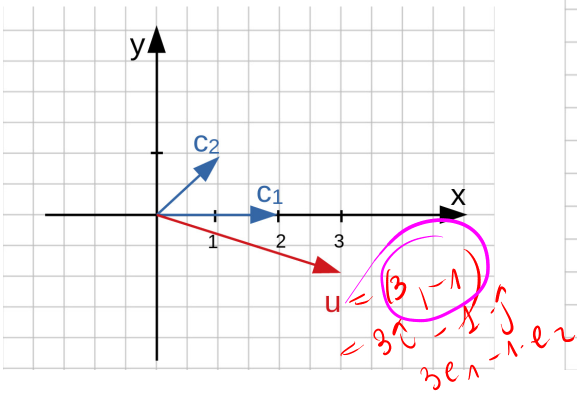
Przykład 6.2.33. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$
$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2))$, gdzie $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ to baza kanoniczna.
$\mathcal{C} = (c_1, c_2))$, gdzie $c_1 = (2,0), c_2 = (1,1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

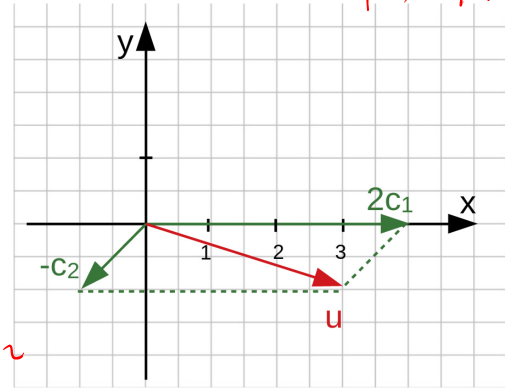
$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$u = [2,-1]_{\mathcal{C}} = 2c_1 - c_2 = 2 \cdot (2,0) - (1,1) = (3,-1)$



$u = (3,-1) = 3\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}$
$3e_1 - 1 \cdot e_2$



KONIEC

Przykład 6.2.34. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$
$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2))$, gdzie $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ to baza kanoniczna.
$\mathcal{C} = (c_1, c_2))$, gdzie $c_1 = (1,1), c_2 = (0,-1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

2 wektory — wystarczy spr. lin. niezal.

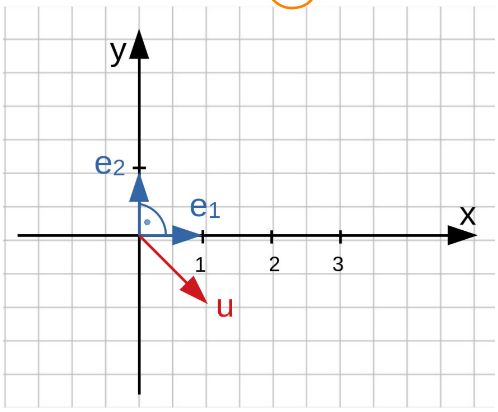
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

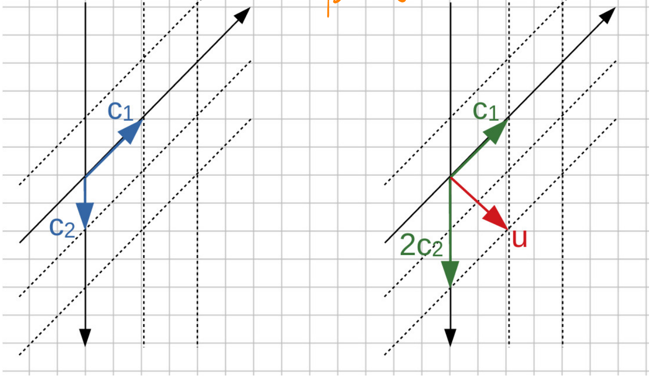
①

$u = (1,-1)$ oraz $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{C}}$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$
$\overline{u}$ $(1,-1) = \alpha c_1 + \beta c_2 = \alpha(1,1) + \beta(0,-1) = (\alpha, \alpha - \beta)$
Stąd $\alpha = 1$, $\beta = 2$ oraz $u = [1,2]_{\mathcal{C}}$.

$(\alpha, \alpha - \beta) = (1,-1)$
$\alpha = 1$
$\alpha - \beta = -1$
$\beta = \alpha + 1 = 2$

②





(e_1, e_2, e_3) $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

Przykład 6.2.35. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,
$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4,2,1), b'_2 = (-5,2,3), b'_3 = (1,3,0)$

Skalary $4, 2, 1$ to współrzędne b'_1 w bazie kanonicznej.
Piszemy $b'_1 = (4,2,1)$ zamiast $b'_1 = [4,2,1]_{\mathcal{B}_k^3}$.

$[4,2,1]_{\mathcal{B}_k^3}$

$1 \cdot b_1' + 0 b_2' + 0 b_3'$

$\|$

Ponadto $b_1' = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$.

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczymy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.

Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b_1' + \beta b_2' + \gamma b_3'$. Otrzymujemy

$\|-3 \quad \|15 \quad \|7$

$\vec{v} = (-3, 15, 7) = \alpha(4, 2, 1) + \beta(-5, 2, 3) + \gamma(1, 3, 0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$.

Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ, należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

p. macierzowa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_2]{-1 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 16w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow v = [1, 2, 3]_{\mathcal{B}'}$$

stara baza

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ jej dwiema bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

nowa baza

$$\begin{aligned} b_1' &= \alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + \ldots + \alpha_{n1} b_n \\ b_2' &= \alpha_{12} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \ldots + \alpha_{n2} b_n \\ &\ldots \\ b_n' &= \alpha_{1n} b_1 + \alpha_{2n} b_2 + \ldots + \alpha_{nn} b_n \end{aligned}.$$

Definicja 6.2.36. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_n')$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 6.2.37. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x_1', \ldots, x_n']_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$.

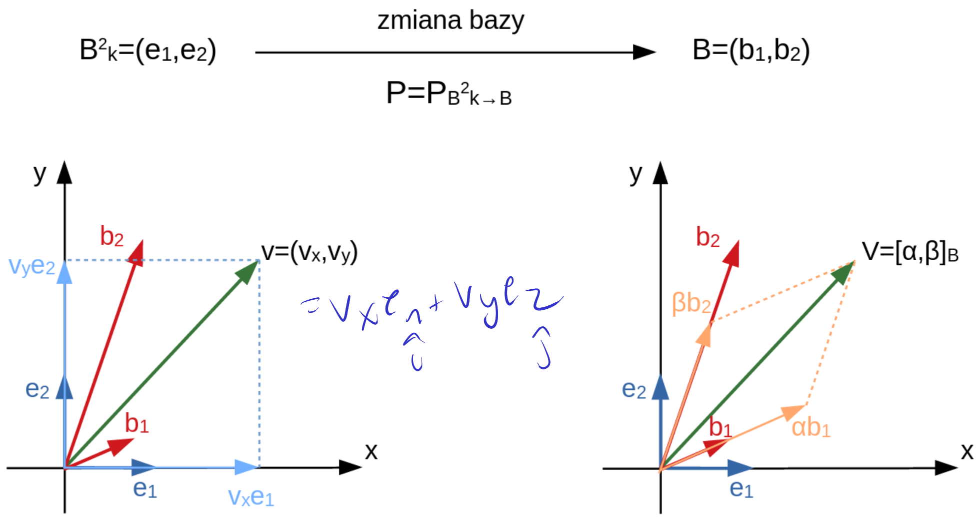
stara baza

nowa baza

$PX' = X$

$X' = P^{-1}X$

$[P|X] \longrightarrow [I|X']$



$= v_x e_1 + v_y e_2$

$\hat{i}$ $\hat{j}$

Przykład 6.2.35 - ciąg dalszy

$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b_1', b_2', b_3')$ inna baza, gdzie $b_1' = (4,2,1), b_2' = (-5,2,3), b_3' = (1,3,0)$

Wyznaczymy współrzędne wektora $v = (-3,15,7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \; X' = P^{-1}X = ?.$$

Wyznaczamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy

$$X' = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$= \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 2\} =$

Przykład 6.2.38. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, 1+x^2)$, $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$. Wyznaczmy macierz $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

$= \{c \cdot 1 + b \cdot x + a \cdot x^2$ $a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$= \operatorname{lin}\{1, x, x^2\}$

baza standardowa

$? =$

$$1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1+x) + \beta_1(x+x^2) + \gamma_1(1+x^2) = (\alpha_1+\gamma_1) + (\alpha_1+\beta_1)x + (\beta_1+\gamma_1)x^2$$

Stąd $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases}$ i ostatecznie $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$.

$1 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]_{\mathcal{B}}$

$= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$

Łatwo zauważyć, że $1 + x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1,0,0]_{\mathcal{B}}$.

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1 + x + x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$

i otrzymujemy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$

ćw

Twierdzenie 6.2.39. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami. Wówczas

i) $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$,

ii) $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$.

Uwaga 6.2.40. W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdy baza początkowa to baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^n$, łatwo wypisać macierze przejścia do nowych baz $P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}}$ oraz $P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}'}$. Wypisanie macierzy $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ wymaga rachunków. Na mocy twierdzenia 6.2.39 otrzymujemy $\boxed{P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$, skąd $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}'}$.

Łatwe

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dd, "\boxed{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}"] \\
\mathcal{B}_k^n \arrow[ur, "P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "P_{\mathcal{B}_k^n\to\mathcal{B}'}"'] & \\
 & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

Rachunek

Łatwe

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}"] \arrow[rr, bend right, "P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}"'] & \mathcal{B}' \arrow[r, "P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}"] & \mathcal{B}''
\end{tikzcd}$$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 7
Data: ....

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

PROCES

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

przyczyna $v \longmapsto \varphi(v) = w$ skutek

7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K.

Nad tym samym ciałem

Definicja 7.1.1. Odwzorowanie $\varphi : V \to W$ spełniające warunki

dodawanie w W

i) własność addytywności $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$

dodawanie w V

ii) własność jednorodności $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych.*

Twierdzenie 7.1.2. Niech $\varphi : V \to W$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) φ jest liniowe

kombinacja liniowa

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$

iii) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$
$\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \ldots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących V w W oznaczamy $\mathcal{L}_K(V, W)$ lub $Hom_K(V, W)$ (lub krótko $\mathcal{L}(V, W)$ lub $Hom(V, W)$, gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

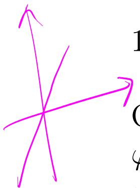
Uwaga 7.1.3. Często notujemy $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, +, K, \cdot)$, to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach V i W, mimo że są to różne działania.

Przykład 7.1.4. Czy φ jest liniowe?

