Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 8
Data: ....

TEMAT: *Zagadnienie własne operatora liniowego*

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również *operatorami liniowymi.*

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2.

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemiennego.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy *niezmienniczą względem endomorfizmu* $\varphi \in End(V)$ lub krótko *φ-niezmienniczą*, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad tzn. \quad \forall u \in U \, \varphi(u) \in U.$$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : \, t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.
Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ-niezmiennicza.

2) Niech V, $\varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \mathrm{Ker}\varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.
Zatem U jest φ-niezmiennicza.

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ-niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U : U \to U$, czyli $\varphi|_U \in End(U)$.

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V. Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ wynika, że $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$, gdzie $A_1 \in M_k(K), A_2 \in M_{n-k}(k), B \in M_{k\times(n-k)}(K), 0 \in M_{(n-k)\times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \to U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in End(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

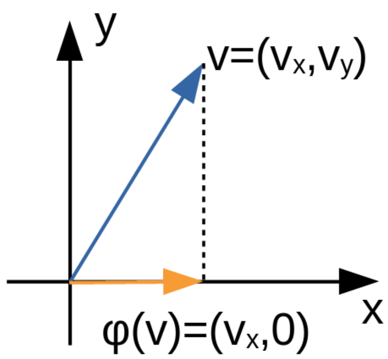
ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

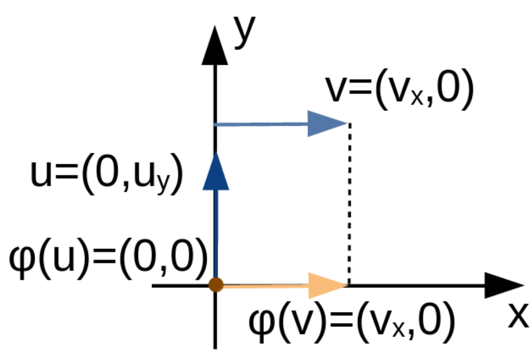
iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

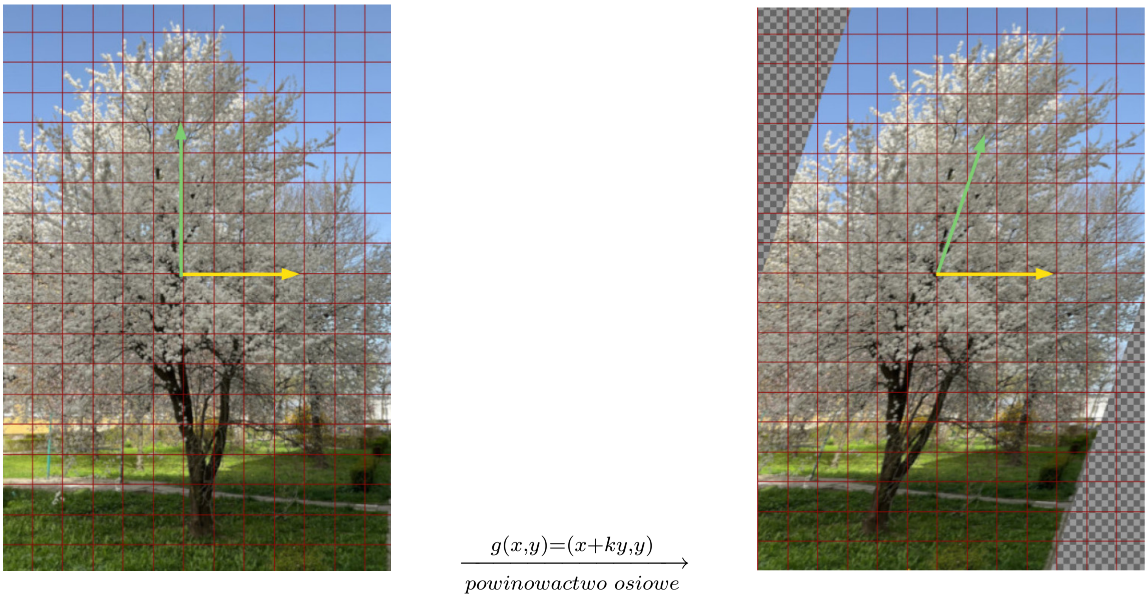
Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ. Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v, tj. $\varphi(v) \in \mathrm{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$





Przykład 8.1.7. Niech $g \in End(\mathbb{R}^2)$ to powinowactwo osiowe dane wzorem $g(x, y) = (x + ky, y)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ to ustalona stała.



