

Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$$

Można zerknąć

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k, k \perp \pi$. Wówczas $k : \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$

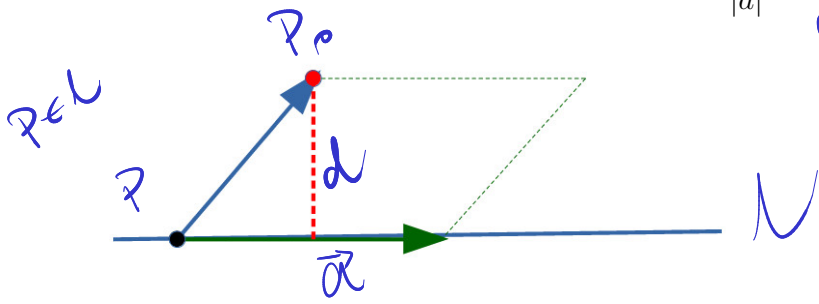
$\{P'_0\} = k \cap \pi = ?$
 $A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$
 $d(P, \pi) = |P_0 P'_0| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Wzór na odległość punktu od prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym \vec{a} . Wówczas

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

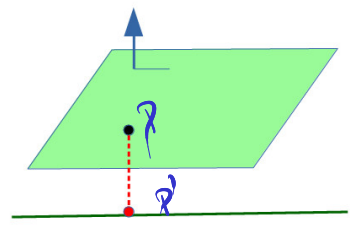
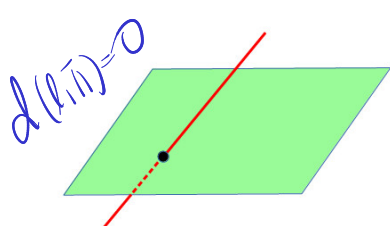
Pole \square d.o. podstawy



$$d = d(P_0, l)$$

Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π , to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punktu prostej od płaszczyzny.



STOP

Definicja 5.4.7. Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

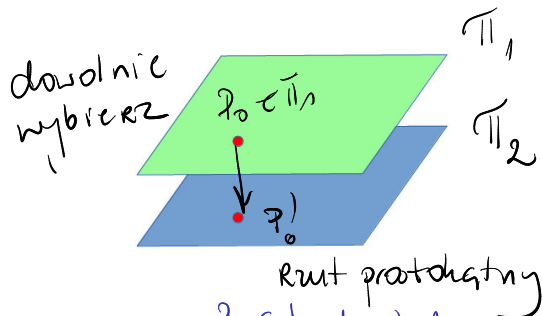
Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0,$
 $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0, \vec{n}_2 = [A, B, C] \neq \vec{0}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.

$D_1 \neq D_2$
 \Downarrow
 $\pi_1 \neq \pi_2$

$D_1 \neq D_2$
 $\Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
 tzn. $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{n}_1 = \alpha \cdot \vec{n}_2$

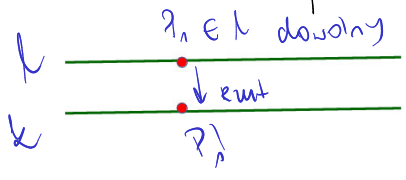
WZÓR
 wynika ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny



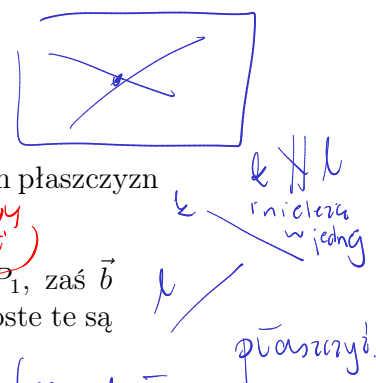
$$\pi_1 \not\parallel \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = l \quad d(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \wedge \pi_1 = \pi_2 \quad d(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \wedge \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \quad d(\pi_1, \pi_2) = |P_0 P'_0|$$