K - ciało

1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ ustalone

$(K, +, K, \cdot)$ prz. liniowe



Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in R$ mamy
$\varphi(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x)$ oraz
$\varphi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.

!

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ ustalone

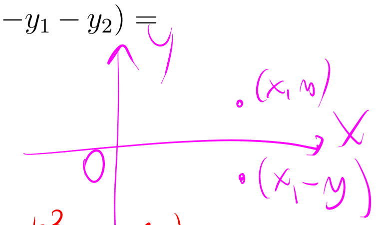
φ = 2b

b=0

Jeśli $b \neq 0$, to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem
$\varphi(1 + 1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a + b) + (a + b) = 2a + 2b$.

3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, symetria względem osi Ox

Ponieważ $\varphi(x, y) = (x, -y)$, zatem dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\varphi\left(\alpha(x, y)\right) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y)$ oraz
$\varphi\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) =$
~~$(x_1, -y_1) + (x_2, -y_2)$~~ $= \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$.
Odwzorowanie jest liniowe.



4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

$\varphi(1,2,3) = (1-2+3, 2\cdot 2+3+1)$

$(2,8)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.
$L = \varphi\big(\alpha(x, y, z)\big) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$
$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - z + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$
Na ogół $L \neq P$. Możemy podać kontrprzykład
$\varphi\big(5 \cdot (1, 0, 0)\big) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$

Tylko to na 2)

Uwaga 7.1.5. i) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

ii) Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$ takie, że $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$.

Przykład 7.1.6. Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, dane wzorem
$\varphi(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x)$, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_2[x]$, jest liniowe?

deg ≤ 1

Sprawdzimy, że φ jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.
Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ mamy
$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x)+4(p+q)'(x) = (3-x)\Big(p''(x)+q''(x)\Big)+4\Big(p'(x)+q'(x)\Big) =$
$\Big((3 - x)p''(x) + 4p'(x)\Big) + \Big((3 - x)q''(x) + 4q'(x)\Big) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x)$,
dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$.
Dla dowolnych $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$ mamy
$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x)+4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha\cdot p''(x)+4\alpha\cdot p'(x) = \alpha\cdot\Big((3-x)p''(x)+$
$4p'(x)\Big) = \alpha \cdot \varphi(p)(x)$. dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p)$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $W = (W, \oplus, K, \odot)$.

Twierdzenie 7.1.7. Jeśli odwzorowanie $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to wówczas

i) $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$,

ii) $\forall v \in V\ \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Dowód. i) Ponieważ $\mathbf{0}_W + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \mathbf{0}_V) = \varphi(x) + \varphi(\mathbf{0}_V)$, zatem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
ii) Na mocy i) dla dowolnego $v \in V$ mamy $\mathbf{0}_W = \varphi(\mathbf{0}_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$. Stąd $\varphi(-v) = -\varphi(v)$. ☐

Wniosek 7.1.8. Niech $\varphi : V \to W$. Jeśli $\varphi(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, to φ nie jest liniowe.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji. ☐

Przykład 7.1.9. Odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ nie jest liniowe, bowiem $f(0) = 5 \neq 0$.

$ax+b$ $b \neq 0$

Definicja 7.1.10. Odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli φ jest injekcją,

ii) *epimorfizmem*, jeśli φ jest surjekcją,

! iii) *izomorfizmem*, jeśli φ jest bijekcją,

iv) *endomorfizmem*, jeśli $V = W$,

v) *automorfizmem*, jeśli $V = W$ i φ jest bijekcją,

vi) *formą liniową*, jeśli $W = K$.

$f : (V, +, K, \cdot) \to (K, +, K, \cdot)$

Twierdzenie 7.1.11. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K. Niech $(b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \ldots, w_n \in W$ będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ takie, że $\varphi(b_i) = w_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Uwaga 7.1.12. Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej V wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni V.

$B_{\mathbb{R}_2} = (1, x, x^2)$

Przykład 7.1.13. Podaj wzór odwzorowania liniowego φ, jeśli

znana baza $\mathbb{R}_2[x]$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$
$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_2[x]$ bazą standardową jest $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Mamy

addytywność

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}.$$

jednorodność

Stąd $\varphi(x) = 4$, $\varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0$, $\varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6$.

$c = 3$
$b = -1$
$a = 2$

Dowolny $p \in \mathbb{R}_2[x]$ jest postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$.

znając te trzy → znam wzór φ

$\varphi(2x^2 - x + 3)$
$= (12x + 12 - 4)$
$= 12x + 8$

7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

$V \xrightarrow{\varphi} W$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definicja 7.2.1. i) Zbiór $\{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ nazywamy *jądrem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Ker}\varphi$.

przeciwobraz 0_W

ii) Zbiór $\{w \in W : \exists v \in V\, \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ nazywamy *obrazem* odwzorowania liniowego φ i oznaczamy $\mathrm{Im}\varphi$ lub $\varphi(V)$.

Uwaga 7.2.2. Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ zbiory $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\varphi$ są niepuste.

Dowód. Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, zatem $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\varphi$. ☐

Twierdzenie 7.2.3. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ zbiór $\mathrm{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś zbiór $\mathrm{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.

Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

!

Twierdzenie 7.2.4. Dla dowolnego $\varphi \in \underset{}{\overset{\text{liniowe}}{\mathcal{L}}}(V, W)$

i) φ jest injekcją $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$, Jądro jest trywialne

ii) φ jest surjekcją $\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Im}\varphi = W.}$

Definicja 7.2.5. Jeśli $\dim \mathrm{Im}\varphi < \infty$, to liczbę tę nazywamy *rzędem* odwzorowania liniowego $\varphi : V \to W$ i oznaczamy $r(\varphi)$ lub $\mathrm{rank}(\varphi)$.