W wyniku działania przekształcenia g zielony wektor zmienia kierunek, zaś złóty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym $g \in End(\mathbb{R}^2)$. Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej $\lambda = 1$.

Przykład 8.1.8. 1) Niech φ będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$. Dowolny wektor jest wektorem własnym φ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

2) Niech φ będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zatem $\varphi(x, y) = (-y, x)$. Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla φ.

3) Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

Wektory własne znajdują zastosowania na przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ.

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ, uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ-niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ, odpowiadającą wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i}, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.12. Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in K$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

Definicja 8.1.15. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ.

Uwaga 8.1.16. i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała K to wartości własne endomorfizmu φ.

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 8.1.17. i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in K[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A.

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy *wartością własną* macierzy A. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $Spec(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.18. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ (lub $\varphi \in End(\mathbb{C}^n)$) są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ (odpowiednio $A \in M_n(\mathbb{C})$), będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (odpowiednio $\mathbb{C}^n$).

Niech V będzie przestrzenią liniową n-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

Definicja 8.1.19. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ.

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ.

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi*. Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym*.

Twierdzenie 8.1.20. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V. Wówczas

i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$,

ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$.

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].
ii) Ponieważ $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, zatem
$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

Przykład 8.1.21. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste
$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 3y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}$$

METODA I:
Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(0, 0, 1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$
METODA II:
Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

METODA III:
Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy
$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2}. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $A \in M_n(K)$, $\lambda \in Spec(A)$ oraz niech $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\lambda^k \in Spec(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k.

ii) $c\cdot\lambda \in Spec(c\cdot A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c \cdot \lambda$.

iii) $p(\lambda) \in Spec\big(p(A)\big)$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$.

iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in Spec(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$.

v) $Spec(A) = Spec(A^T)$

vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin Spec(A)$.

Twierdzenie 8.1.23. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$, $Spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Wówczas

i) $\det(A) = \chi_A(0) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,

ii) Jeśli $\lambda \in Spec(A)$, ale wielomian charakterystyczny χ_A macierzy A ma współczynniki <u>rzeczywiste</u>, to $\overline{\lambda} \in Spec(A)$. Ponadto wektor $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$ taki, że $\overline{w_i} = v_i$ jest wektorem własnym odpowiadającym $\overline{\lambda}$.

iii) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

iv) $r(A)$ jest sumą krotności niezerowych wartości własnych.

8.2 Diagonalizacja

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

i) Jeśli φ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V.

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\dots(t-\lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ. Dokładniej mówiąc, $\varphi \in End(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele K (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$
Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ.

Uwaga 8.2.6. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że każdy operator liniowy na zespolonej przestrzeni liniowej ma wektory własne.

Macierz diagonalizująca

Definicja 8.2.7. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ *są podobne*, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Twierdzenie 8.2.8 (o niezmiennikach macierzy podobnych)**.** Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

i) $r(A) = r(B)$,

ii) $\det A = \det B$

iii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

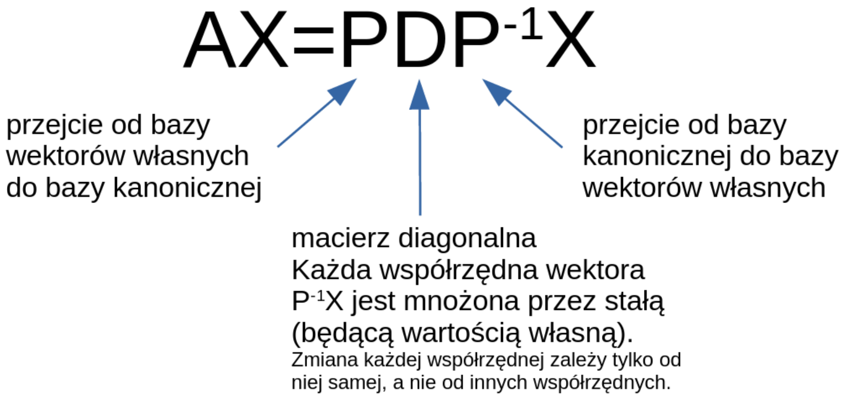
Jeżeli $\varphi \in End(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ zmiany bazy przestrzeni V.

Definicja 8.2.9. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *diagonalizowalną*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A.

Wniosek 8.2.10. Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A.

