4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3

Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

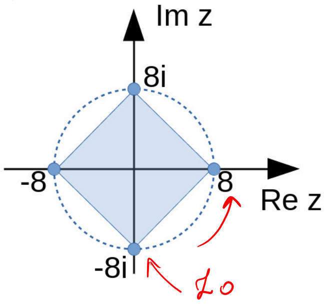
Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3. Będą one wierzchołkami kwadratu.

$z^4 = \left((\sqrt{3} - i)^3\right)^4$

Niech $z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$.

Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad x_3 = z_2 \cdot i = -8$



$\frac{2\pi}{4}$

$\cdot e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

$\sqrt{x} = ?\quad a \geq 0 \wedge a^2 = x$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$

$z^2 = 9$

$x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1 \qquad z \in \mathbb{C} \wedge z^2 = -1$

$x \in \mathbb{R} \wedge x^4 = 1 \qquad z \in \mathbb{C} \wedge z^4 = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \lvert x \rvert = \pm x$

Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n.

$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$

$z^n = w$
$1.\ z^n - w = 0$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W, jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout)**.** Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + const$. Stąd $W(z_0) = 0 \Leftrightarrow W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem k-krotnym wielomianu W*, jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z-1) - (z-1) = (z-1)(z^2-1) = (z-1)^2(z+1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

rozkładając na czynniki

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

nie jest to wielomian zerowy

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2 \ldots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2 \ldots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 \ldots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \qquad \square$$

inaczej niż nad $\mathbb{R}$

Trójmian kwadratowy $\qquad az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.
Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2$, $\sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.
Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

$z_1 = \frac{-2i-4i}{2}$

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych !

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow\; \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$. $\qquad \square$

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

	1	-3	6	-4
1	1	-2	4	0

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$\Delta \notin \mathbb{R} \wedge \Delta < 0$ $\quad z^2 - 2z + 1$ $\quad +3$ $\quad -(-3)\; -3i^2$

$$0 = (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] =$$
$$= (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$$

rozwiązania $z_1 = 1,\quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i,\quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i,\qquad \bar{z}_2 = z_3$

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

współczynniki zespolone

CN $\quad -1$

$$(z-2i)\Big(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i\Big) = 0$$

$z - (-1)$

$$(z-2i)(z+1)\Big(z^2 + (1+3i)z + 3i\Big) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$$

rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

$z_1 \neq \bar{z}_4$

Wzory Viète'a

SZKOŁA $n=2$

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$n=2 \quad c_2(r_1+r_2) = -c_1 \quad r_1 + r_2 = -\frac{c_1}{c_2}$

Tutaj $n \geq 1$ dowolne

$$\begin{aligned}
c_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) &= -c_{n-1}\\
c_n\Big[(r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_1r_n) + (r_2r_3 + r_2r_4 + \ldots + r_2r_n) + \ldots + r_{n-1}r_n\Big] &= c_{n-2}\\
\ldots&\\
c_n r_1 r_2 \ldots r_n &= (-1)^n c_0
\end{aligned}$$

Dla zainteresowanych

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\cdot\ldots\cdot(z-r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$C_2 z^2 + C_1 z + C_0 = 0$

$az^2 + bz + c = 0$

$$W(z) = c_n\big[(-1)^n r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n + (-1)^{n-1} r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot z + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} r_2 r_3 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} \cdot z + \ldots + (-r_1 - r_2 \ldots - r_n)z^{n-1} + z^n\big]. \quad \square$$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$a \quad b \quad c \quad d$

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c.

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$.
Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.
Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $\boxed{z_1 + z_2} + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$.
Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \;\Rightarrow\; c = 12$.

