Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 7
Data: ....

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K.

Definicja 7.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \to W$ spełniające warunki

i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$

ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych.*

Twierdzenie 7.1.2. Niech $\varphi : V \to W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) φ jest liniowe

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$
$\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $Hom_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $Hom(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

Uwaga 7.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W, mimo że są to różne działania.

Przykład 7.1.4. Czy φ jest liniowe?

1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in R$ mamy
$\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
$\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem
$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b$.

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y)$ oraz
$\varphi\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) =$
$(x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$.
Odwzorowanie jest liniowe.

4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.
$L = \varphi\big(\alpha(x, y, z)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$
$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - z + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$
Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład
$\varphi\big(5 \cdot (1, 0, 0)\big) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$

Uwaga 7.1.5. i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 7.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem
$\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?

Sprawdzimy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.
Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy
$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)\Big(p''(x) + q''(x)\Big) + 4\Big(p'(x) + q'(x)\Big) =$
$\Big((3-x)p''(x) + 4p'(x)\Big) + \Big((3-x)q''(x) + 4q'(x)\Big) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$,
dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.
Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$ mamy
$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha \cdot p''(x) + 4\alpha \cdot p'(x) = \alpha \cdot \Big((3-x)p''(x) +$
$4p'(x)\Big) = \alpha \cdot \varphi(p)(x)$. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p)$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 7.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

ii) $\forall v \in V \ \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Dowód. i) Ponieważ $\mathbf{0}_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}_V) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0}_V)$, zatem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. □

Wniosek 7.1.8. Niech $\varphi : V \to W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to φ nie jest liniowe.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. □

Przykład 7.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

Definicja 7.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,

ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,

iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją,

iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,

v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,

vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.

Twierdzenie 7.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K. Niech $(b_1, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \dots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Uwaga 7.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V.

Przykład 7.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ, jeśli

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy
$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$
Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 7.2.1. i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Ker}\varphi$.

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V\, \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$.

Uwaga 7.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ zbiory $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\varphi$. $\square$

Twierdzenie 7.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\mathrm{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś zbiór $\mathrm{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i) φ jest injekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$,

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\varphi = W$.

Definicja 7.2.5. Jeśli $\dim \mathrm{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\mathrm{rank}(\varphi)$.

Twierdzenie 7.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$r(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim V.$$

Wniosek 7.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim V$.

Przykład 7.2.8.

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

Wyznacz jądro oraz obraz φ, ich bazy i wymiary. Podaj własności φ.

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ x = -3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\varphi = \{(t, 2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(1, 2, -3, 1)\}$
Układ $\{(1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.
Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto
$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem φ jest epimorfizmem.
Stąd $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.
$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$
$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$.
$\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 7.2.9. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

Wniosek 7.2.10. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K takimi, że $\dim V = \dim W = n$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni V. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni W.

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U,V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Twierdzenie 7.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, U)$.

Oznaczmy przez $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) :\ f - bijekcja\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V.

Wniosek 7.3.3. Zbiór $Aut_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

Dowód. Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 7.3.2 i). Składania odwzorowań jest łączne. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe id_V. Elementem symetrycznym do $f \in Aut_K(V)$ jest f^{-1}, bowiem na mocy twierdzenia 7.3.2 ii) $f^{-1} \in Aut_K(V)$. $\square$

Grupa $Aut_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej* V.

Przykład 7.3.4. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dane wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ oraz $\mathcal{B}_W = \big(c_1, \ldots, c_m\big)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$.

Definicja 7.4.1. *Macierzą* (lub *reprezentacją macierzową*) *odwzorowania liniowego* φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 7.4.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

$$\varphi(1,0,0) = (3,0),\ \varphi(0,1,0) = (0,2),\ \varphi(0,0,1) = (0,1), \quad M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

b) bazy $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,0), b_2 = (1,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,2), c_2 = (0,1)\big)$

$$\varphi(b_1) = \varphi(1,2,0) = (3,4) = [\alpha_1, \beta_1]_\mathcal{C}, \qquad (3,4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$$
$$\Rightarrow\ \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2,\ \varphi(b_1) = [3,-2]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_2) = \varphi(1,1,1) = (3,3) = [\alpha_2, \beta_2]_\mathcal{C}, \qquad (3,3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$$
$$\Rightarrow\ \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3,\ \varphi(b_2) = [3,-3]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_3) = \varphi(0,0,1) = (0,1) = [\alpha_3, \beta_3]_\mathcal{C}, \qquad (0,1) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$$
$$\Rightarrow\ \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1,\ \varphi(b_3) = [0,1]_\mathcal{C}$$
$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