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Uwaga 8.2.11. Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną $\mathcal{B}$. Niech $\varphi \in End(V)$ będzie diagonalizowalny oraz niech $\mathcal{B}'$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych φ. Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$, $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B}_k \to \mathcal{B}'}$. Wówczas $A = PDP^{-1}$.



Przykład 8.2.12. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$
Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem
$Spec(A) = \varnothing$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.13. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5.$
Wielomian charakterystyczny to wielomian zespolony o współczynnikach rzeczywistych. Posiada zatem dwa sprzężone pierwiastki zespolone.
Mamy $\chi_A(t) = (t - \frac{3-\sqrt{11}i}{2})(t - \frac{3+\sqrt{11}i}{2})$. Macierz zespolona A jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.14. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,1,1) = (-1,-1,-1)$, $\varphi(0,1,1) = (0,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,0,2)$ jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne
$\lambda_1 = -1, v_1 = (1,1,1), \ \lambda_2 = 1, v_1 = (0,1,1), \quad \lambda_3 = 2, v_1 = (0,0,1).$
Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.15. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$\varphi(x,y,z) = (3x+8z, 3x-y+6z, -2x-5z)$ jest diagonalizowalny?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$
$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$
$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}$, $k_1 = 3$
$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : \ (A+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$
$$\dim E_{-1} = 3 - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3-1 = 2 \neq k_1 = 3.$$
Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

Przykład 8.2.16. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$
$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-$
$t)^2\big((1-t)^2-1\big) = (2-t)^2(t^2-2t) = -t(2-t)^3$
$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 3$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) :\ B + B^T = O\}$
Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ 2d & = 0 \end{cases}$$

Zatem $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) :\ B + B^T = 2B\}$
$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}$, $O_{2\times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$

$$(A - 2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c,\quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

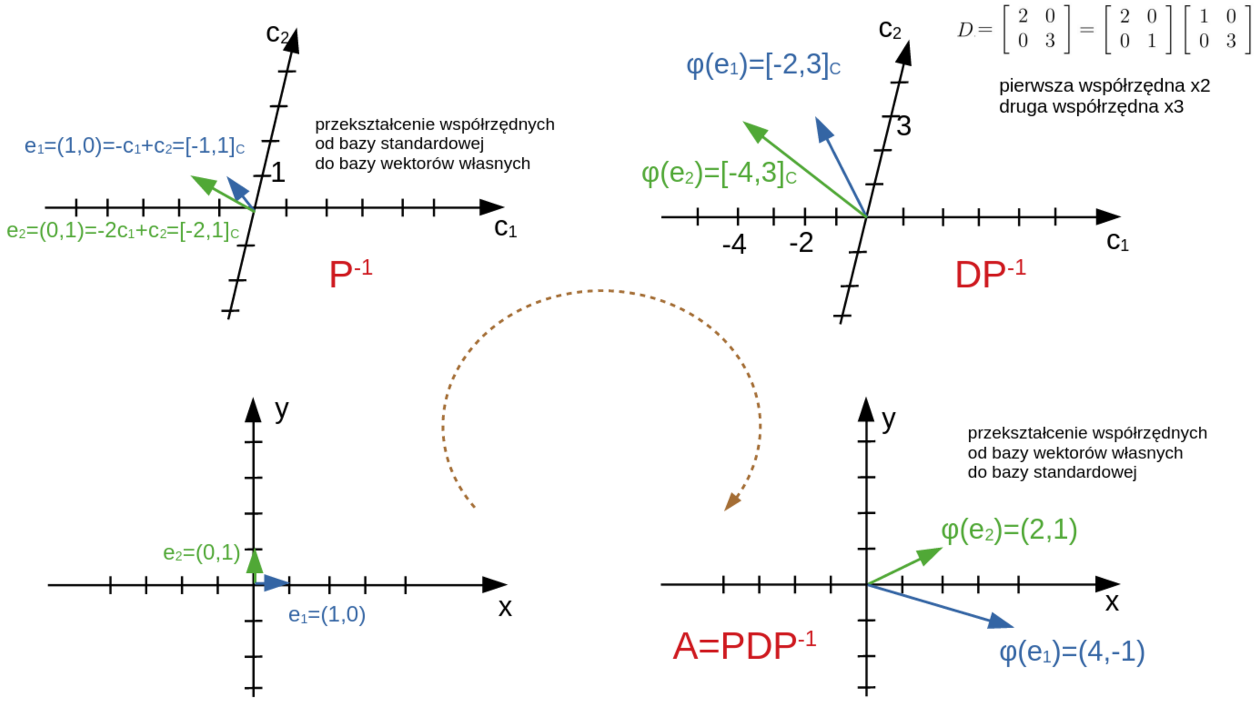
$E_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} :\ a, b, d \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$
Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 8.2.17. Rozważmy $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$.
Możemy wyliczyć $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.
Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.
Układ $\mathcal{C} = \big(v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1)\big)$ jest bazą wektorów własnych.
$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = P_{\mathcal{B}_k^2\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Obliczamy $P^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \ldots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = \big(v_1 \ldots, v_n\big)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(P^{-1}P)D\ldots(PP^{-1})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. $\square$

