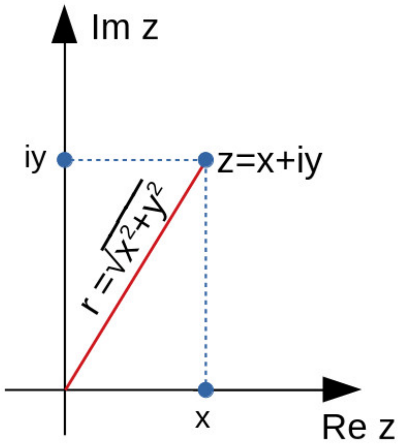


Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z. Oznaczamy ją $\bar{z}$.

i) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy modułem liczby z. Oznaczamy ją $|z|$.





Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych)**.** Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}z_2, \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}z_1 + \mathrm{Im}z_2$

ii) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

iii) $\overline{(\bar{z})} = z$

iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$

vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

viii) $\mathrm{Re}z \leq |\mathrm{Re}z| \leq |z|, \quad \mathrm{Im}z \leq |\mathrm{Im}z| \leq |z|$

ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta) $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$

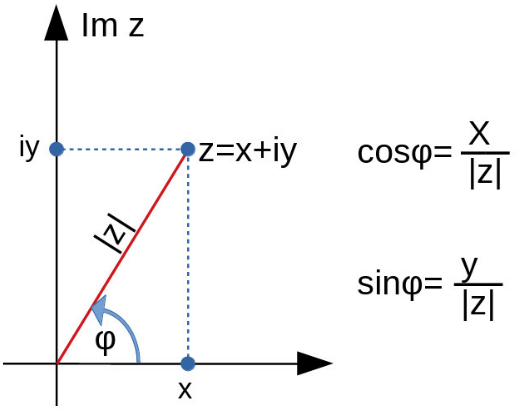
Dowód. vii) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$
viii) $\mathrm{Re}z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
x) $1 = \mathrm{Re}1 = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1+z_2}\right) \overset{\text{i)}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \overset{\text{def}}{\leq} \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| \overset{\text{iv)v)}}{=} \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \wedge |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow \Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$ □

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z. Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Gdy $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$$z = 7 \qquad z = 7(1 + 0i)$$
$$\varphi = 0 + 2k\pi \qquad \arg z = 0$$
$$z = 7(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$z = -i \qquad |z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \qquad z = 1\,(0 + (-1)\cdot i)$$
$$\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = -1 \end{cases}$$
$$\varphi = -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \arg z = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$-i = 1(\cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi)$$

$$z = -\sqrt{27} - 3i \qquad |z| = \sqrt{27 + 9} = 6 \qquad z = 6\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)$$
$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\varphi = \tfrac{7}{6}\pi + 2k\pi, \qquad \arg z = \tfrac{7}{6}\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos\tfrac{7}{6}\pi + i\sin\tfrac{7}{6}\pi)$$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
$z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Wówczas:

i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$,

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \big(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\big)$,

iii) $z^n = |z|^n \cdot \big(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\big)$ tzw. *wzór de Moivre'a*

Dowód. i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$
$= |z_1| \cdot |z_2|\Big(\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\Big)$
ii) analogicznie
iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.
Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. $\square$

Przykład 2.2.3. Przedstaw liczbę $z = -\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10}$ w postaci trygonometrycznej.

METODA I: Ponieważ $|z| = 1$, zatem $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ dla pewnego $\varphi \in [0, 2\pi)$.
$\begin{cases} \cos\varphi = -\sin\frac{\pi}{10} < 0 \\ \sin\varphi = \cos\frac{\pi}{10} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ φ z II ćwiartki
Na mocy wzorów redukcyjnych $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ oraz $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

METODA II: $z = -\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10} = i^2\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10} = i\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) =$
$\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

Przykład 2.2.4. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ $\quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7}{12}\pi) + i\sin(-\frac{7}{12}\pi)\right)$