!

Twierdzenie 7.2.6. (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$. Wówczas

$$\overset{\dim \mathrm{Im}\varphi}{r(\varphi)} + \underset{\text{nullity}}{\dim \mathrm{Ker}\varphi} = \boxed{\dim V.}$$

$\varphi : V \to W$ liniowe

Wniosek 7.2.7. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ mamy $\dim \mathrm{Im}\varphi \leq \dim V$.

Przykład 7.2.8.

$\varphi(1,1,1,1) = (5, 7, -3)$

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t)$$

$=0$ $=0$ $=0$

Wyznacz jądro oraz obraz φ, ich bazy i wymiary. Podaj własności φ.

Jadro $\varphi(\mathbb{R}) = (0,0,0)$

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$(x, x, x) + (y, -y, y) + (z, z, -z) + (2t, 6t, -4t)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_3}$$

$x(1,1,1) + y(1,-1,1) + z(1,1,-1) + t(2,6,-4)$

Np.

$(\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ liniowe

$\dim \mathrm{Im}\varphi \leq 3$

↓

nigdy nie będzie surjekcja

$(\dim \mathrm{Im}\varphi \neq 5)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ x=-3t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$(t, 2t, -3t, t)$

$t\underbrace{(1, 2, -2, 1)}_{\text{baza}}$

Injekcja

$\mathrm{Ker}\varphi = \{(t, 2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(1, 2, -3, 1)\}$
Układ $\{(1, 2, -3, 1)\}$ jest bazą $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$.
Zatem φ nie jest monomorfizmem. Ponadto

SURJEKCJA

$r(\varphi) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\varphi = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, zatem φ jest epimorfizmem.

OBRAZ

Stąd $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$. Można to również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

$r(\varphi)=\dim \mathrm{Im}\,\varphi$

ALTERNATYWA

$\varphi(x, y, z, t) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + z(1, 1, -1) + t(2, 6, -4)$
$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 6, -4)\}$

↑ generatory

bazen

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{lin}\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$$

minor niezerowy

Układ $\{(1, 1, 1), (0, -2, 0), (0, 0, -2)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Im}\varphi$.
$\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathrm{Im}\varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

STOP!

Twierdzenie 7.2.9. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą układ liniowo niezależny. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ również tworzą układ liniowo niezależny.

Wniosek 7.2.10. Niech V oraz W będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K takimi, że $\dim V = \dim W = n$. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie injekcją, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą bazę przestrzeni V. Wówczas wektory $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n) \in W$ tworzą bazę przestrzeni W.

7.3 Działania na odwzorowaniach liniowych

Niech U,V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

Twierdzenie 7.3.1. Zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wraz z działaniami

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W), \quad \cdot : K \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W)$$

określonymi wzorami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$,
jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

Twierdzenie 7.3.2. i) Jeśli $f \in \mathcal{L}(U, V)$ oraz $g \in \mathcal{L}(V, W)$, to wówczas $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.

Złożenie odwz. lin. jest odwz. lin.

ii) Jeśli $f \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, U)$.

odwz. odwrotne do liniowego jest liniowe

Oznaczmy przez $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}_K(V, V) :\ f - bijekcja\}$ zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej V.

Wniosek 7.3.3. Zbiór $Aut_K(V)$ wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

Dowód. Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 7.3.2 i). Składania odwzorowań jest łączne. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe id_V. Elementem symetrycznym do $f \in Aut_K(V)$ jest f^{-1}, bowiem na mocy twierdzenia 7.3.2 ii) $f^{-1} \in Aut_K(V)$. ☐

Grupa $Aut_K(V)$ bywa też oznaczana symbolem $GL(V)$ i nazywana *pełną* lub *ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej* V.

Przykład 7.3.4. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dane wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

$\dim V = n$ $\dim W = m$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \ldots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\varphi : V \to W$.

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$
$$b_1, \ldots, b_n \quad \varphi(b_1) \to \quad c_1, \ldots, c_m$$

Definicja 7.4.1. *Macierzą* (lub *reprezentacją macierzową*) *odwzorowania liniowego* φ w bazach $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ nazywamy macierz $A \in M_{m\times n}(K)$, której kolejne kolumny to współrzędne wektorów $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ w bazie $\mathcal{B}_W$. Oznaczamy ją symbolem $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Przykład 7.4.2. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$, gdy rozważamy

$\varphi(1,2,3) = (3\cdot 1, 2\cdot 2+3) = (3,7)$

$(i\ j)$

a) w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ bazy kanoniczne

e_1 $3i + 0j$ e_2 e_3 $0i + 1j$

$$\varphi(1, 0, 0) = (3, 0),\ \varphi(0, 1, 0) = (0, 2),\ \varphi(0, 0, 1) = (0, 1), \quad M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3\cdot 1, 2\cdot 0+0)$ $\|$

$(3\cdot 0, 2\cdot 0+1) = (0,1)$

$$A \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

b) bazy $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

$\|\ (3\cdot 1, 2\cdot 2+0)$

$$\varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) = [\alpha_1, \beta_1]_\mathcal{C}, \qquad (3, 4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1),$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2,\ \varphi(b_1) = [3, -2]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) = [\alpha_2, \beta_2]_\mathcal{C}, \qquad (3, 3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$$

$(3\cdot 1, 2\cdot 1+1)$ $//$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3,\ \varphi(b_2) = [3, -3]_\mathcal{C}$$
$$\varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_\mathcal{C}, \qquad (0, 1) = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3)$$
$$\Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1,\ \varphi(b_3) = [0, 1]_\mathcal{C}$$

$$A \to M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

!