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P. Oblicz $\varphi^{101}(1,2,3)$.

$$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \varphi(x,y,z)=(4x-2y+2z,2x+2z,y+z-x)$$

$$A=M_\varphi(\mathcal{B}_k^3,\mathcal{B}_k^3)=\begin{bmatrix}4&-2&2\\2&0&2\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t)=\begin{vmatrix}4-t&-2&2\\2&-t&2\\-1&1&1-t\end{vmatrix}\overset{w_2+2w_3}{=}\begin{vmatrix}4-t&-2&2\\0&2-t&4-2t\\-1&1&1-t\end{vmatrix}\overset{k_3+k_2}{=}\begin{vmatrix}4-t&-2&0\\0&2-t&6-3t\\-1&1&2-t\end{vmatrix}\overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix}4-t&2-t&0\\0&2-t&6-3t\\-1&0&2-t\end{vmatrix}=(4-t)(2-t)^2-3(2-t)^2=(2-t)^2(1-t)$$

$Spec\varphi=\{\lambda_1=1,\lambda_2=2\},\quad k_1=1,\,k_2=2,\quad \dim E_1=1,\quad 1\le\dim E_2\le 2$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2=2=k_2$.

$$\dim E_2=3-r(A-2I)=3-r\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&-2&2\\-1&1&1\end{bmatrix}=3-1=2,$$

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1=1$.

$$(A-I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3&-2&2\\2&-1&2\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-2&2&0\\2&-1&2&0\\-1&1&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\3&-2&2&0\\2&-1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}x-y&=0\\y+2z&=0\end{cases}\Rightarrow x=y=-2z,z\in\mathbb{R}$$

$E_1=\{(-2z,-2z,z):\,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{lin}\{(-2,-2,1)\}$

Rozważmy $\lambda_2=2$.

$$(A-2I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$-x+y-z=0\Rightarrow z=y-x,\ x,y\in\mathbb{R}$

$E_2=\{(x,y,y-x):\,x,y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{lin}\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C}=\big(v_1=(-2,-2,1),v_2=(1,0,-1),v_3=(0,1,1)\big)$

$$D=M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\text{ macierz diagonalizująca } P:=P_{\mathcal{B}_k^3\to\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-2&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

Obliczymy $\varphi^{101}(1,2,3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D. Niech $v:=(1,2,3)=[a,b,c]_{\mathcal{C}}$.

Wówczas $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, skąd $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $v = [2,5,6]_{\mathcal{C}}$.

$D^{101} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$

$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}} = 2v_1 + 5 \cdot 2^{101} v_2 + 6 \cdot 2^{101} v_3 =$
$= (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$

METODA II: Obliczamy

$A^{101} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{101} - 2 & 2 - 2^{102} & 2^{102} - 2 \\ 2^{102} - 2 & 2 - 2^{101} & 2^{102} - 2 \\ 1 - 2^{101} & -1 + 2^{101} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5 \cdot 2^{101} \\ -4 - 6 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{101} \end{bmatrix}$

Relacje rekurencyjne

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 8.3.3. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zdefiniowanym następująco
i) $a_1 = r_1, a_2 = r_2, \ldots, a_k = r_k$, gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_k \in K$, $k \geq 1$.
ii) $a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k}$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in K$, $p_k \neq 0$, $n \geq k+1$.
Równanie ii) nazywamy *jednorodną liniową relacją rekurencyjną rzędu k*, zaś równania i) nazywamy *warunkami początkowymi rekurencji.*

Niech $X_n = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}]^T$. Wówczas powyższy układ równań można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_k} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{bmatrix},$$

czyli $X_n = A_k X_{n-1}$, dla $n \geq k+1$.