$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10}\left(\cos(\frac{140}{12}\pi) + i\sin(\frac{140}{12}\pi)\right) = 2^{10}\left(\cos(\frac{35}{3}\pi) + i\sin(\frac{35}{3}\pi)\right) =$
$= 2^{10}\left(\cos(12\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(12\pi - \frac{\pi}{3})\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
$= 2^9(1 - \sqrt{3}i)$

Twierdzenie 2.2.5 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (k = 0$ lub $k = -1)$

ii) $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad (k = 0$ lub $k = -1)$

iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg\bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$

Dowód. iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z + 2k\pi = 2\arg z + 2k\pi$. Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę.
iv) $z \cdot \bar{z} = |z^2|$ oraz $0 = \arg(|z^2|) = \arg z + \arg\bar{z} + 2k\pi$, skąd $\arg\bar{z} = -2\pi - \arg z$ $\square$

Przykład 2.2.6. $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \arg(-1) = \pi$ $\qquad \arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$
$i = (-1) \cdot (-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z.

Przykład 2.2.7. a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$

b) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$
najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$, $\ e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,

ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $\ |e^{i\alpha}| = 1$.

Dowód. i), ii), iii) Analogiczny jak dla własności działań na liczbach w postaci trygonometrycznej.
iv) Mamy $|e^{i\alpha}| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$, zatem $e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = 0$, co nie jest możliwe, gdyż gdy $\cos\alpha = 0$, to $\sin\alpha = \pm 1$. $\square$

Wniosek 2.2.9. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

i) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\alpha+\beta)}$, $\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha-\beta)}$,

ii) $z^k = r^ke^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

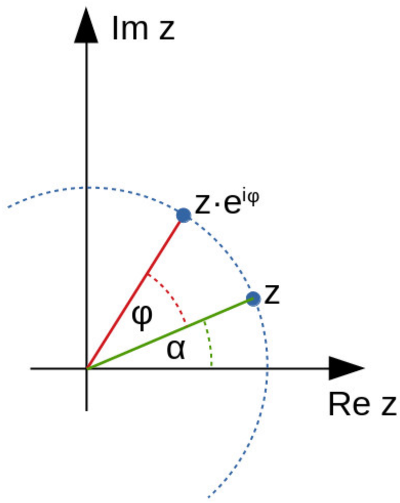
iii) $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Dowód. iii) Jeśli $\arg z = \varphi$, to $\arg\bar{z} = 2\pi - \varphi$, skąd $e^{(2\pi i-\varphi)i} = e^{2\pi}e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}$. $\square$

Wzory Eulera
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$
Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}, \qquad \varphi\in\mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ
$z = re^{i\alpha}$
$z\cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$



Przykład 2.2.10. Rozwiąż równanie $z^3 = (\overline{z})^3$.

Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.
Załóżmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$ oraz $\varphi\in\mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^3 &= (\overline{z})^3 \\ r^3e^{3i\varphi} &= r^3e^{-3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 \\ 6\varphi &= 0 + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \\ \varphi &= \tfrac{k\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}, \quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$.
Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.

2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie
Niech $n\in\mathbb{N}$, $w\in\mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z\in\mathbb{C}$ spełniająca równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n-tego stopnia* z liczby w.

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.

I sposób:
postać wykładnicza

$z = |z|e^{i\varphi}$, $w = 8 + 6i$
$|z|^2 e^{2i\varphi} = w$

$|w| = 10$
$w = 8 + 6i = 10(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5})$
$\varphi = \arcsin\frac{3}{5} + 2k\pi$

$|z| = \sqrt{10}$
$\varphi_k = \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + k\pi$

$z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k}$, $k \in \{0, 1\}$

II sposób:
postać algebraiczna

$z = x + iy$, $w = 8 + 6i$
$z^2 = w$
$(x + iy)^2 = 8 + 6i$
$x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$
$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$
$y \neq 0$ (gdy $y = 0$, to $z = x$, $x^2 \neq 8 + 6i$)
$x = \frac{3}{y}$, $\frac{9}{y^2} - y^2 = 8$
$y^4 + 8y^2 - 9 = 0$, $\Delta = 100$
$y^2 = 1$, $y = \pm 1$