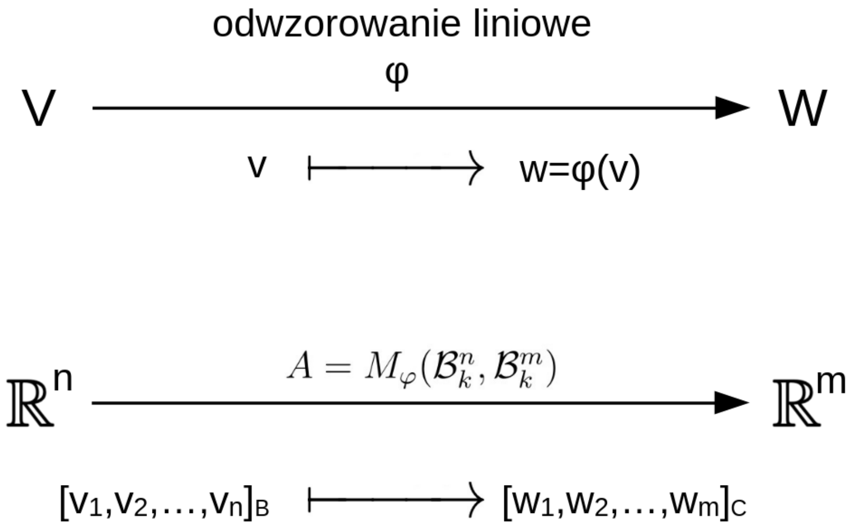
Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Uwaga 7.4.4. Rozważmy dwie przestrzenie liniowe V oraz W nad $\mathbb{R}$ takie, że $\dim V = n$ oraz $\dim W = m$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V, zaś, $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W.



Przykład 7.4.5. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \to M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.
Rozważamy bazę $\mathcal{B} = \big(1, z\big)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = \big(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\big)$ przestrzeni $M_2(\mathbb{C})$.
$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_{\mathcal{C}}$
$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2+i, 1, 3, 4-i]_{\mathcal{C}}$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4$, $\Rightarrow$ $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4\times 2}(\mathbb{C})$, $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$

Twierdzenie 7.4.6. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = \big(b_1, \ldots, b_n\big)$ oraz $\mathcal{B}_W = \big(c_1, \ldots, c_m\big)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}_V}, w = [y_1, \ldots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y.$$

Uwaga 7.4.7. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.8. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\mathrm{rank}(\varphi) = \mathrm{rank}A$.

Wniosek 7.4.9. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.6. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = m$,

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = n$.

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy
Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k)$ oraz za pomocą $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Czy φ jest monomorfizmem /epimorfizmem?

Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie $\varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$
$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 0) + 3(0, 0, 1) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3 = [1, 0, 3]_{\mathcal{B}}$

$$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd $\varphi(1, 2, 3) = [3, 1]_{\mathcal{C}} = 3c_1 + c_2 = 3(1, 2) + (0, 1) = (3, 7)$.
Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.
Ponadto $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.10. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 7.4.11. Jeśli $\dim V = \dim W$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

i) f jest izomorfizmem

ii) $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\mathrm{Im} f = W$

iv) $r(A) = \dim V$

v) $\det A \neq 0$

Wniosek 7.4.12. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Twierdzenie 7.4.13. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

Przykład 7.4.14. Dane są odwzorowania liniowe
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z)$,
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - 3z, x + y)$,
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y, x - y)$.
Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania
$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)$ i oblicz $\varphi(1, 2, 3)$.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Czy h jest odwracalne?

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}),\ M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h$ jest odwracalne

$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = \left(M_h\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}^2 M_{f+g} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$

$\varphi(x,y,z)=?$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3x-5y-5z \\ 3x+16y-7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x,y,z) = (\tfrac{2}{3}x - \tfrac{10}{9}y - \tfrac{10}{9}z, \tfrac{2}{3}x + \tfrac{32}{9}y - \tfrac{14}{9}z)$$

$\varphi(1,2,3)=?$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1,2,3) = (-\tfrac{44}{9}, \tfrac{112}{9})$$

7.5 Zmiana baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W. Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \to \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \to \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dowód. Ponieważ $X = PX'$, $Y = QY'$, $AX = Y$, $A'X' = Y'$, zatem $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. $\square$

Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczymy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z) = (3x, 2y+z)$ w bazach $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,0), b_2 = (1,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,2), c_2 = (0,1)\big)$.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}^3_k \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = P_{\mathcal{B}^2_k \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