Zauważmy, że $X_n = A_k X_{n-1} = A_k^2 X_{n-2} = A_k^3 X_{n-3} = \ldots = A_k^{n-k} X_k$, czyli

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-k} \begin{bmatrix} r_k \\ r_{k-1} \\ r_{k-2} \\ \vdots \\ r_1 \end{bmatrix}.$$

OBSERWACJA: Aby znaleźć wzór ogólny a_n, należy wyznaczyć potęgę macierzy A_k. Jeśli A_k jest diagonalizowalna, możemy wykorzystać metodę z poprzedniego przykładu.

Przykład 8.3.4. Znajdziemy n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie $a_1 = 0, a_2 = 8$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

Otrzymujemy układ $\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diagonalizujemy macierz $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Obliczamy $\det(A_2 - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$.

$Spec(A_2) = \{-1, 3\}$ widmo proste, macierz diagonalizowalna

Wybieramy bazę wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = -1$.

$(A_2 + I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = (-1, 1)$

Rozważmy $\lambda_2 = 3$.

$(A_2 - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = (3, 1)$

Macierz diagonalizująca to $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Stąd

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1} \\ 2 \cdot (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

Zatem $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1}$.

8.4 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie 8.4.1 (Cayleya-Hamiltona)**.** Każda macierz kwadratowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Przykład 8.4.2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wiemy, że $\chi_A(t) = t^2 - 2t - 3$.

Na mocy powyższego twierdzenia $A^2 - 2A + 3I = \mathbf{0}$. Sprawdzimy to rachunkiem.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wniosek 8.4.3. Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Niech $\chi_A(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A.

i) Jeśli A jest odwracalna, to wówczas
$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(c_n A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \ldots + c_2 A + c_1 I)$

ii) $A^n = -\frac{1}{c_n}(c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I)$

iii) Dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia n można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$.

Przykład 8.4.4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy macierz odwrotną A^{-1}.
$\det A = -5 \neq 0$ macierz jest odwracalna
$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 4A - 5I = 0$
$A^{-1}(A^2 - 4A - 5I) = A - 4I - 5A^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I) = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$
$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Przykład 8.4.5. Dana jest macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy B^9.

Obliczamy $\chi_B(t) = \det(B - tI) = \begin{vmatrix} -t & 2 & 6 \\ 2 & -8-t & -26 \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix} \overset{w_1 - w_3, w_2 + w_3}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & -18-t \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix}$

$\overset{k_3 - 3k_2}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & 2t \\ -2 & 2 & 2-t \end{vmatrix} \overset{w_3 + w_1}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & 2t \\ -t & 2 & 0 \end{vmatrix} =$
$= (2-t)(6+t)t - 4t(2-t) = -t^3 + 4t.$
Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona $B^3 = 4B$, skąd
$B^9 = 4^3 B^3 = 4^4 B = 256 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$

Przykład 8.4.6. Dana jest macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy $C^5 + C^3$ oraz C^{50}.

Oznaczmy $p(t) = t^5 + t^3$. Obliczamy $\chi_C(t) = (1-t)^2$. Dzielimy wielomian p przez wielomian χ_C (na ogół z resztą). Zatem istnieją wielomiany q_1, r_1 takie że $p(t) = q_1(t)\chi_C(t) + r_1(t)$ oraz $\deg(r_1) < \deg(\chi_C)$. Wykonując dzielenie, otrzymujemy $q_1(t) = t^3 + 2t^2 + 4t + 6$, $r_1(t) =$

$8t-6$.

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona
$p(C)=\chi_C(C)q_1(C)+r_1(C)=r_1(C)=8C-6I=8\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\0&2\end{bmatrix}$.

Oznaczmy $w(t)=t^{50}$. Istnieją wielomiany q_2, r_2 takie że $w(t)=q_2(t)\chi_C(t)+r_2(t)$ oraz $\deg(r_2)<\deg(\chi_C)=2$. Oznaczmy $r_2(t)=at+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Różniczkując obustronnie otrzymujemy $w'(t)=q_2'(t)\chi_C(t)+q_2(t)\chi_C'(t)+r_2'(t)$. Do układu równań
$\left\{\begin{array}{rcl} t^{50} & = & q_2(t)(1-t)^2+at+b \\ 50t^{49} & = & q_2'(t)(1-t)^2-2q_2(t)(1-t)+a \end{array}\right.$ podstawiamy $t=1$.

Stąd $\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & a+b \\ 50 & = & a \end{array}\right.$. Zatem $r_2(t)=50t-49$ oraz $C^{50}=50C-49I=\begin{bmatrix}1&50\\0&1\end{bmatrix}$.