2 $\quad || \quad 0$

$W(z)$ dzieli się przez $(z - z_1)(z - z_2)$

$\Big(z - (1-2i)\Big)\Big(z - (1+2i)\Big)$

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

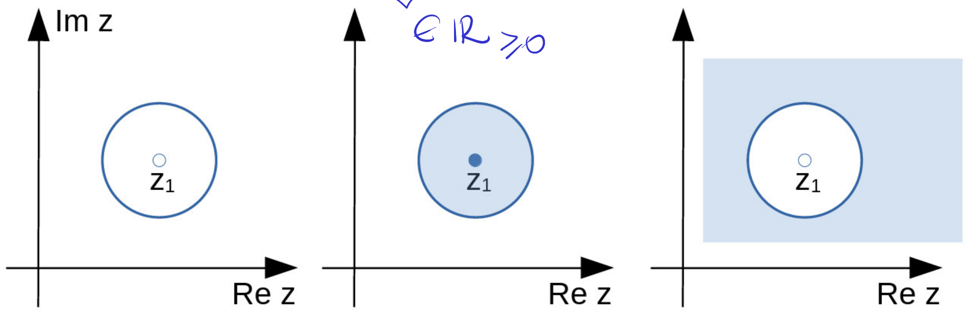
$z = ?$

z_1

2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

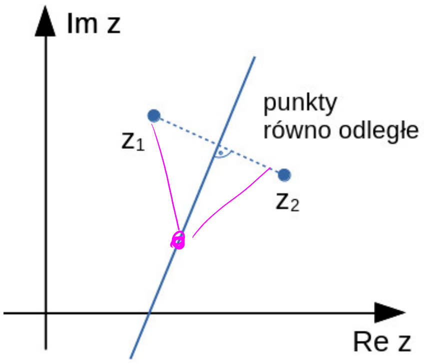
$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

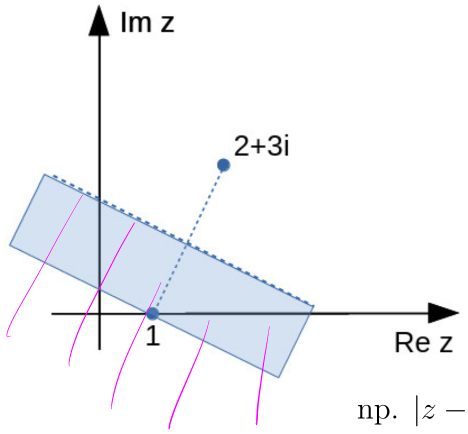
$|z - z_1| = r$ okrąg $\qquad \underbrace{|z - z_1|}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} \leq r$ koło $\qquad |z - z_1| \geq r$ zewnętrze koła



$z = ?$

3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2





np. $|z - 1| < |z - 2 - 3i|$

4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

Przykład 2.4.1.

