$V \ni v = [v_1, \ldots, v_{10}]$

czyli $\varphi|_U \in End(U)$. $V \supset U \quad \dim U = 5 \quad \varphi(v) \in U$

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V. Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ wynika, że $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$, gdzie $A_1 \in M_k(K)$, $A_2 \in M_{n-k}(k)$, $B \in M_{k\times(n-k)}(K)$, $0 \in M_{(n-k)\times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \to U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in End(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy *wartością własną* endomorfizmu φ, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$. Każdy taki wektor nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ.

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy *zagadnieniem własnym* dla endomorfizmu φ.

iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $Spec(\varphi)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tego operatora.

Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $\mathbf{0}_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq \mathbf{0}_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

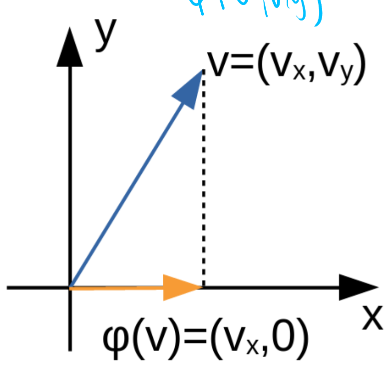
$\varphi(v) = \lambda_1 v$
$\varphi(v) = \lambda_2 v$

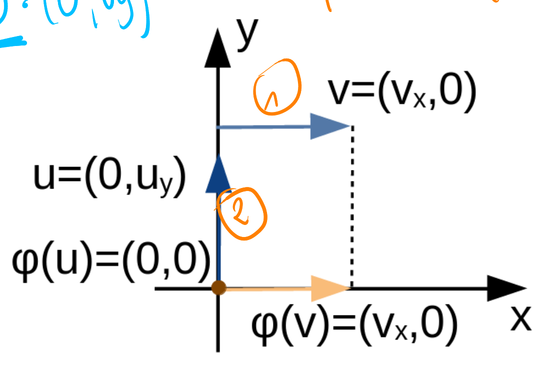
Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox. Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ. Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v, tj. $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:
1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = \mathbf{0}$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$

$\varphi(v) = \varphi(v_x, 0) = (v_x, 0)\cdot 1$

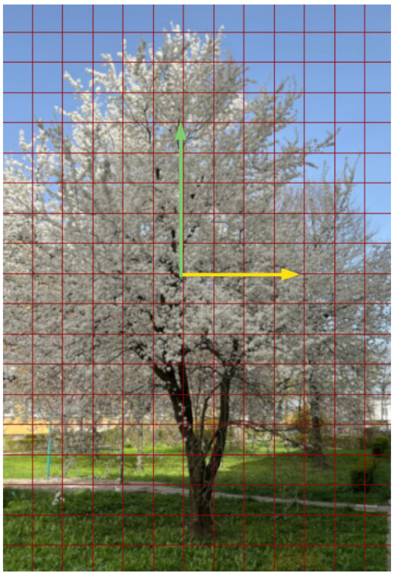
$\lambda = 1$

$\varphi(0, v_y) = (0,0) = 0 \cdot (0, v_y)$

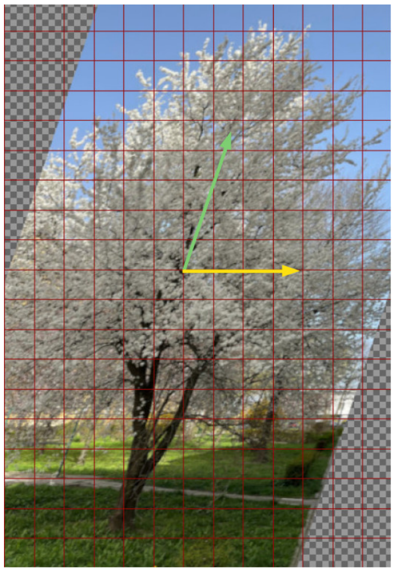




Przykład 8.1.7. Niech $g \in End(\mathbb{R}^2)$ to powinowactwo osiowe dane wzorem $g(x, y) = (x + ky, y)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ to ustalona stała.

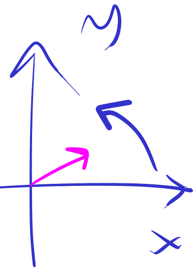


$$\xrightarrow[\textit{powinowactwo osiowe}]{g(x,y)=(x+ky,y)}$$



W wyniku działania przekształcenia g zielony wektor zmienia kierunek, zaś żłóty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym $g \in End(\mathbb{R}^2)$. Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej $\lambda = 1$.

Przykład 8.1.8. 1) Niech φ będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$. Dowolny wektor jest wektorem własnym φ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.



2) Niech φ będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zatem $\varphi(x, y) = (-y, x)$. Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla φ. Spec $\varphi = \emptyset$

gładkie

3) Niech $V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$. Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujmy
$g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Stąd $Spec(\varphi) = \mathbb{R}$.

Wektory własne znajdują zastosowania na przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu
Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczymy taką bazę przestrzeni liniowej V, że macierz endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ w tejże bazie będzie diagonalna.
Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ.

!

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ, uzupełniony o wektor zerowy! Zatem

bo z definicji wektor własny $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\varphi(v) = \lambda \cdot v$

$\varphi(v) - \lambda \cdot v = 0_V$

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

podprzestrzeń własna

Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ-niezmienniczą.

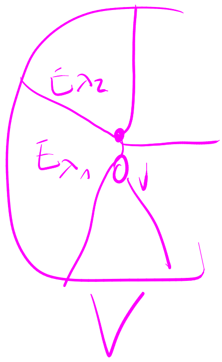
iii) $E_\lambda = \mathrm{Ker}\psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

$v - id(v)$

$(\varphi - \lambda \cdot id_V)(v) = 0_V$

ψ

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy *podprzestrzenią własną* endomorfizmu φ, odpowiadającą wartości własnej λ.



Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in End(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in End(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i}, gdzie $\lambda_i \in Spec(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.12. Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in K$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V. Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in Spec(\varphi)$

$Spec(\varphi) = ?$ znaleźć wartości własne?

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

$\varphi \in End(V)$ tzn. $\varphi : V \to V \Rightarrow M_\varphi = A$

kwadratowa

! iii) $\det(A - \lambda I) = 0$ *

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \ldots, x_n]_\mathcal{B}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ, odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

Tw. o rzędzie

$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\psi + \dim \mathrm{Im}\psi$

$\varphi(v) = \lambda v$

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$\psi(v) = 0$

$\dim \mathrm{Ker}\psi \geq 1$ $\Downarrow$ $r(A - \lambda I) < \dim V$

$\| \; r(A - \lambda I)$

układ nieoznaczony*

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V.

A, B – różne reprezentacje φ $\Rightarrow$ zbiór rozwiązań $\det(A - \lambda I) = 0$ jest taki sam jak zbiór rozwiązań $\det(B - \lambda I) = 0$

Definicja 8.1.15. *Wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V. Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* odwzorowania φ.

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0$

Uwaga 8.1.16. i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała K to wartości własne endomorfizmu φ. !

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V.

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. TAK SAMO DLA MACIERZY

Definicja 8.1.17. i) *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in K[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* macierzy A.

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy *wartością własną* macierzy A. Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $Spec(A)$ i nazywamy *widmem* bądź *spektrum* tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym wartości własnej λ.

Uwaga 8.1.18. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ (lub $\varphi \in End(\mathbb{C}^n)$) są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ (odpowiednio $A \in M_n(\mathbb{C})$), będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (odpowiednio $\mathbb{C}^n$).

Niech V będzie przestrzenią liniową n-wymiarową. Niech $\varphi \in End(V)$ oraz $\lambda \in Spec(\varphi)$.

Definicja 8.1.19. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy *krotnością algebraiczną* wartości własnej λ.

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy *krotnością geometryczną* wartości własnej λ.

$\dim E_\lambda$

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy *prostymi.* Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy *widmem prostym.*

wszystkie wartości własne są 1-krotne i jest ich tyle ile $\dim V$

Twierdzenie 8.1.20. Niech $\varphi \in End(V)$, $\lambda \in Spec(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V. Wówczas

i) $\boxed{1 \le \dim E_\lambda \le k_\lambda,}$!

$\lambda \in Spec(\varphi)$ tzn. $\exists\, v \neq 0_V : \varphi(v) = \lambda v$

$Ker(\varphi) = \{0, v, \ldots$

krotność geometryczna $\leq$ krotność algebraiczna

$\dim \operatorname{Ker} \varphi$ $\dim \operatorname{Im} \varphi$

ii) $\underbrace{\dim E_\lambda}_{\dim \operatorname{Ker}\varphi} = \dim V - \underbrace{\operatorname{rank}(A - \lambda I)}_{\dim \operatorname{Im}\varphi}$. tw. ogólne

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in Spec(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$. Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].
ii) Ponieważ $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, zatem
$\dim E_\lambda = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

Przykład 8.1.21. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

$Spec\,\varphi = ?$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

E_λ $\dim E_\lambda \leftarrow$ kr. geom. ?

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\varphi(u)$ $W(t) = 0$

$v = (x, y, z)$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1 - t & 2 & 0 \\ 0 & 2 - t & 0 \\ -2 & -2 & -1 - t \end{vmatrix} = (1 - t)(2 - t)(-1 - t)$$

$t = \lambda$ rozw.

krotność alg.

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ widmo proste

jednokrotne $1 \leq \dim E_{\lambda_1} \leq k_1$

$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$

$\varphi(v) = \lambda v$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t = -1$ $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 3y &= 0 \\ -2x - 2y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}$$

nieoznaczony bo dla $t = -1$ $\det(A + I) = 0$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$

METODA I:
Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(0, 0, 1)\}$ oraz $\dim E_{-1} = 1$
METODA II:
TW. ogólne
Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

METODA III:
Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy
$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1$, zatem $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2}. Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $A \in M_n(K)$, $\lambda \in Spec(A)$ oraz niech $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\lambda^k \in Spec(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k.

ii) $c \cdot \lambda \in Spec(c \cdot A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c \cdot \lambda$.

iii) $p(\lambda) \in Spec\big(p(A)\big)$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$.

iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in Spec(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$.

v) $Spec(A) = Spec(A^T)$

vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin Spec(A)$.

Twierdzenie 8.1.23. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$, $Spec(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Wówczas

i) $\det(A) = \chi_A(0) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,

ii) Jeśli $\lambda \in Spec(A)$, ale wielomian charakterystyczny χ_A macierzy A ma współczynniki rzeczywiste, to $\overline{\lambda} \in Spec(A)$. Ponadto wektor $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$ taki, że $\overline{w_i} = v_i$ jest wektorem własnym odpowiadającym $\overline{\lambda}$.

iii) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

suma elementów na przekątnej

iv) $r(A)$ jest sumą krotności niezerowych wartości własnych.

8.2 Diagonalizacja

$\dim V = n \rightarrow n$ liniowo niezal. wektorów (BAZA)

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$.

wybierz bazę ze zbioru wektorów własnych!

jednokrotne

i) Jeśli φ ma widmo proste $Spec(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \ldots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V.

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \ldots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie koniecznie odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tejże bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

diagonalna

$M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{B})$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$

$\varphi(v_1)$ w bazie $\mathcal{B}$

$\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 v_n = [\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0]$

iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

krotności algebr. an

$$\chi_\varphi = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\dots(t-\lambda_p)^{k_p},$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$) i ponadto $\boxed{k_i = \dim E_{\lambda_i}}$, dla $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

licząc z krotnościami pierwiastków jak $n = \dim$ ✓

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy *diagonalizowalnym*, gdy istnieje taka baza przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną.

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ. Dokładniej mówiąc, $\varphi \in End(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele K (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

kr. geom

kr. alg

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$\det(A - tI) = 0$

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$ $\Delta < 0$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ.

wartości własne to te pierwiastki χ_A które są w $K = \mathbb{R}$

Uwaga 8.2.6. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że każdy operator liniowy na zespolonej przestrzeni liniowej ma wektory własne.

INACZEJ

Macierz diagonalizująca

$A \rightsquigarrow D$

diagonalna

Definicja 8.2.7. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ *są podobne*, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $\boxed{A = C^{-1}BC.}$

Twierdzenie 8.2.8 (o niezmiennikach macierzy podobnych)**.** Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

i) $r(A) = r(B)$,

ii) $\det A = \det B$

iii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

$A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ $\quad P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$

$A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ $\quad \boxed{A' = P^{-1}AP}$

Jeżeli $\varphi \in End(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ zmiany bazy przestrzeni V.

$V \to V$ $P \neq Q$ $A' = D$ $D = P^{-1} A P$

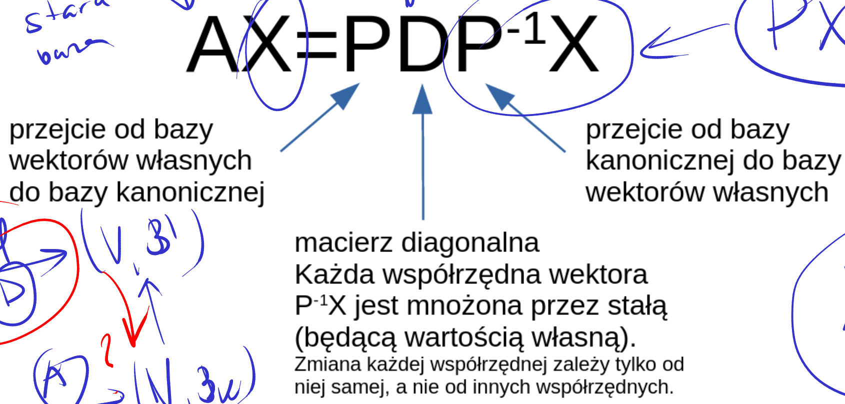
$\lambda = P$, $\mathcal{B}_k \to C$ baza wektorów własnych

Definicja 8.2.9. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy *diagonalizowalną*, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $D = P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P *diagonalizuje* macierz A.

Wniosek 8.2.10. Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A.

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Uwaga 8.2.11. Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną $\mathcal{B}$. Niech $\varphi \in End(V)$ będzie diagonalizowalny oraz niech $\mathcal{B}'$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych φ. Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$, $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B}_k \to \mathcal{B}'}$. Wówczas $A = PDP^{-1}$.



stara baza, nowa baza

$PX' = X$

X - współrzędne wektora w starej bazie

X' współrz. wektora w nowej bazie

$X' = P^{-1}X$

ok

Przykład 8.2.12. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 \neq 0.$ $\Delta < 0$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $Spec(A) = \varnothing$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

NIE

Przykład 8.2.13. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5.$

Wielomian charakterystyczny to wielomian zespolony o współczynnikach rzeczywistych. Posiada zatem dwa sprzężone pierwiastki zespolone.
Mamy $\chi_A(t) = (t - \frac{3-\sqrt{11}i}{2})(t - \frac{3+\sqrt{11}i}{2})$. Macierz zespolona A jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.14. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1,1,1) = (-1,-1,-1)$, $\varphi(0,1,1) = 1\cdot(0,1,1)$, $\varphi(0,0,1) = (0,0,2) = 2\cdot(0,0,1)$ jest diagonalizowalny?

baza $\mathbb{R}^3$

TAK

$\varphi(1,1,1) = -1\cdot(1,1,1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$Spec\{\lambda_1 = -1, \ v_1 = (1,1,1); \ \lambda_2 = 1, \ v_2 = (0,1,1); \ \lambda_3 = 2, \ v_3 = (0,0,1)\}$ widmo proste

Odczytujemy wartości własne i wektory własne
$\lambda_1 = -1, v_1 = (1,1,1),\ \ \lambda_2 = 1, v_1 = (0,1,1),\ \ \ \lambda_3 = 2, v_1 = (0,0,1)$.
Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.15. Czy $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$\varphi(x,y,z) = (3x+8z, 3x-y+6z, -2x-5z)$ jest diagonalizowalny?

$\varphi(i)\ \ \varphi(j)\ \ \varphi(k)$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}^3_k, \mathcal{B}^3_k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$\det(A - tI)$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$$

$t=-1 \quad A - tI = A + I$

$Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\},\ k_1 = 3$

$1 \leq \dim E_{\lambda_1} \leq k_1$

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x,y,z) : (A+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$\dim(\varphi - \lambda id)$

$1 \leq \dim E_{\lambda_1} \leq 3$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A+I) = 3 - r\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq k_1 = 3.$$

$\dim \mathbb{R}^3 - \dim Im(\varphi - \lambda id)$

Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

$Spec(f)$ $\quad k_i$ $\quad E_{\lambda_i}$ $\quad \dim E_{\lambda_i}$

Przykład 8.2.16. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [2,0,0,0]_{\mathcal{B}} = 2E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{21}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{21}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,1,1,0]_{\mathcal{B}}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

$f(E_{11})$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2((1-t)^2-1) = (2-t)^2(t^2-2t) = -t(2-t)^3$$

$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1, k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 3$

będzie diagonalizowalne gdy $\dim E_2 \overset{!}{=} 3$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$

$\lambda_1 = 0$

• $f(B) = 0 \cdot B$

Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ 2d & = 0 \end{cases}$$

Zatem $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

pierwszy element nowej bazy

$\lambda = 0$

• $f(B) = 2B$

$B + B^T = 2B$

$(f - 2 \cdot id)B = 0$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}$, $O_{2\times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$

jest nieoznaczony

$$(A - 2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$$E_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

dla $r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$

C_1

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

baza

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wiemy jak to wygląda

nie trzeba wyliczać

$D = P^{-1}AP$

dla

Przykład 8.2.17. Rozważmy $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$.
Możemy wyliczyć $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.
Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.
Układ $\mathcal{C} = (v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1))$ jest bazą wektorów własnych.

diagonalni

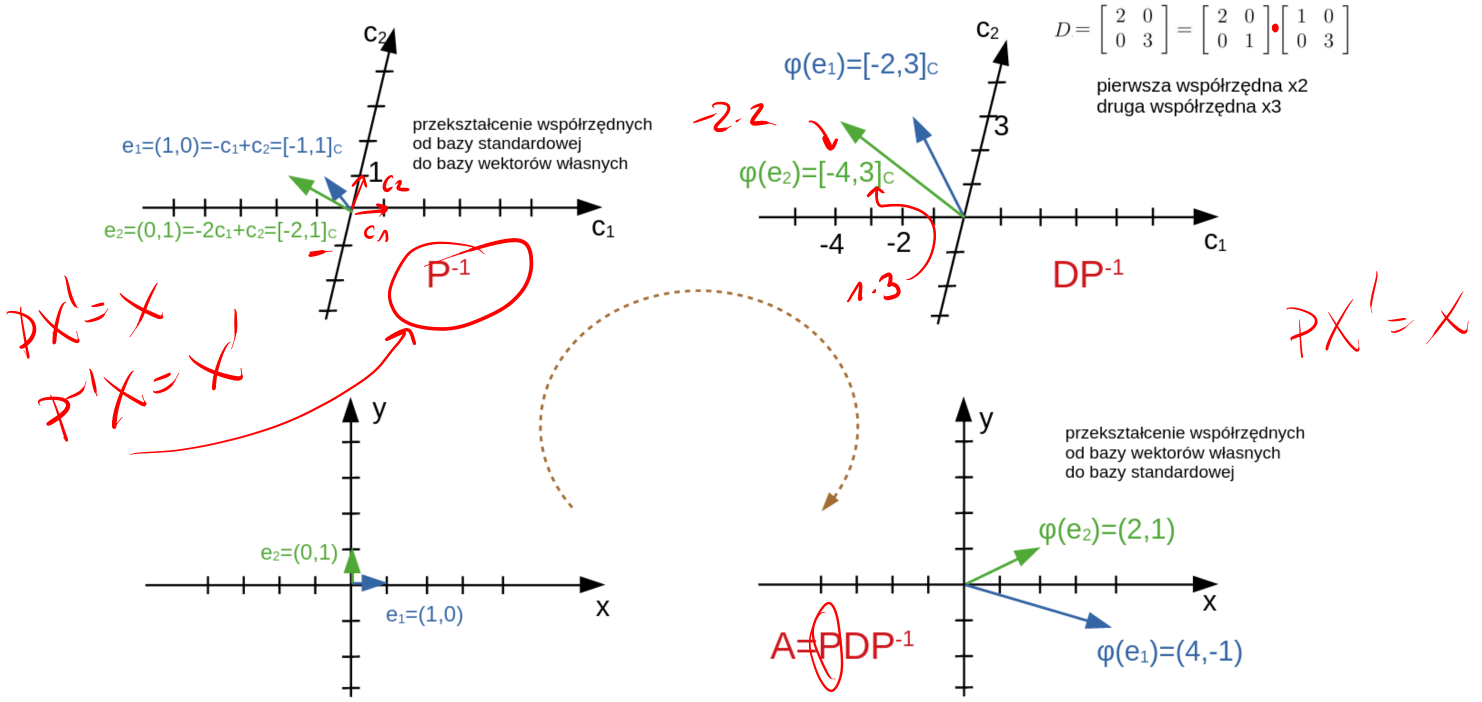
$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ P = P_{\mathcal{B}_k^2\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$D = P^{-1}AP$

Obliczamy $P^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \dots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = \big(v_1 \dots, v_n\big)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{B})$, $D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C},\mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(P^{-1}P)D\dots(PP^{-1})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. $\square$

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i