$$|P_1 P'_1| = d(k, l)$$

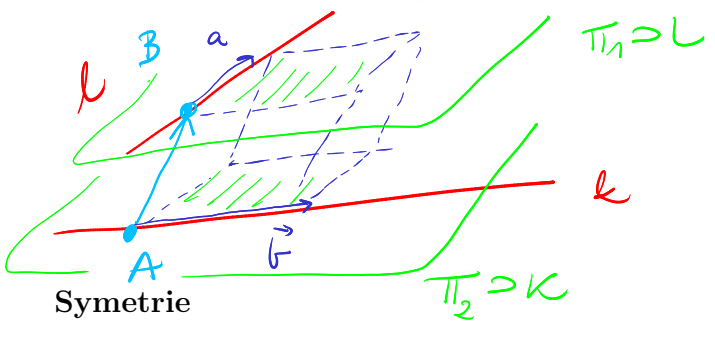


Definicja 5.4.8. Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste. (ZAWSZE DĄSIĘ TAKIE TE ASZCZYŻNY WYBRAĆ)

Niech \vec{a} będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś \vec{b} wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 . Załóżmy że proste te są skośne. Wówczas

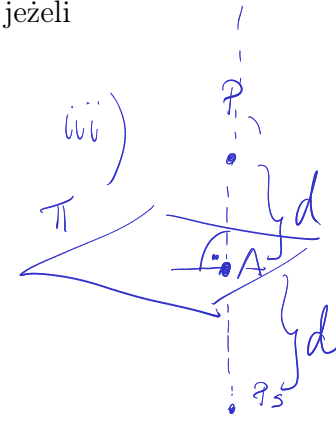
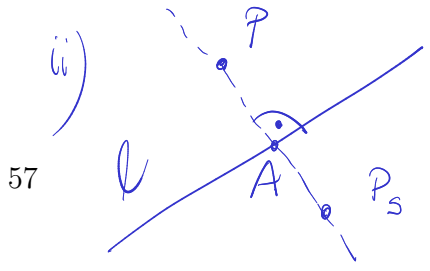
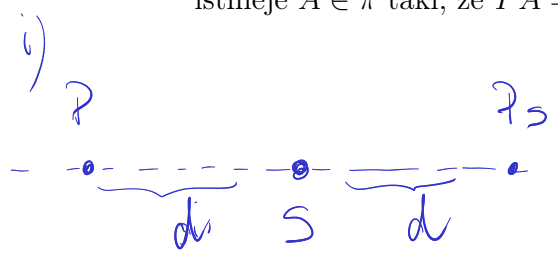
$$d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

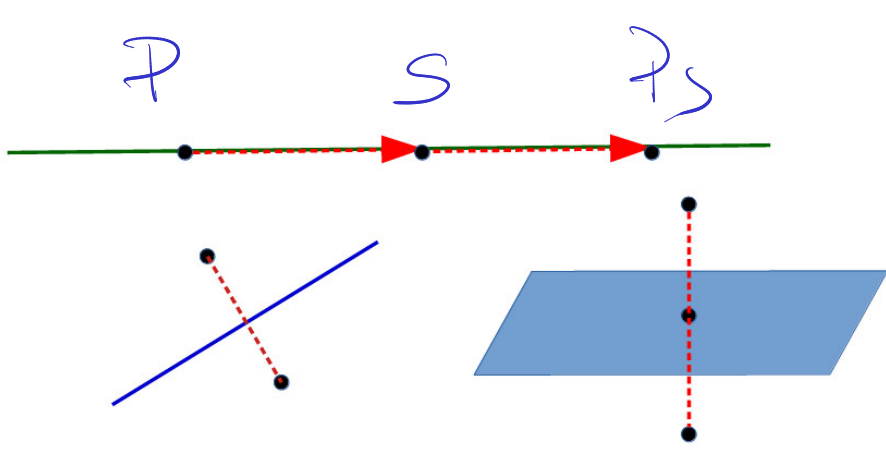
Objętość (moduł ul. mieszanych)
 ————
 pole podstawy
 (długość c wektora będącego ul. wektorów \vec{a}, \vec{b})



Definicja 5.4.9. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

- i) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem punktu S , jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.
- ii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l , jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.
- iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.