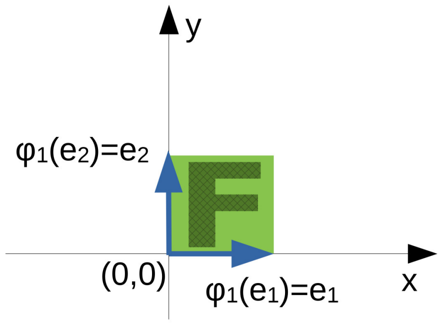
$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga 7.5.2. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\mathrm{id} : V \to V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

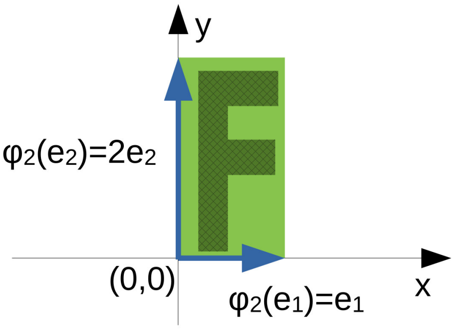
Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases} \mathrm{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \ldots + a_{n1}b_1 \\ \ldots \\ \mathrm{id}(b'_n) = b'_n = a_{1n}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M_{\mathrm{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$

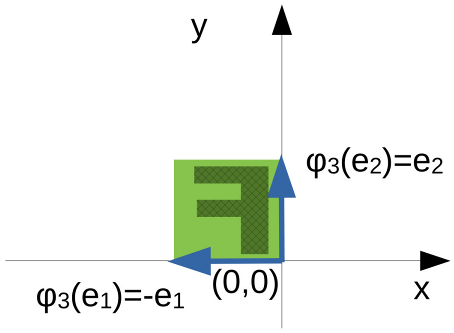
Przykład 7.5.3. Endomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}^2$



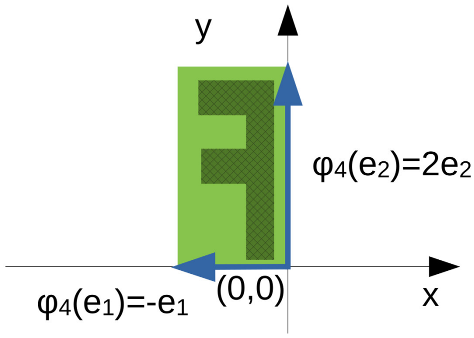
identyczność $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



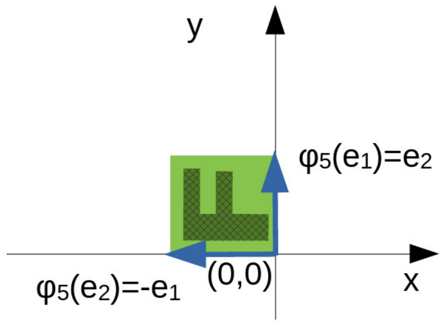
rozciąganie $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



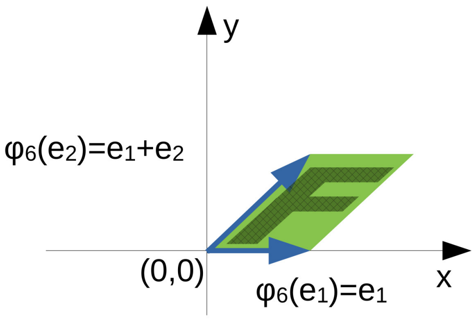
odbicie (symetria osiowa) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



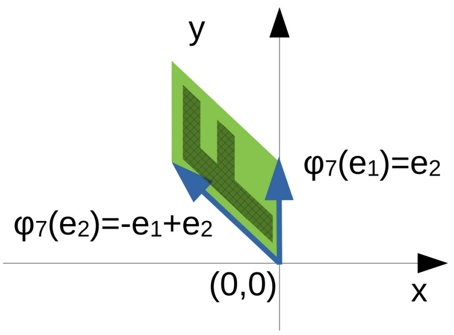
rozciąganie i odbicie $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

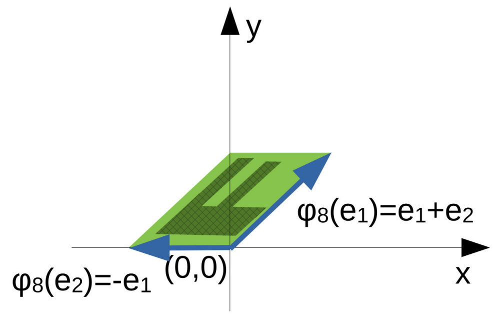


obrót (rotacja) o kąt $\frac{\pi}{2}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