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}^n_k, \mathcal{B}^m_k)$.

Uwaga 7.4.4. Rozważmy dwie przestrzenie liniowe V oraz W nad $\mathbb{R}$ takie, że $\dim V = n$ oraz $\dim W = m$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V, zaś, $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\text{odwzorowanie liniowe}\ \varphi"] & W \\ v \arrow[r, mapsto] & w=\varphi(v) \end{tikzcd}$$

$\dim V = n$ $\quad$ $\dim W = m$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A = M_\varphi(\mathcal{B}^n_k, \mathcal{B}^m_k)"] & \mathbb{R}^m \\ {[v_1, v_2, \dots, v_n]_B} \arrow[r, mapsto] & {[w_1, w_2, \dots, w_m]_C} \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}_1[x]$

$\alpha z + \beta$

zbiór wielomianów stopnia ≤ 1 zmienną z o współczyn. z $\mathbb{C}$

Przykład 7.4.5. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \to M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \boxed{\alpha A + \beta I_2}$ gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

zbiór macierzy 2x2 o elem. z $\mathbb{C}$

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.
Rozważamy bazę $\mathcal{B} = (1, z)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ przestrzeni $M_2(\mathbb{C})$.

$1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22}$ $\quad$ $\alpha z + \beta$ $\quad$ $\dim \mathbb{C}_1[z] = 2$

$1 = 0 \cdot z + 1$, $0 = \alpha$, $1 = \beta$

$$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_\mathcal{C}$$
$$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2+i, 1, 3, 4-i]_\mathcal{C}$$

$\dim M_{2\times 2}(\mathbb{C}) = 4$

$$\dim_\mathbb{C} \mathbb{C}_1[z] = 2,\ \dim_\mathbb{C} M_2(\mathbb{C}) = 4,\ \Rightarrow\ M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4\times 2}(\mathbb{C}),\ M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$$

4×2

$z = 1 \cdot z + 0$, $1 = \alpha$, $0 = \beta$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \underset{E_{11}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \underset{E_{22}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Twierdzenie 7.4.6. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W. Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Oznaczmy

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas

$$\varphi(v) = w \Leftrightarrow AX = Y.$$

1:1 bijekcja

Uwaga 7.4.7. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach)! Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.8. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\mathrm{rank}(\varphi) = \mathrm{rank} A$.

$\mathrm{rank}(\varphi) = \dim \mathrm{Im}(\varphi)$

Wniosek 7.4.9. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.6. Wówczas

surjekcja
i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = m$,

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = n$.

$\dim V = n \qquad \dim W = m$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,\varphi = m = \dim W$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = W$

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy

Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k)$ oraz za pomocą $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Czy φ jest monomorfizmem /epimorfizmem?

bazy kanoniczne nowe bazy

Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^2_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$

$\varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 3) = (3, 7)$

$(1,2,3)$ podać w bazie $\mathcal{B}$

Sprawdzenie $\varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$
$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 0) + 3(0, 0, 1) = 1 \cdot b_1 + \overset{3}{2} \cdot b_3 = [1, 0, 3]_{\mathcal{B}}$

!

współrz.- $(1,2,3) = [1,0,3]_{\mathcal{B}}$

$$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wynik jest w bazie $\mathcal{C}$

Stąd $\varphi(1, 2, 3) = [3, 1]_{\mathcal{C}} = 3c_1 + c_2 = 3(1, 2) + (0, 1) = (3, 7)$.
Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.
Ponadto $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1$, więc φ nie jest monomorfizmem.

to samo!

$\| \dim \mathbb{R}^3 \qquad \dim \mathrm{Im}\,\varphi = r(A)$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.10. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 7.4.11. Jeśli $\underline{\dim V = \dim W}$, to wówczas następujące warunki są równoważne.

→ macierz jest kwadratowa

↑ wzcepolności

$V = W$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- i) f jest izomorfizmem — bijekcja
- ii) $\text{Ker}f = \underline{\{\mathbf{0}_V\}}$ — iniekcja (różnowart.)
- iii) $\text{Im}f = W$ — (surjekcja) → $\dim V = r(A) = \dim \text{Im}\,\varphi$
- iv) $\underline{r(A)} = \dim V$
- v) $\underline{\det A \neq 0}$

$\dim \ker \varphi = 0$

Tw. o rzędzie

Wniosek 7.4.12. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $\underline{A} = M_{\underline{f}}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $\underline{A^{-1}} = M_{\underline{f^{-1}}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Twierdzenie 7.4.13. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$\underline{B \cdot A} = M_{\underline{g \circ f}}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

$g \circ f(x)$

←

$g(f(x))$

Przykład 7.4.14. Dane są odwzorowania liniowe
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z)$,
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - 3z, x + y)$,
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y, x - y)$.
Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania $\boxed{\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g)}$ i oblicz $\varphi(1, 2, 3)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; \underline{M_f} := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\;\; M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; \underline{M_g} := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\;\; M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\underline{M_{f+g}} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Czy h jest odwracalne?

