Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

$AX = B$

$X = ?$

Przykład 4.1.2.

$0 \cdot x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = \cancel{1} \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{1} \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}}_{B}$$

4.2 Układy Cramera

liczba równań = liczbou niewiadomych

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy *układem Cramera.*

kwadratowa

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera)**.** Układ Cramera jest układem oznaczonym. → ma dokładnie jedno rozw.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. □

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą *wzorów Cramera*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

$W = \det A$ wyznacznik główny układu równań

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

Przykład 4.2.4.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}.$

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$ układ jest układem Cramera

$x \quad x_1$

$y \quad x_2$

$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$W_{x_1} = \det A_1$

$W_{x_2} = \det A_2$

W_x

W_y

$A^{-1}B = X$

$X = A^{-1}B$, $A^{-1} = ?$

$\det A = 16$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}$, $x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{7}{16}$

Wzory Cramera:

$W = \det A = 16 \neq 0$, $W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22$, $W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$,

$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}$, $y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$

$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ $\quad i = 1, \ldots, n$

Wniosek 4.2.5. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det A \neq 0$

$A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

$n = m = 2$

$x_1 \quad x_2$

$x \quad y$

$x = \frac{W_x}{W}$

$y = \frac{W_y}{W}$

$W \neq 0$

Przykład 4.2.6.
Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.2.7. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

4.3 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego

Definicja 4.3.1. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. *Minorem stopnia* k macierzy A, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.3.2. *Rzędem macierzy* $A \in M_{m \times n}(K)$, $A \neq \mathbf{0}$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\mathrm{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$r(A) \leq \min\{m, n\}$ $\qquad rz(A)$

Przykład 4.3.3.

$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $r(A) \leq 3$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{ok}{=} -50 \neq 0$, $r(A) = 3$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $r(A) \leq 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ r(B) = 1, \qquad \text{Można zauważyć, że } \boxed{k_2 = 3k_1.}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\ r(A) \le 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ ale } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0,\ r(C) = 2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ r(A) \le 3,\ w_2 = 2w_1,\ w_3 = 3w_1,\ r(D) = 1$$

Twierdzenie 4.3.4 (Własności rzędu macierzy)**.** Niech $A \in M_{m\times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. □.

ROW ECHELON FORM

PIVOTS

Definicja 4.3.5. Macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Przykład 4.3.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

4 schodki 3 schodki to nie postać schodkowa

coś jeszcze trzeba zrobić

$w_4 - \frac{7}{6} w_3$

Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątna górną nieosobliwą. □

Przykład 4.3.8. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3-4w_1 \\ w_4-4w_1}]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4+w_2]{w_3+2w_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix},\quad r(D) = 3$$

$w_4 - w_3$

0 0 0 0 0

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

A B

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m\times(n+1)}(K)$ nazywamy *macierzą uzupełnioną* układu $AX = B$.

$A \in M_{m \times n}$

n - liczba niewiadomych

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego)**.** Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Wniosek 4.3.10. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 4.3.11.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 4x + y + 7z = 8 \\ 5x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$$

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -\frac{3}{5}$

$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right]$, $r(A) \leq 3$, $r(U) \leq 3$

~~$\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, zatem $r(A) = 2$~~

$r(A) = 2$

$U \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$

$r(U) = 3$

$r(U) = 3 \neq r(A)$ $\Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

$r(A) \neq r(U)$

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

$A \in M_{m \times n}$

m - równań

n - niewiadomych

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M. Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

r niezw.

n niewiad.

2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M, przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmienne niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładnej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \dots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \dots, x'_n$.

Przykład 4.3.12.

$n = m = 3$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 4x + 5y - 13z &= 1 \end{cases}$$

$2x - y + 3z = 7$

$-y + 2x + 3z = 7$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array}\right], \; r(A) \leq 3, \; r(U) \leq 3$$

$w_3 = 2 \cdot w_2$

$$U \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{y} \;\; \mathbf{x} \;\; \mathbf{z}]{k_1 \leftrightarrow k_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 5w_1]{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ \cancel{0} & \cancel{14} & \cancel{2} & \cancel{36} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$y \;\; x \;\; z$

$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ minor niezerowy}$$

$\det \neq 0$

parametrem

$$\begin{cases} -y + 2x &= 7 - 3z \\ 7x &= 18 - z \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

4.4 Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U, skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U, zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

elementarne

$w_1 \leftrightarrow w_2$

$\alpha \cdot w_1 \;\; \alpha \neq 0$

$w_1 \pm w_2$

B nie ruszamy

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & s_{1,r+1} & \ldots & s_{1,n} & z_1 \\ & I_r & & & \ldots & & \ldots \\ & & & s_{r,r+1} & \ldots & s_{r,n} & z_r \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.
Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \ldots & s_{1,n} \\ & \ldots & \\ s_{r,r+1} & \ldots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.4.1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

A B

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

równanie sprzeczne!