$P_s = T(S)$
 \vec{PS}
 translacija
 punktu S
 o vektor \vec{PS}

TEMAT: *Przestrzenie liniowe*

6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, zaś $V \neq \emptyset$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

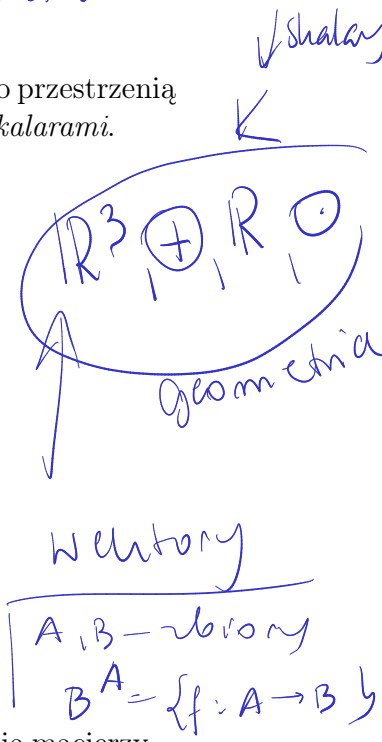
Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

- i) (V, \oplus) jest grupą abelową,
- ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$ *suma wektorów*
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$ *suma skalarów*
- iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$ *"mierzana" łączność*
- v) $\forall v \in V \quad \underline{1} \odot v = v$ *$1 \in K$*

nazywamy *przestrzenią wektorową* bądź *przestrzenią liniową* nad ciałem K (albo przestrzenią K -liniową). Elementy zbioru V nazywamy *wektorami*, zaś elementy ciała K *skalarami*.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

- i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$
 Dla $u = [u_1, \dots, u_n], v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
 $u \oplus v = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n], \alpha \odot u = [\alpha u_1, \dots, \alpha u_n]$.
- ii) (K^n, \oplus, K, \odot) , gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało
 Dla $u = [u_1, \dots, u_n], v = [v_1, \dots, v_n] \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
 $u \oplus v = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n], \alpha \odot u = [\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n]$.
- iii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
 Dla $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
 $f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$
 oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$
 Elementem neutralnym działania \oplus jest funkcja stale równa zero.
- iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.



mp: (i)
(\mathbb{C}^n)

Notabene o wymiarach

$\mathbb{C}[z]$ wielomiany zespolone zmiennej z

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V, \alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V , zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K . Wówczas:

- i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad 0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})$
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad -1 \cdot v = -v$
- v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$
- vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sin x$
 $D_f = \mathbb{R}$
 f^{-1} arcsin x
 $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami $\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U, \odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V .

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\emptyset \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U.$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V . \square

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{0\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V . Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$. W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = 0 \in U$. \square

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V . Jeśli $0 \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 6.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$V = \{f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^y\}$

U jest podprzestrzenią liniową V , bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcją ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f - \text{parzysty}\}$

U nie jest podprzestrzenią liniową V . Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f+g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f+g \notin U$.

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathcal{L}((x, y, z, t), x, y, z, t \in \mathbb{R})$

U jest podprzestrzenią liniową V . Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas

$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$
 oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$