$z = 3 + i \vee z = -3 - i$

III sposób:
postać algebraiczna

$8 + 6i = 9 + 6i - 1 =$
$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 =$
$= (3 + i)^2$

$z = 3 + i \vee z = -3 - i$

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wówczas
$z^n = w \;\Leftrightarrow\; \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
Otrzymujemy $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, gdzie $\alpha_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

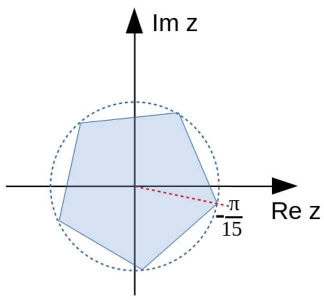
$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.
Niech $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.
Obliczamy $|w| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Zatem

$z^5 = w \;\Leftrightarrow\; \rho^5(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$.
Stąd $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

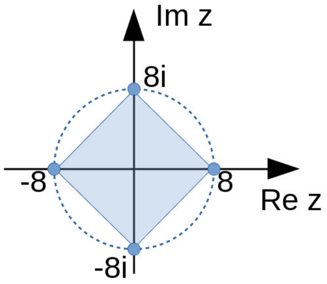
Liczby $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n-kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3. Będą one wierzchołkami kwadratu.

$z^4 = \left((\sqrt{3} - i)^3\right)^4$
Niech $z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$.
Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad x_3 = z_2 \cdot i = -8$



Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = \|x\|$	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n.
$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W, jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout)**.** Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + const$. Stąd $W(z_0) = 0 \iff W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W*, jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z-1) - (z-1) = (z-1)(z^2-1) = (z-1)^2(z+1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2 \ldots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2 \ldots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 \ldots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \quad \square$$

Trójmian kwadratowy $\quad az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.
Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2$, $\sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.
Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow\; \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1}z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n(\bar{z}_0)^n + a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1} + \ldots + a_1\bar{z}_0 + a_0 = 0. \quad \square$

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$0 = (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] =$
$= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$
rozwiązania $z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i, \qquad \bar{z}_2 = z_3$

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

$(z-2i)\Big(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i\Big) = 0$
$(z-2i)(z+1)\Big(z^2 + (1+3i)z + 3i\Big) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$
rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

Wzory Viète'a

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$\begin{aligned} c_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) &= -c_{n-1} \\ c_n\Big[(r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_1r_n) + (r_2r_3 + r_2r_4 + \ldots + r_2r_n) + \ldots + r_{n-1}r_n\Big] &= c_{n-2} \\ \ldots \\ c_n r_1 r_2 \ldots r_n &= (-1)^n c_0 \end{aligned}$$

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\cdot\ldots\cdot(z-r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$$W(z) = c_n\big[(-1)^n r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n + (-1)^{n-1} r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + \ldots$$
$$+(-1)^{n-1} r_2 r_3 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} \cdot z + \ldots + (-r_1 - r_2 \ldots - r_n)z^{n-1} + z^n\big]. \quad \Box$$

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c.

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$.
Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.
Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.
Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \;\Rightarrow\; c = 12$.

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

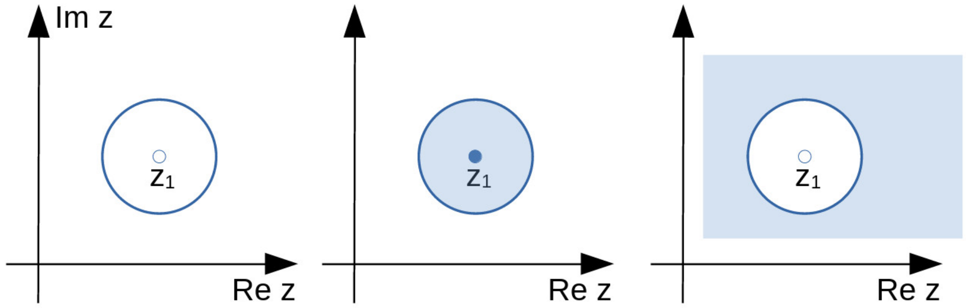
1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