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}),\;\; \underline{M_h} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det M_h = -3 \neq 0 \;\Rightarrow\; h$ jest odwracalne

$\underline{M_{h^{-1}}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = (M_h)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

$$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}^2 M_{f+g} = \underbrace{\tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M_{h^{-1}} \circ M_{h^{-1}}}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{2}{9}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$\circ\ M_{f+g}$

$\varphi(x,y,z)=?$

$$M_\varphi\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{2}{9}\begin{bmatrix}3x-5y-5z\\3x+16y-7z\end{bmatrix}\Rightarrow\varphi(x,y,z)=(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{10}{9}y-\tfrac{10}{9}z,\tfrac{2}{3}x+\tfrac{32}{9}y-\tfrac{14}{9}z)$$

$\varphi(1,2,3)=?$

$$M_\varphi\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{2}{9}\begin{bmatrix}3&-5&-5\\3&16&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{2}{9}\begin{bmatrix}-22\\56\end{bmatrix}\Rightarrow\varphi(1,2,3)=(-\tfrac{44}{9},\tfrac{112}{9})$$

Uwaga 7.4.15. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\mathrm{id}: V\to V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

el. neutralny składania

$P=P_{B\to B'}$

Dowód. Niech $\mathcal{B}=(b_1,\ldots,b_n)$, $\mathcal{B}'=(b'_1,\ldots,b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases}\mathrm{id}(b'_1)=b'_1=a_{11}b_1+\ldots+a_{n1}b_1\\ \ldots\\ \mathrm{id}(b'_n)=b'_n=a_{1n}b_1+\ldots+a_{nn}b_n\end{cases},\ \text{skąd } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=M_{\mathrm{id}}(\mathcal{B}',\mathcal{B}).\qquad\square$$

7.5 Zmiana baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K. Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W. Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi: V\to W$. Niech $P=P_{\mathcal{B}_V\to\mathcal{B}'_V}$, $Q=P_{\mathcal{B}_W\to\mathcal{B}'_W}$ oraz $A=M_\varphi(\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W)$, $A'=M_\varphi(\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A'=Q^{-1}AP.$$

Dowód. Ponieważ $X=PX'$, $Y=QY'$, $AX=Y$, $A'X'=Y'$, zatem $QY'=Y=AX=APX'\Rightarrow Y'=(Q^{-1}AP)X'$. $\square$

$$\begin{tikzcd}
(V,B_V) \arrow[rr, "\varphi", "A"'] & & (W,B_W) \\
& & \\
(V,B'_V) \arrow[uu, "\mathrm{id}_V", "P"'] \arrow[rr, "A'", "\varphi"'] \arrow[rruu, phantom, "Q^{-1}AP"] & & (W,B'_W) \arrow[uu, "Q", "\mathrm{id}_V"']
\end{tikzcd}$$

$A'=Q^{-1}AP$

$A=QA'P^{-1}$

Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru ma zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczymy macierz $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y,z) = (3x, 2y+z)$ w bazach $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1,2,0), b_2 = (1,1,1), b_3 = (0,0,1)\big)$, $\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,2), c_2 = (0,1)\big)$.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; Q = \underline{P_{\mathcal{B}_k^2 \to \mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

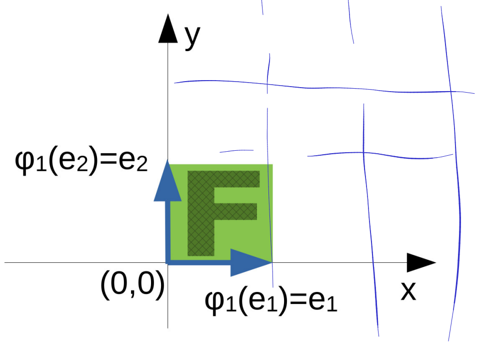
$$A' = Q^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{Q^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{A'}$$

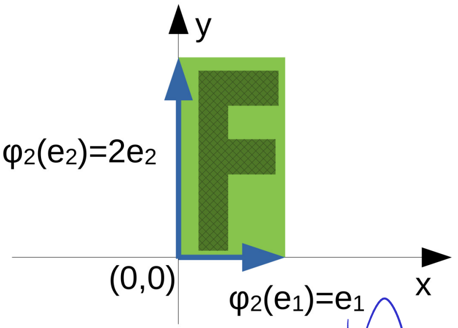
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liniowe