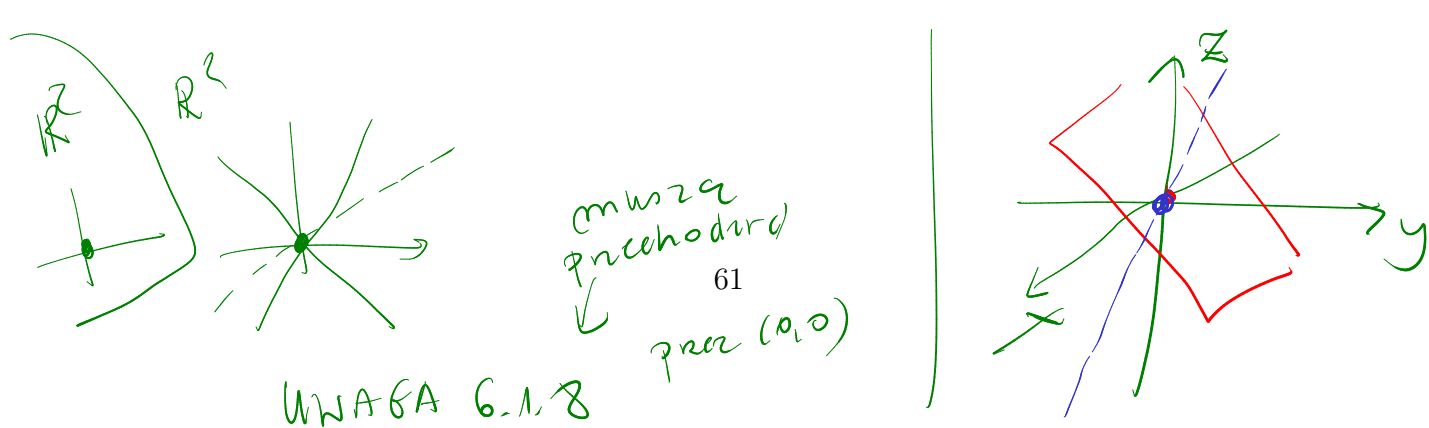
iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq n\}$.

Przyjmujemy, że $\deg 0 = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V .

Podprzestrzenie wektorowe \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3

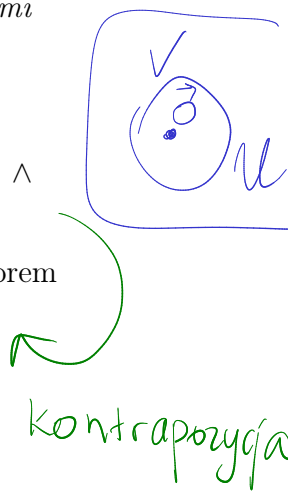
Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi \mathbb{R}^2 są proste przechodzące przez $(0,0)$.

Jedynymi nietrywialnymi podprzestrzeniami liniowymi \mathbb{R}^3 są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0,0,0)$.



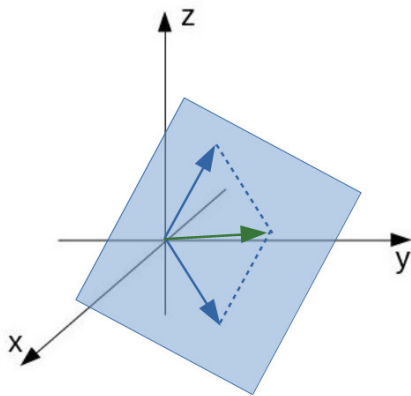
TRAK
NIE

$([0,1], \mathbb{R})$ zbiór funkcji ciągłych $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$



deg f "degree" st f f, g in U

z definicji



6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in V$. Niech $W \neq \emptyset$ będzie podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

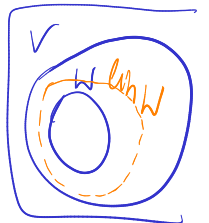
iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K; w_1, \dots, w_k \in W; k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W , nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\text{lin}_K W$ lub krótko $\text{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ piszemy też $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\}$.

Czyli $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

Span W

W nie jest podprz.



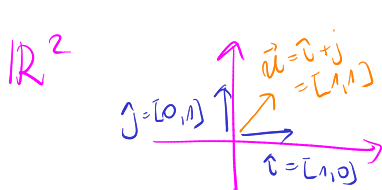
Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\emptyset \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\text{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W .

❗ **Wniosek 6.2.3.** Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{u, v_2, \dots, v_m\}$

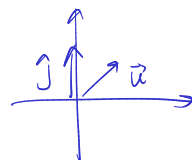
$\mathbb{R}^3 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\text{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\text{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W .

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{i} = (1, 0)$ oraz $\hat{j} = (0, 1)$ generują przestrzeń \mathbb{R}^2 , bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$.



$\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}\}$



$\text{lin}\{\vec{u}, \hat{j}\}$