$\arg z = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$

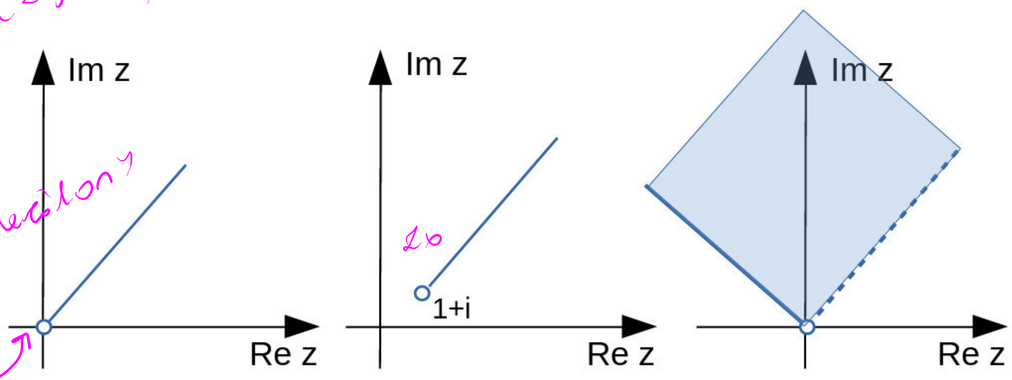
$a(z - z_0)$

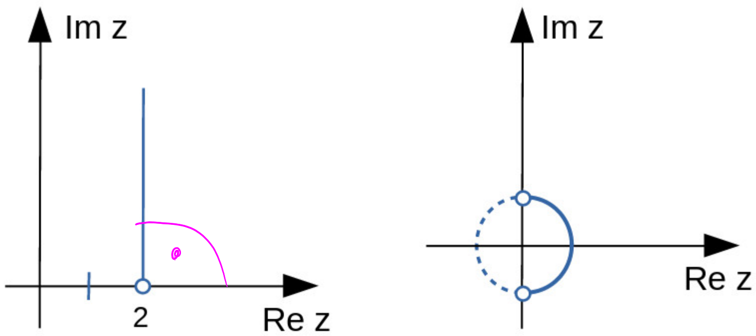
$z = ?$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = 0$

$\arg$ - nieokreślony





$\arg(z-2) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}$

do tego

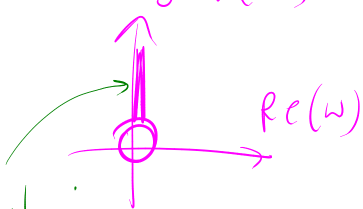
5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C}: \ \arg(\frac{z+i}{z-i}) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i]\cdot[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2 - \cancel{xyi} + xi + \cancel{xyi} + xi + y^2 - 1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\mathrm{Re}w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}, \quad \mathrm{Im}w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}w = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 \\ \mathrm{Im}w > 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

Ozn. $z = x + iy$

$\arg(w) = \frac{\pi}{2}$

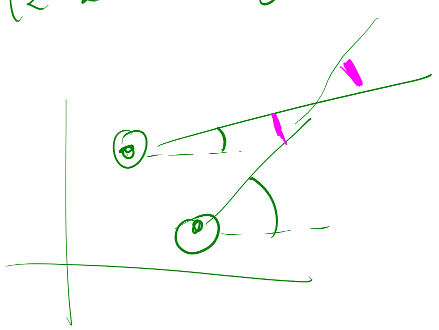


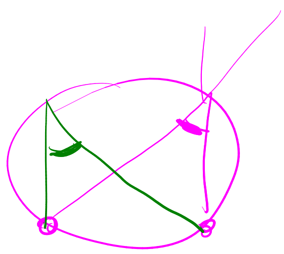
$w = a + bi$

$a = 0 \quad b > 0$

$\arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)$

$\arg(z-z_0) - \arg(z-z_1) + 2k\pi$





Ciągi $\mathbb{N} \ni n \xmapsto{f} f(n) \overset{ozn}{=} a_n \in \mathbb{R}$

f $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 3
Data: ....

TEMAT: *Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.*

$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. ciało $(i,j) \xmapsto{A} A(i,j) \in K$

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy *macierzą* (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$.

elementy

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

KOLUMNA

WIERSZ

a_{23}

2 wiersz

3 kolumna

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A, zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

MATRIX

Oznaczmy symbolem $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K. Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n.*

$m \times n$

n

Dla $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

3 wiersze, 4 kolumny
elementy z $\mathbb{R}$

a_{33}

kwadratowa stopnia 3

$B \in M_3(\mathbb{R})$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

przekątna główna / diagonala

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$ macierz zerowa wymiaru $m \times n$

Typy macierzy

kwadratowa

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *diagonalną* lub *przekątniową*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$

b) *trójkątną górną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$

c) *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Oznaczmy:
$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n
$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n
$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

może być 0 na diagonali

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^D(K) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^G(K)$$

G D

ANG. U, L

upper triangular
lower triangular

Działania na macierzach

tego samego wymiaru

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
  $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ wyraz za wyrazem

- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
  $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
  Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.

p kolumn   p wierszy

- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m\times \mathbf{p}}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{\mathbf{p}\times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
  $C = \boxed{A \cdot B}$, $C = [c_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$
  Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{r-razy}$

  $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots$

- Transponowanie: Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
  $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$

2×3

Np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2

3×2

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2×3 3×2

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C-2D$, $\frac{1}{2}\cdot A^T$, AB, BA, D^2.