Przykład 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u &= 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u &= 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u &= 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u &= 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u &= -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$/\cdot(-2)$

$$U = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[-2\cdot w_5]{w_2 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4-4w_1 \\ w_5-w_1}]{\substack{w_2-2w_1 \\ w_3-3w_1}}$$

$W_5 = -2 \cdot W_4$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\,z\,t\,u\,y}]{k_2 \text{ za } k_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2}$$

proporcjonalne

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{zmienne } \mathbf{x\,z\,u\,t\,y}]{k_3 \leftrightarrow k_4}$$

$/\cdot(-1)$ x z t u y

wyrzuć!

~~8t+3t=9~~

$8t+3u=9$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cancel{2}\ 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cancel{2}\ 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -\frac{28}{3} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 3 \end{array}\right]$$

x z u t y

x, z, u: $+2y=11$, $-7/3\,t=-3$, $+8/3\,t=3$

równoważny układ $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ z - \frac{7}{3}t = -3 \\ u + \frac{8}{3}t = 3 \end{cases}$ rozwiązania $\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ dowolne

$r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5 - 3 = 2$ parametrów niezależny

Uwaga 4.4.3. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.4.4. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x-3y+z-2s+t=-5 \\ 2x-6y-4s+t=-10 \\ 2z+t=0 \end{cases}$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

z

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad r:=r(A)=r(U)=2,\ n=5,\ n-r=3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3}=10$ sposobów.
Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y,s,t\}$
k_1, k_5	$\{y,z,s\}$
k_2, k_3	$\{x,s,t\}$
k_2, k_5	$\{x,z,s\}$
k_4, k_3	$\{x,y,t\}$
k_4, k_5	$\{x,y,z\}$
k_3, k_5	$\{x,y,s\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

x y $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

z i t nie mogą być param.

Uwaga 4.4.5. W przypadku gdy układ równań $AX=B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne **na wierszach** macierzy uzupełnionej $U=[A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

U = [A|B]

$$[A|B] \xrightarrow[\textbf{na} \quad \textbf{wierszach}]{operacje \quad elementarne} [I|X]$$

A $n \times n$

$\det A \neq 0$

Przykład 4.4.6.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2x-y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 5 \end{cases}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\cdot w_3]{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x=1,\ y=1,\ z=1$

$r(A)=3$, $r(U)=3$ $\qquad n=3$ $\qquad$ OZN

$\begin{cases} x+y+z=3 \to x \\ y+z=2 \to y \\ -z=-1 \end{cases}$

$z=1$

Nie trzeba rozwiązywać

Przykład 4.4.7. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$w_3 - p \cdot w_1$

$p \neq 0$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_2 \\ w_4-w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[zmienne\ \mathbf{x_2\, x_3\, x_1\, x_4}]{k_1\ za\ k_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array}\right]$$

Wnioski:

1 Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

$p \neq 0$

$1-p \neq 0$

$2 \cdot 2 \cdot p \cdot (1-p) \neq 0$

2 Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$,

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 x_4 = 0$

skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.
Zatem układ jest nieoznaczony.
Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

x_1 lub x_3

3 Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$,

$r(A) = 3 \quad r(U) = 4$

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

$\vec{a} = [1,2,3]$ $\quad \vec{a}$ $\quad A \quad B \quad \overrightarrow{AB}$

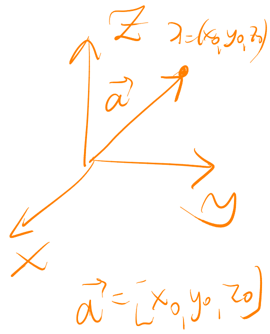
$(0,0,0) \quad (1,2,3)$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 5
Data: ....