Przykład 7.5.2. Endomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}^2$

e_1 i

e_2 j

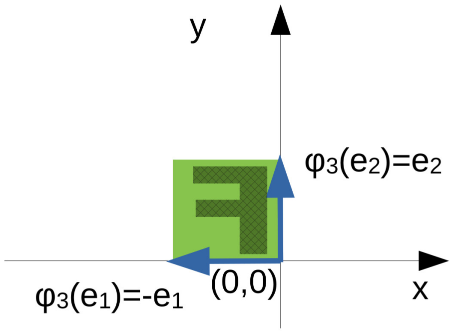


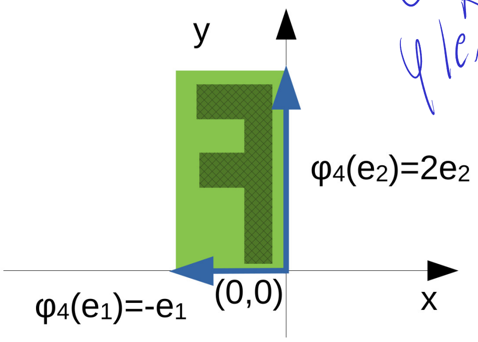


identyczność $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

rozciąganie $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$

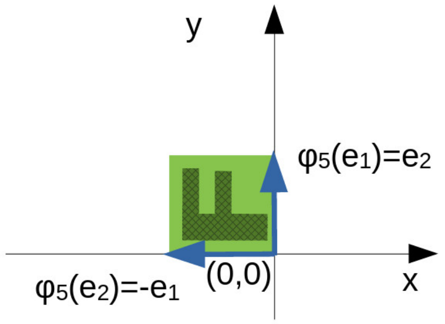
$\varphi(e_1)$ $\varphi(e_2)$

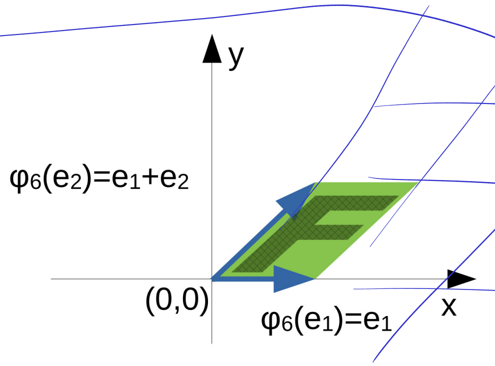




odbicie (symetria osiowa) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

rozciąganie i odbicie $\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$





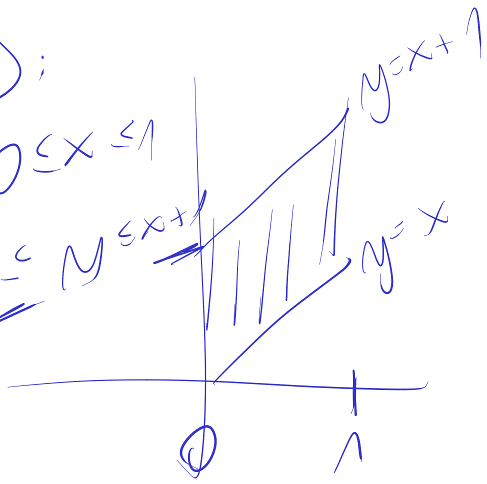
obrót (rotacja) o kąt $\frac{\pi}{2}$ $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

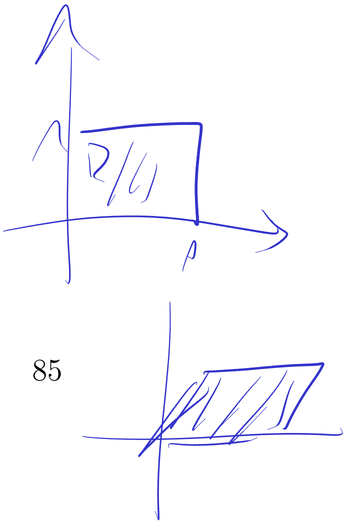
powinowactwo ścinające (ang. shear) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

D:

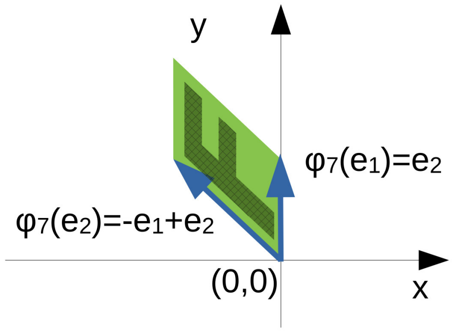
$0 \leq x \leq 1$

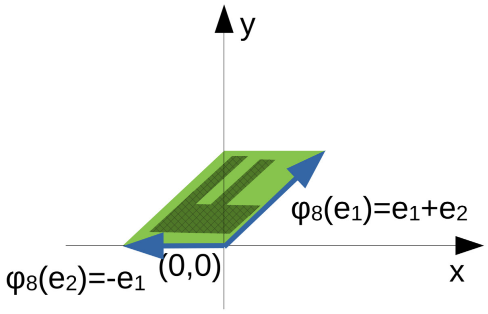
$x \leq y \leq x+1$



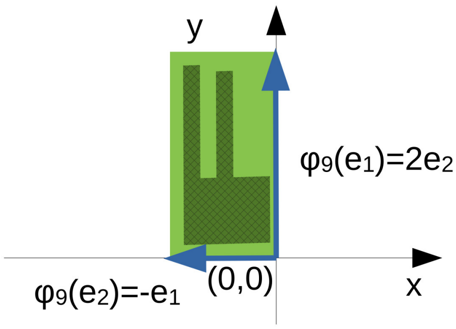


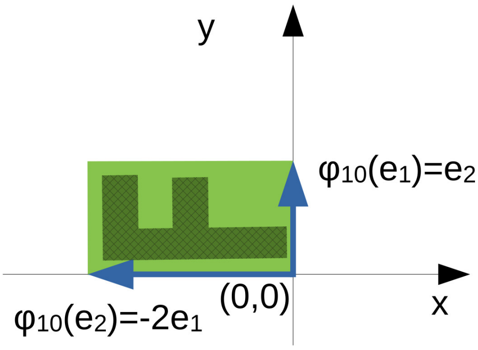
$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1\}$