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\cdot A^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$D = AB \in M_2(\mathbb{R})$ schemat Falka

2×2

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 20 \end{array} \qquad 1 = 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)$$

$4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 = 4+10+6$

B 3×2 A 2×3

$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$

wynik 3×3

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 10 & 14 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$-2+5=3$

$AB \neq BA$!

$D^2 = D\cdot D \in M_2(\mathbb{R})$, $CA \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, zaś AC jest niewykonalne

$CD \in M_2(\mathbb{R})$, $DC \in M_2(\mathbb{R})$, $CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$, $DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}$, $CD \neq CD$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m\times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

ustalony

"+" wewn.

i) $A + B = B + A$ przemienność

ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$ łączność

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$ el-neutralny

iv) $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$

v) $\alpha\cdot(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$

vi) $(\alpha\cdot\beta)\cdot A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$

$-A = (-1)\cdot A$

$A + B = \mathbb{O}$

$B = -A = [-a_{ij}]$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m\times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

$AB \neq BA$

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$ łączne

ii) $(A + B)C = AC + BC$

iii) $A(B + C) = AB + AC$

rozdzielność

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ mieszana łączność

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

$AI = IA$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

el. neutralny mnożenia

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AI = ?$

$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \end{array}$

Wniosek 3.1.9. $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemienną z jedynką.

Twierdzenie 3.1.10. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

! iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

$A_{2\times 3}$ $B_{3\times 4}$

$AB = C_{2\times 4}$

~~BA~~

$B^T_{4\times 3}$ $A^T_{3\times 2}$

$B^T \cdot A^T$

$(A^2)^T = (A \cdot A)^T = A^T \cdot A^T = (A^T)^2$

m. kwadratowa

Definicja 3.1.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ nazywamy *śladem macierzy* A i oznaczamy symbolem $\mathrm{tr}(A)$.

trace A

Przykład 3.1.12. $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.13. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ ii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

iii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$ iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.14. Jeśli $A, B \in M_{m\times n}(K)$, to wówczas $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.15. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.16. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left[(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$A^T = A$

symetria wzgl. przekątnej

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antysymetryczna

zera na przekątnej

$A^T = -A$

$a_{ii} = -a_{ii}$

Definicja 3.1.18. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij}, dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array}\right]$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

!

Definicja 3.2.1. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$
  $= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

$A = [a_{11}]$

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j-tej kolumny.

$m = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$A_{12} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

A_{11}

$a_{11} = 1$

$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\det A_{11}}_{M_{11}}$

[ ]
macierz

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

det[ ]
| |
liczba
wyzn.

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3)$

$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det B = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{+1} a_{11} \det B_{11} + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} a_{12} \det B_{12} + \underbrace{(-1)^{1+3}}_{+1} a_{13} \det B_{13} =$$

determinant

$\det \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa

$\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}$ liczba / wyznacznik

to samo!

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6)$$

$$- \left[3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2 \right] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K.

a_{ij} – ustalony element

i) *Minorem elementu* a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n-1$ otrzymanej poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A. Oznaczamy go symbolem M_{ij}.

ii) *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$a_{32} = -6$

$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$, $\quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$

$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a)**.** Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$,

(rozwinięcie względem i-tego wiersza)

MAM WYBÓR!

ii) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$.

(rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

nie muszę liczyć

$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$\det C = 4 \cdot \underbrace{(-1)^9 M_{54}}_{D_{54}} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$

$2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot |\ldots|$

$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

trójkątna górna

diagonalna

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$5 \cdot (-1)^2 \cdot M_{11} = 5 \cdot D_{11}$

wynik iloczyn elem. na przekątnej

$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot \underbrace{(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{11}} = 5 \cdot 3 \cdot \underbrace{(-1) \cdot 2}_{(-1) \cdot D_{11}}$

$2 = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot M_{11}$

$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$

Własności wyznaczników

$A = [A_1\ A_2\ A_3\ \ldots]$

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k-tą kolumnę macierzy A, czyli $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$.