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

TEMAT: *Geometria analityczna w* $\mathbb{R}^3$



5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

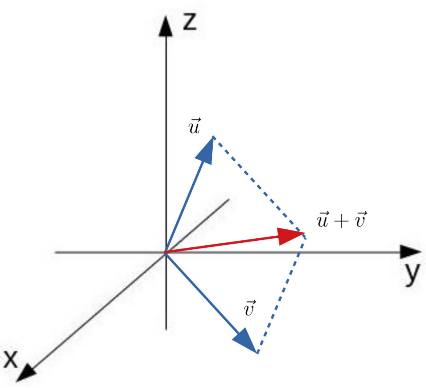
- zbiór punktów $P = (x,y,z)$, gdzie x,y,z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x,y,z]$, gdzie x,y,z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

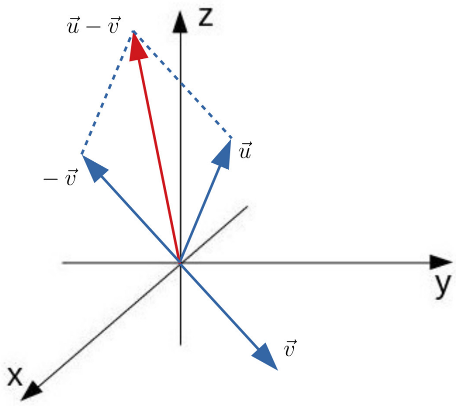
Oznaczamy przez $\vec{\mathbf{0}} = [0,0,0]$ wektor zerowy.

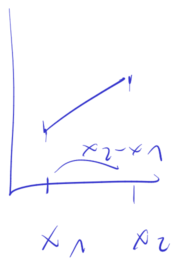
Działania na wektorach

Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$	suma wektorów
$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$	iloczyn wektora przez skalar
$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$	wektor przeciwny do $\vec{u}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$	różnica wektorów







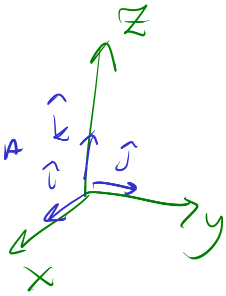
Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \qquad |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$\vec{a}$ $\hat{a}$ $(1,2,3) = 1\cdot\hat{i} + 2\cdot\hat{j} + 3\cdot\hat{k}$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{\imath} = [1,0,0]$, $\hat{\jmath} = [0,1,0]$, $\hat{k} = [0,0,1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

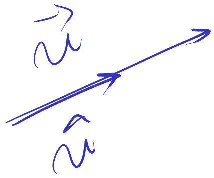


WARUNEK TRÓJKĄTA

Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, $|\lambda\cdot\vec{u}| = |\lambda|\cdot|\vec{u}|$, $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u}$.

$|\vec{u}| \neq 0$

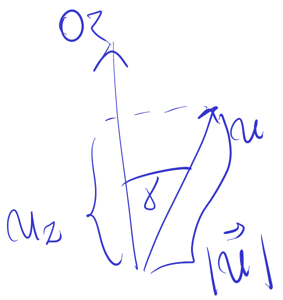


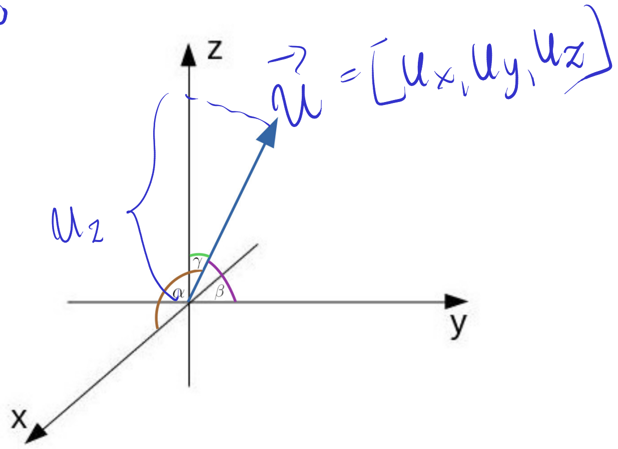
Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|}\right]$ oraz

unormować wektor

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos\beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos\gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.





$|\vec{u}| = 1$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

współrzędne

Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u},\vec{v}$,.
Przyjmujemy, że jego miara należy do przedziału $[0,\pi]$.

Definicja 5.1.1. *Iloczynem skalarnym* dwóch niezerowych wektorów $\vec{u},\vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u}\circ\vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u}\circ\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$.

Przykład 5.1.3. $[1,4,0]\circ[2,-1,1] = 1\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 1 = -2 < 0$
Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.