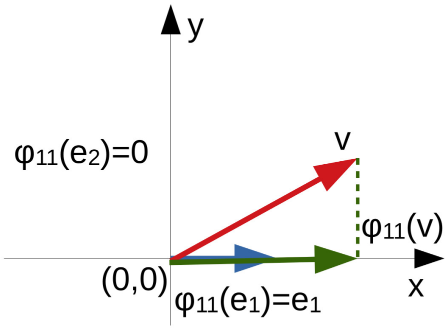


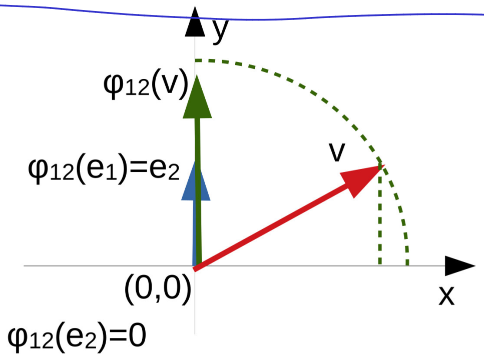
powinowactwo ścinające i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ rotacja i powinowactwo ścinające $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$





rotacja i rozciąganie $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ rozciąganie i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$





rzutowanie (projekcja) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ projekcja i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Podobnie
nie injekcja

Czym jest powinowactwo ścinające, dowiesz się tutaj.

7.6 Uwaga na temat rozwiązywania układów równan liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z K.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. , \quad a_{ij}, b_i \in K,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $\underline{\underline{AX = B}}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz współczynników — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

$A \sim \varphi_A$

Przy ustalonych bazach przestrzeni K^n, K^m macierz A jednoznacznie wyznacza odwzorowanie liniowe $\varphi_A : K^n \to K^m$. Rozwiązywanie układu jednorodnego $\underline{AX = \mathbf{0}}$ polega na wyznaczeniu jądra Kerφ_A odwzorowania φ_A.

Wniosek 7.6.1. Zbiór rozwiązań <u>jednorodnego</u> układu równań liniowych $AX = \mathbf{0}$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem K. Jej wymiar jest równy $n - r(A)$.

W szczególności wektor zerowy zawsze należy do zbioru rozwiązań układu jednorodnego. Ponadto suma rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązaniem tegoż układu jednorodnego.

Twierdzenie 7.6.2. Niech $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ będzie jednym z rozwiązań niesprzecznego <u>niejednorodnego</u> układu równań liniowych $AX = \underline{\underline{B}}$. Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań <u>układu $AX = B$</u> ma postać

$B \neq 0$

$$\Big\{ (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) : \ (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \text{ dowolne rozw. } AX = \mathbf{0} \Big\}.$$

Rozw. niejedn ^ rozw. jednor.

Przykład 7.6.3. Rozważmy raz jeszcze układ równań z przykładu 4.4.2.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u & = & 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u & = & 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u & = & 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u & = & 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u & = & -\frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Jak już wiemy, $r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ i jest to układ nieoznaczony, posiadający nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów. Rozwiązania są postaci

rozw. ukł.
jednor

$$\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$. Równoważnie

$(x, y, z, t, u) = (11-2y, y, -3+\frac{7}{3}t, t, 3-\frac{8}{3}t) = (11, 0, -3, 0, 3)+(-2, 1, 0, 0, 0)y+(0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})t.$

Dla $y = 0$ i $t = 0$ otrzymujemy $(11, 0, -3, 0, 3)$ jako jedno z rozwiązań rozważanego układu. Zbiór rozwiązań korespondującego układu jednorodnego jest przestrzenią liniową wymiaru 2, zaś układ wektorów $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3}\}$ jest bazą tej przestrzeni.

komb.
liniowa
el. bazy
przestrzeni
rozwiązań

dla $AX=0$

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 8
Data: ....

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

$\varphi : V \to V$

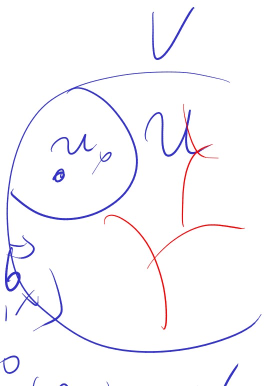
Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi*.

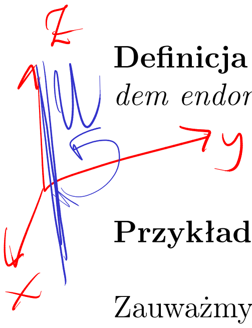
Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

$\vec{a} \perp \vec{b}$





Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko *φ-niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \; \varphi(u) \in U.$$

$\vec{a}$

$[x, y] \to [-y, x]$

$-xy + xy = 0$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

oś Oz

$\varphi : V \to V$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.
Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ-niezmiennicza.

2) Niech V, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \text{Ker}\varphi$

$\varphi(u_0) \in V$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem U jest φ-niezmiennicza.

$\varphi|_U \in End(U)$

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$,

$g = f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

$f(x) = \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \sin x \; ; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$V \ni v = [v_1, \ldots, v_{10}]$

czyli $\varphi|_U \in End(U)$. $V \supset U \quad \dim U = 5 \quad \varphi(v) \in U$

↑ [illegible]

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V. Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ wynika, że $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$, gdzie $A_1 \in M_k(K), A_2 \in M_{n-k}(k), B \in M_{k\times(n-k)}(K), 0 \in M_{(n-k)\times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \to U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in End(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. ☐

Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ. Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v, tj. $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$