ĆWICZENIA!

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\det A = \det(A^T)$ ← to samo dla wierszy

ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.

iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.

iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \ldots, B_k, \ldots, A_n] + \det[A_1, \ldots, C_k, \ldots, A_n]$

$a_1 + a_1'$
$a_2 + a_2'$
$a_3 + a_3'$
$\vdots$

$k \leftrightarrow k_3$

v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.

vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.

vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in K: \ A_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.

viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A, to wyznacznik nie zmieni się.

GEOMETRIA

$\boxed{a \cdot \vec{w}_1 + b \cdot \vec{w}_2}$

$k_1 + 2 \cdot k_3 - 7k_4$

Tw. Cauchy'ego

ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \hline ? & ? & \ldots & B_n \end{array}\right],$$

gdzie $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, zaś **?** dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \ldots \cdot \det B_n$.

Przykład 3.2.10.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right] \quad \textit{macierz blokowo} - \textit{diagonalna}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2-7)\cdot(40-15) = -125$$

Wniosek 3.2.11. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

zmiana znaku wyznacznika

!

Operacje elementarne:		
	$w_i \leftrightarrow w_j$	zamiana wierszy miejscami (między sobą)
	$\lambda \cdot w_i,\ \lambda \in K, \lambda \neq 0$	pomnożenie wiersza przez liczbę (różną od zera)
	$w_i + \lambda \cdot w_j,\ \lambda \in K$	dodanie do w_i wielokrotności w_j

wyznacznik bez zmian

$\lambda \cdot \det A$

Przykład 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

2 2 20 2

$$\det A \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_3 - w_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$\cdot(-3)$

$$\overset{-\frac{1}{3} \cdot w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_4 + 5w_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

dla wygody

Przykład 3.2.13. Dane są macierze $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ takie, że $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \ i \neq j \\ 2(i-1) + j & ; \ i = j \end{cases}$$

, zaś $\det B = 9$. Oblicz wyznacznik macierzy $C = 3B^3 A^{\cancel{-1}\,2} B^T$.

jest na przekątnej

$2i + j - 2$

Korzystając z własności wyznaczników, obliczamy

$$\det C = 3^5 \det(B^3) \frac{1}{\det A} \det(B^T) = 3^5 \frac{(\det B)^4}{\det A}$$

$(\det A)^2$ $(\det A)^2$

tw. Cauchy'ego

$$\text{Ponadto } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} \overset{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_5 - w_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \underbrace{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}_{\alpha}.$$

KOREKTA

$\det C =$
$\det(3B^3)(\det A^2)$
$(\det B^T)$

Zatem $\det C = \cancel{3^5 \frac{9^4}{3^5 \cdot 2^3} = \frac{9^4}{8} = \frac{6561}{8}}$. $3^5 \cdot 9^3 \cdot \alpha^2 \cdot 9$

$\det B = \det B^T = 9$

$B \in M_{5\times5}$

$B^3 \in M_{5\times5}$

$\det(3 \cdot B^3)$

$= 3^5 \det(B^3) = 3^5 \cdot (\det B)^3 = 3^5 \cdot 9^3$

$\det A^2 = \det(A \cdot A) = \det A \det A$
$= (\det A)^2$

$\det A = ?$

$(M_n(K), +, \cdot)$ pierścień nieprzemienny z 1 „I”

3.3 Macierz odwrotna

macierz kwadratowa

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1}.

A'

$$\begin{cases} A \cdot A' = I \\ A' \cdot A = I \end{cases}$$

A' - el. symetryczny

ozn. A^{-1}

Przykład 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$$

$$AA^{-1} = I \iff \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0 \wedge \quad c = 1 \text{ sprzeczność}$$

Zatem nie istnieje A^{-1}.

