Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 4
Data: ....

TEMAT: *Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych - podstawowe pojęcia

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K.

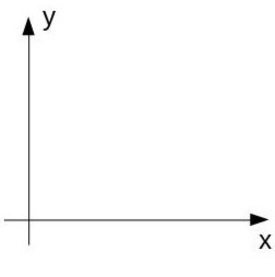
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1,2,\ldots,m\}, j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi* Jeśli $b_1 = \ldots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym.* Jesli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym.*

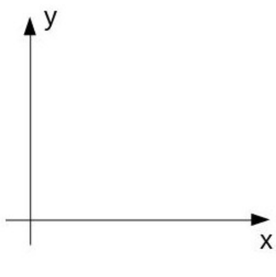
Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym.*

Przykład 4.1.1.

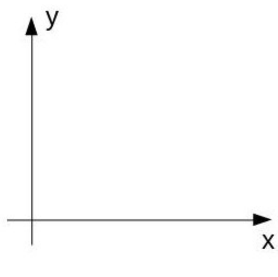
$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 3 \\ 2x + y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 10 \end{array}\right.$$



układ oznaczony



układ nieoznaczony



układ sprzeczny

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników; kolumna niewiadomych; kolumna wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4.2 Układy Cramera

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera.*

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera)**.** Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

Przykład 4.2.4.
Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \;\Rightarrow$ układ jest układem Cramera

<u>Metoda eliminacji:</u>

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

<u>Rozwiązanie równania macierzowego:</u>

$X = A^{-1}B$, $A^{-1} = ?$

$\det A = 16$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\quad x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{7}{16}$

<u>Wzory Cramera:</u>

$W = \det A = 16 \neq 0$, $W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22$, $W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$,

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}$, $y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$

Wniosek 4.2.5. i) Jedynym rozwiązaniem <u>jednorodnego</u> układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.2.6.
Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.2.7. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

4.3 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego

Definicja 4.3.1. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. *Minorem stopnia* k macierzy A, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.3.2. *Rzędem macierzy* $A \in M_{m\times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy <u>największy</u> stopień jej <u>niezerowego</u> minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\mathrm{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$r(A) \leq \min\{m, n\}$

Przykład 4.3.3.

$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $r(A) \leq 3$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$, $r(A) = 3$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $r(A) \leq 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ r(B) = 1, \quad \text{Można zauważyć, że } k_2 = 3k_1.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ ale } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(C) = 2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ r(A) \leq 3,\ w_2 = 2w_1,\ w_3 = 3w_1,\ r(D) = 1$$

Twierdzenie 4.3.4 (Własności rzędu macierzy)**.** Niech $A \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. $\square$.

Definicja 4.3.5. Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.3.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

4 schodki   3 schodki   to nie postać schodkowa

Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątna górną nieosobliwą. $\square$

Przykład 4.3.8. $$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1 \\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4+w_2]{w_3+2w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix},\quad r(D) = 3$$

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

Macierz $U=[A|B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m\times(n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX=B$.

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego)**.** Układ równań liniowych $AX=B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A)=r(U)$.

Wniosek 4.3.10. i) Gdy $r(A)\neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

ii) Gdy $r(A)=r(U)=n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A)=r(U)=r<n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów.

Przykład 4.3.11.

$$\begin{cases} x-y+3z &= 5 \\ 4x+y+7z &= 8 \\ 5x+2y+8z &= 4 \end{cases}$$

$U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right]$, $r(A)\leq 3$, $r(U)\leq 3$

$\det A=0$ oraz $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, zatem $r(A)=2$

$$U \xrightarrow[w_3-5w_1]{w_2-4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

$r(U)=3\neq r(A)\ \Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A)<r(U)$, układ jest sprzeczny.

2. Niech $r(A)=r(U)=r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m-r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M. Jeśli $r=n$, to otrzymujemy układ Cramera.

2b. Jeśli $r<n$, to $n-r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M, przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-r$ parametrów. Mówiąc dokładnej r spośród niewiadomych oznaczanych $x_1',\dots,x_r'$ zależy od pozostałych $n-r$ niewiadomych $x_{r+1}',\dots,x_n'$.

Przykład 4.3.12.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 4x + 5y - 13z &= 1 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right], \; r(A) \leq 3, \; r(U) \leq 3$$

$$U \xrightarrow[\textit{zmienne } \mathbf{y} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+5w_1]{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ 0 & 14 & 2 & 36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ minor niezerowy}$$

$$\begin{cases} -y + 2x &= 7 - 3z \\ 7x &= 18 - z \end{cases} \text{ lub } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

4.4 Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \dots & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ & \dots & \\ s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.4.1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

Przykład 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u &= 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u &= 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u &= 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u &= 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u &= -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2\leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-4w_1 \\ w_5-w_1}]{\substack{w_2-2w_1 \\ w_3-3w_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\textit{zmienne } \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2 \textit{ za } k_5} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\textit{zmienne } \mathbf{x\ z\ u\ t\ y}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rr|r} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{rrr|rr|r} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{rrr|rr|r} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{rrr|rr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right]$$

równoważny układ $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ z - \frac{7}{3}t = -3 \\ u + \frac{8}{3}t = 3 \end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5 - 3 = 2$ parametrów

Uwaga 4.4.3. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.4.4. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad r := r(A) = r(U) = 2,\ n = 5,\ n - r = 3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.
Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
k_1, k_5	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

Uwaga 4.4.5. W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$[A|B] \xrightarrow[\textbf{na wierszach}]{operacje\ \ elementarne} [I|X]$$

Przykład 4.4.6.

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

Przykład 4.4.7. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4-w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[zmienne\ \mathbf{x_2\,x_3\,x_1\,x_4}]{k_1\ za\ k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,
skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,
skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.