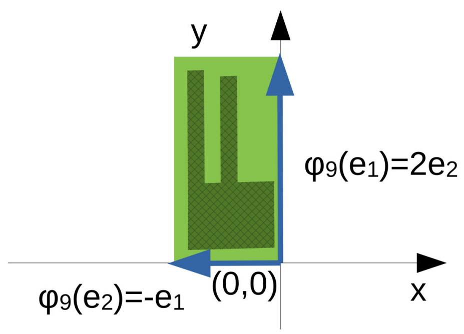


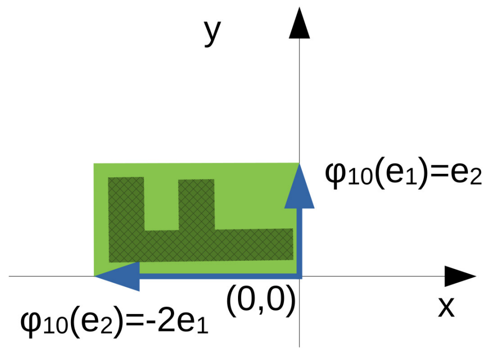
powinowactwo ścinające (ang. shear) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



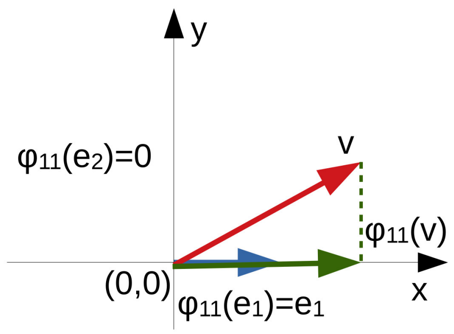


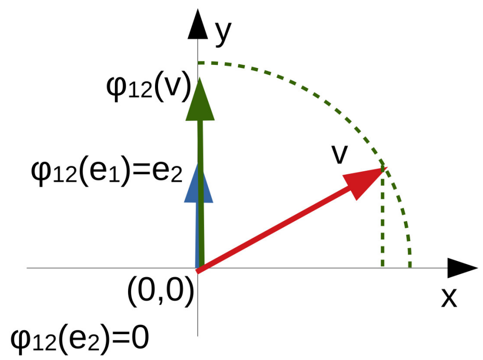
powinowactwo ścinające i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ rotacja i powinowactwo ścinające $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$





rotacja i rozciąganie $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ rozciąganie i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$





rzutowanie (projekcja) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ projekcja i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Czym jest powinowactwo ścinające, dowiesz się tutaj.

7.6 Uwaga na temat rozwiązywania układów równan liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad\ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

Przy ustalonych bazach przestrzeni K^n, K^m macierz A jednoznacznie wyznacza odwzorowanie liniowe $\varphi_A : K^n \to K^m$. Rozwiązywanie układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}$ polega na wyznaczeniu jądra $\mathrm{Ker}\varphi_A$ odwzorowania φ_A.

Wniosek 7.6.1. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych $AX = \mathbf{0}$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem K. Jej wymiar jest równy $n - r(A)$.

W szczególności wektor zerowy zawsze należy do zbioru rozwiązań układu jednorodnego. Ponadto suma rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązaniem tegoż układu jednorodnego.

Twierdzenie 7.6.2. Niech $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ będzie jednym z rozwiązań niesprzecznego niejednorodnego układu równań liniowych $AX = B$. Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań układu $AX = B$ ma postać

$$\Big\{(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) : \ (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \text{ dowolne rozw. } AX = \mathbf{0}\Big\}.$$

Przykład 7.6.3. Rozważmy raz jeszcze układ równań z przykładu 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u & = & 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u & = & 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u & = & 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u & = & 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u & = & -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Jak już wiemy, $r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ i jest to układ nieoznaczony, posiadający nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów. Rozwiązania są postaci

$$\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$. Równoważnie

$(x, y, z, t, u) = (11-2y, y, -3+\frac{7}{3}t, t, 3-\frac{8}{3}t) = (11, 0, -3, 0, 3)+(-2, 1, 0, 0, 0)y+(0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})t.$

Dla $y = 0$ i $t = 0$ otrzymujemy $(11, 0, -3, 0, 3)$ jako jedno z rozwiązań rozważanego układu. Zbiór rozwiązań korespondującego układu jednorodnego jest przestrzenią liniową wymiaru 2, zaś układ wektorów $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3}\}$ jest bazą tej przestrzeni.