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą *odwracalną*.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą *osobliwą*. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą *nieosobliwą*.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T}$.

buduję macierz

a_{ij}

D_{ij}

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy *macierzą dołączoną* do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D.

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych nieosobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemienną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy *ogólną grupą liniową.*

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

$A \cdot A^{-1}$

$$\begin{array}{cc|c} & & a \ b \\ & & c \ d \\ \hline 3 & 5 & ? \\ -1 & 2 & \end{array}$$

1. **Za pomocą definicji**

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]$

$$AA^{-1} = I \iff \begin{bmatrix} 3a - b & 5a + 2b \\ 3c - d & 5c + 2d \end{bmatrix} = I \iff \begin{cases} 3a - b = 1 \\ 5a + 2b = 0 \\ 3c - d = 0 \\ 5c + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. **Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)**

Przykład 3.3.8.

$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

D^T

ćw.

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij}. Wówczas

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

D^T

$$\begin{array}{cccc} & 1+1 & 1+2 & 1+3 \end{array}$$

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{j+j} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{\det A}$

3. **Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)**

Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

znam A

szukam A^{-1} ?

macierz blokowa

$$[A|I] \xrightarrow[\textbf{tylko na wierszach!}]{\textit{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

!!!

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\longrightarrow$ macierz trójkątna górna $\longrightarrow I$

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$[I | A^{-1}]$

$$A \qquad\qquad I$$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&2&0&1&0&0\\1&0&2&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{w_3-w_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&2&0&1&0&0\\0&-2&2&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[w_2\ na\ koniec]{-\frac{1}{2}w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&\frac12&0&-\frac12&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&-1&2&0&1&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{w_4+w_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&\frac12&0&-\frac12&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&2&0&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}w_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&\frac12&0&-\frac12&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&\frac12&0&\frac12\end{array}\right]\xrightarrow{w_1-w_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&-\frac12&0&-\frac12\\0&1&-1&0&\frac12&0&-\frac12&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&\frac12&0&\frac12\end{array}\right]\xrightarrow{w_2+w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&-\frac12&0&-\frac12\\0&1&0&0&\frac12&0&-\frac12&1\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&\frac12&0&\frac12\end{array}\right]\xrightarrow{w_1-2w_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&-\frac12&1&-\frac52\\0&1&0&0&\frac12&0&-\frac12&1\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&\frac12&0&\frac12\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad}_{I}\qquad\underbrace{\qquad}_{A^{-1}}$$

Zatem $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-\frac12&1&-\frac52\\\frac12&0&-\frac12&1\\0&0&0&1\\0&\frac12&0&\frac12\end{bmatrix}$.

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A,B\in M_n(K)$, $\alpha\in K$, $\alpha\neq 0$, $r\in\mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze $A^{-1},A^T,AB,\alpha A,A^r$ również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

i) $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$ iv) $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}$

ii) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$ v) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$!

iii) $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$ vi) $(A^r)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^r$

$g\circ f$

$f \quad g$

$f^{-1} \quad g^{-1}$

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

Przykład 3.3.11. Wyznaczymy macierz X spełniającą równanie $XA=2A-I$, gdzie

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&-1&2\\1&0&2&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

$X=?$

Z kontekstu wynika, że A to macierz kwadratowa stopnia 4, zaś $I=I_4$.
Ponieważ $\det A=-4\neq 0$, istnieje A^{-1}. Obliczamy

popzednie ćw

$$XA=2A-I \quad /\cdot A^{-1} \text{ z prawej}$$
$$XAA^{-1}=(2A-I)A^{-1}$$
$$XI=\underbrace{2AA^{-1}}_{I}-IA^{-1}$$

$$X=2I-A^{-1}$$

$$X = 2I - A^{-1} = 2I - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Przykład 3.3.12. Rozwiążemy równanie macierzowe $E^4(X - 4I)^T = \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T$ wiedząc, że $D, E, F \in M_4(\mathbb{R})$ są nieosobliwe, ponadto macierz D jest macierzą symetryczną, zaś

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}.$$

$D = D^T$

$D^{-1} \cdot D^T = D^{-1} \cdot D = I$

Ponieważ D jest symetryczna, spełnia warunek $D = D^T$. Stąd $D^{-1}D^T = D^{-1}D = I$.