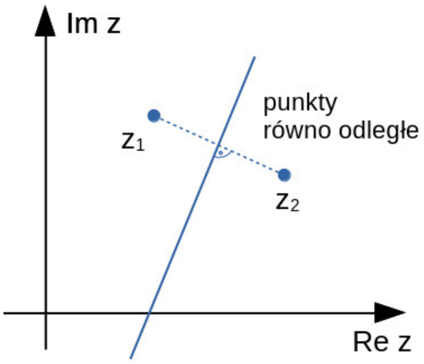
2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

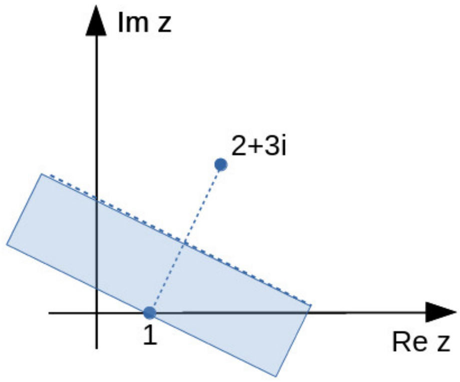
$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$|z - z_1| = r$ okrąg $\quad |z - z_1| \leq r$ koło $\quad |z - z_1| \geq r$ zewnętrze koła



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2



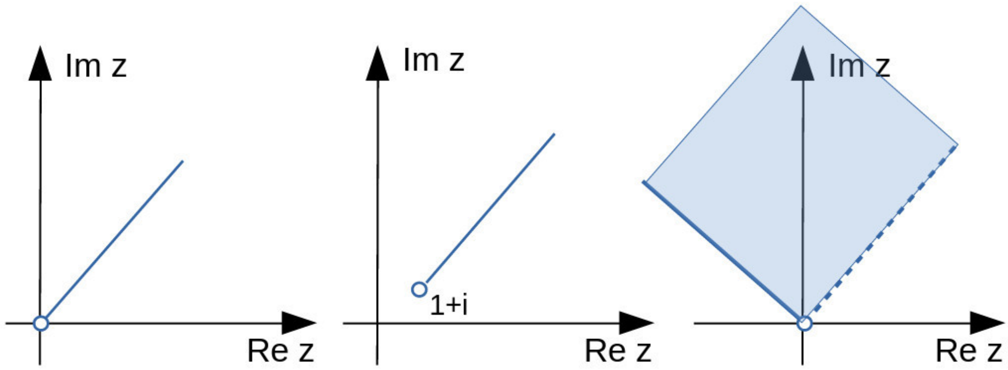


np. $|z - 1| < |z - 2 - 3i|$

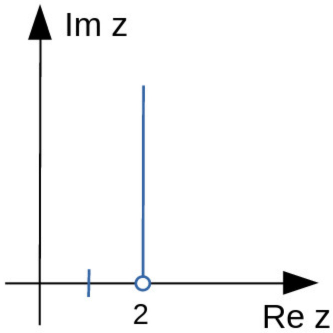
4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

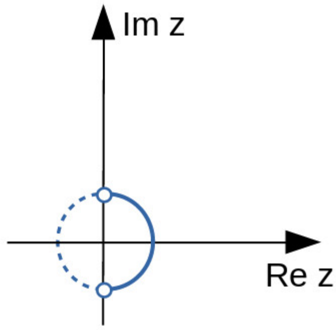
Przykład 2.4.1.

$\arg z = \frac{\pi}{4} \qquad \arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$



$\arg(z-2)=\frac{\pi}{2}$ $\arg(\frac{z+i}{z-i})=\frac{\pi}{2}$





5) Zbiór $\{z\in\mathbb{C}:\ \arg(\frac{z+i}{z-i})=\frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$w=\frac{z+i}{z-i}=\frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}=\frac{[x+(y+1)i]\cdot[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2-xyi+xi+xyi+xi+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\text{Re}w=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2},\quad \text{Im}w=\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\text{Re}w=0\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2=1\\ \text{Im}w>0\ \Leftrightarrow\ x>0\end{cases}$$