Ponadto F jest diagonalna, zatem $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Macierz E jest nieosobliwa, a zatem odwracalna. Obliczamy

$$E^4(X - 4I)^T = \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T = \frac{1}{2}E^3F^3 \cdot I$$
$$(X - 4I)^T = E^{-4}\frac{1}{2}E^3F^3 = \frac{1}{2}E^{-1}F^3$$
$$X - 4I = (\tfrac{1}{2}E^{-1}F^3)^T = \tfrac{1}{2}(F^3)^T(E^{-1})^T$$
$$X = 4I + \tfrac{1}{2}(F^3)^T(E^{-1})^T.$$

zlnej? E^{-1} E^{-1} E^{-1} E^{-1} $(\ )^{TT}$

$E^{-4} \cdot E^3 = E^{-1}$

D – odwracalna

$\exists D^{-1}: D \cdot D^{-1} = I = D^{-1} \cdot D$

Pozostaje obliczyć E^{-1} i wykonać odpowiednie mnożenia oraz dodawania.

$F^3 = [\,?\,]$

Twierdzenie 3.3.13. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$, to A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są macierze $A_1, A_2, \dots, A_k$. Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{-1} \end{bmatrix}$.

Przykład 3.3.14. Czy $A = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ jest odwracalna? Jesli tak, oblicz A^{-1}.

Jest to macierz blokowo-diagonalna $\left[\begin{array}{c|cc|c} 22 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \pi \end{array}\right]$.

$\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} = -64 + 6 \cdot 16 \neq 0$

Każdy z bloków jest macierzą nieosobliwą, zatem A jest odwracalna.

ćw

Obliczamy $\begin{bmatrix} 22 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$.

Stąd $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 4
Data: ....

TEMAT: *Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych - podstawowe pojęcia

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K.

x y z x_1 x_2 x_3 x_4

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. , \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1,2,\ldots,m\}, j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

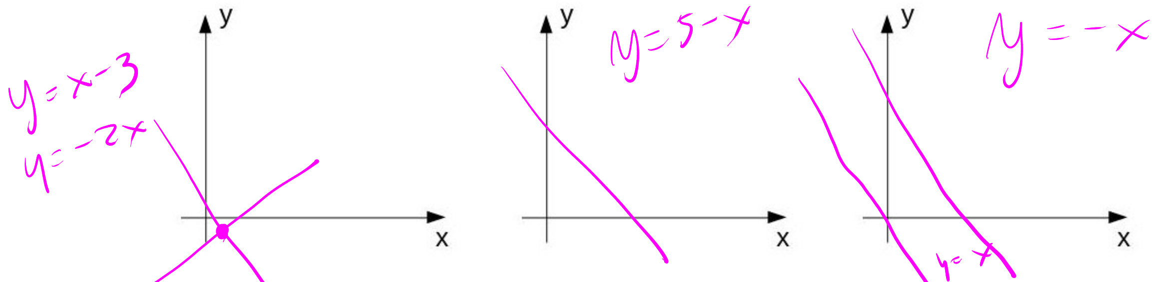
Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi* Jeśli $b_1 = \ldots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jesli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

Przykład 4.1.1.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 3 \\ 2x + y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array} \right.$$

y = 5-x



układ oznaczony   układ nieoznaczony   układ sprzeczny

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

$AX = B$

$X = ?$

Przykład 4.1.2.

$0 \cdot x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = \cancel{1} \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{1} \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}}_{B}$$

4.2 Układy Cramera

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera.*

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera)**.** Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

Przykład 4.2.4.
Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \;\Rightarrow$ układ jest układem Cramera

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego: