Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 9
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

9.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.1. Funkcję $s : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym (iloczynem wewnętrznym)*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$,

ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$.

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

Przykład 9.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w* $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że
$\forall u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle ., . \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$,
$\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ liczby ustalone

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.
Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Nie oznacza to jeszcze, że p jest wielomianem zerowym.

Niech $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Załóżmy, że $\langle p,p\rangle = 0$. Wówczas $p(x_0) = p(x_1) = \ldots = p(x_n) = 0$, skąd otrzymujemy $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wyznacznik główny W tego układu, to wyznacznik macierzy Vandermonde'a.
$W = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j - x_i) \neq 0$, bowiem $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, co oznacza, że p jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \langle .,.\rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 9.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0$,

iii) $\forall u, v \in V \quad \Big(s(u, v)\Big)^2 \le s(u, u) \cdot s(v, v)$ *nierówność Schwarza*

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.4. Funkcję $||.|| : V \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad ||v|| \ge 0 \quad \wedge \quad ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$,

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$,

iii) $\forall u, v \in V \quad ||u + v|| \le ||u|| + ||v||$. tzw. warunek trójkąta

Liczbę $||v|| \ge 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora* v. Parę $(V, ||.||)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną.*

Twierdzenie 9.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $||.||_s : V \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad ||v||_s = \sqrt{s(v, v)}$$

jest normą w przestrzeni V. Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny.*

Przykład 9.1.6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 9.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

9.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v.
Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{||v||}$ jest wersorem, bowiem $||\hat{v}|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1$.

Miara kąta między wektorami
W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy
$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle}\sqrt{\langle v, v \rangle} = ||u|| \cdot ||v|| \;\Rightarrow\; \frac{|\langle u,v \rangle|}{||u||\cdot||v||} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{||u||\cdot||v||} \leq 1.$
Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u,v \rangle}{||u||\cdot||v||}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α. Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos\measuredangle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}, \quad \measuredangle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 9.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle ., . \rangle)$, gdzie $\langle p, q \rangle = p(0)q(0)+ p(1)q(1)$. Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$\langle u, v \rangle = u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18$
$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$
$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{18}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}}$

Definicja 9.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \ldots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad i \neq j \;\Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Uwaga 9.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

Przykład 9.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R}),\langle .,.\rangle)$, gdzie $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdzimy, czy wektory $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x dx = \big[-\frac{1}{4}\cos 2x\big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\big(-1-(-1)\big)=0$
$\langle f,f\rangle = ||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \big[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$
Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

Twierdzenie 9.2.5 (Pitagorasa)**.** Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u,v\in V \quad u\perp v \Leftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2.$$

Dowód. $||u+v||^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \stackrel{\langle u,v\rangle=0}{=} ||u||^2+||v||^2$ □

Twierdzenie 9.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 9.2.7.

i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 9.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Przykład 9.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$
baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = \big(\hat{i}=(1,0,0),\hat{j}=(0,1,0),\hat{k}=(0,0,1)\big)$
Dla dowolnego wektora $v=(v_x,v_y,v_z)$ mamy $v_x = v\circ\hat{i}$, $v_y = v\circ\hat{j}$, $v_z = v\circ\hat{k}$.
Z dokładnością do znaku skalary v_x,v_y,v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox,Oy,Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x\cdot\hat{i}, v_y\cdot\hat{j}, v_z\cdot\hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox,Oy,Oz odpowiednio.

Twierdzenie 9.2.10. Niech $\mathcal{B}=\big(b_1,b_2,\ldots,b_n\big)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V,\langle .,.\rangle)$. Niech $v\in V$, $v=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v,b_i\rangle}{||b_i||^2}.$$

Ponadto

$$\forall u,w\in V \quad \langle u,w\rangle = \frac{\langle u,b_1\rangle\langle w,b_1\rangle}{||b_1||^2} + \frac{\langle u,b_2\rangle\langle w,b_2\rangle}{||b_2||^2} + \ldots \frac{\langle u,b_n\rangle\langle w,b_n\rangle}{||b_n||^2}.$$

Wniosek 9.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \ldots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 9.2.10 przyjąć $||b_i|| = 1$. $\square$

Wniosek 9.2.12. Niech $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \ldots + \alpha_n \beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i^n \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$. $\square$

9.3 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.1. Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \ldots b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \ldots c_m\} \subset V$ taki, że $\mathrm{lin}\{b_1, \ldots b_m\} = \mathrm{lin}\{c_1, \ldots c_m\}$.

Wniosek 9.3.2. i) Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 9.3.3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$, tj. $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dana jest baza $\mathcal{B} = \big(b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4)\big)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B}$.

Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$. Wówczas oczywiście $\mathrm{lin}\{c_1\} = \mathrm{lin}\{b_1\}$.

II KROK: Aby zagwarantować, że $\mathrm{lin}\{c_1, c_2\} = \mathrm{lin}\{b_1, b_2\}$, poszukujemy c_2 w postaci $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzemy α w taki sposób, by $c_2 \circ c_1 = 0$.
Obliczamy $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1)$.
Aby $c_2 \circ c_1 = 0$, wystarczy przyjąć $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$.
W naszym przykładzie $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_2 \circ c_1) = (5, 5, 1) \circ (1, -2, 0) + \alpha \cdot (1, -2, 0) \circ$

$(1,-2,0) = -5+5\alpha$, skąd $\alpha = 1$. Zatem $c_2 = b_2 + c_1 = (6,3,1)$.

III KROK: Aby zagwarantować, że $\mathrm{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathrm{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$, poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzemy β_1, β_2 w taki sposób, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.
Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2$, skąd $\beta_1 = -\frac{b_3 \circ c_1}{||c_1||^2}$. Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2$, skąd $\beta_2 = -\frac{b_3 \circ c_2}{||c_2||^2}$.

W naszym przykładzie $\begin{cases} 0 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (5,4,4) \circ (1,-2,0) + \beta_1 (1+4+0) = -3 + 5\beta_1 \\ 0 = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (5,4,4) \circ (6,3,1) + \beta_2 (36+9+1) = 46 + 46\beta_2 \end{cases}$.
Skąd $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = -1$.
Zatem $c_3 = b_3 + \frac{3}{5} c_1 - c_2 = (5,4,4) + \frac{3}{5}(1,-2,0) - (6,3,1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)$.
$\mathcal{C} = \big(c_1 = (1,-2,0), c_2 = (6,3,1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\big)$ jest bazą ortogonalną.

Ponieważ $||c_1|| = \sqrt{5}$, $||c_2|| = \sqrt{46}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$, zatem bazą ortonormalną jest
$\mathcal{C}' = \Big(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1,-2,0), c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot (6,3,1), c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \sqrt{\frac{5}{46}} \cdot (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\Big)$.

Wniosek 9.3.4. Jeśli $\mathcal{B} = \Big(b_1, b_2, \ldots, b_n\Big)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle .,. \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = \big(c_1, c_2, \ldots, c_n\big)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \qquad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 \qquad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{||c_2||^2} c_2 \quad \ldots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{||c_i||^2} c_i$$

Przykład 9.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = \big(1, x, x^2\big)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.
Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1+1+1) = 3\alpha$.
Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3+\beta_1 c_1+\beta_2 c_2)\circ c_1 = b_3\circ c_1+\beta_1(c_1\circ c_1)+\beta_2(c_2\circ c_1) = b_3\circ c_1+\beta_1||c_1||^2 = (1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1)+\beta_1\cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.
Analogicznie $0 = c_3\circ c_2 = (b_3+\beta_1 c_1+\beta_2 c_2)\circ c_2 = b_3\circ c_2+\beta_1(c_1\circ c_2)+\beta_2(c_2\circ c_2) = b_3\circ c_2+\beta_2||c_2||^2 = (1\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1)+\beta_2\cdot((-1)^2+0^2+1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.
Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.
$\mathcal{C} = \left(c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3}\right)$ jest bazą ortogonalną.

$||c_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $||c_2|| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Bazą ortonormalną jest układ wektorów
$\mathcal{C}' = \left(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2-\frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.6. Niech $u_1,\ldots,u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1,\ldots,u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Przykład 9.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1,-2,0), b_2 = (5,5,1), b_3 = (5,4,4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.
Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1\circ b_2 = 5-10+0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 5 & 5 \\ & & & -2 & 5 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \qquad A\cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A\cdot A^T|A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+\frac{3}{5}w_1]{w_2+w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array}\right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1,-2,0), c_2 = (6,3,1), c_3 = (-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},3)$.
Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha\cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $||c_1||^2, ||c_2||^2, ||c_3||^2$.
Zatem $||c_1|| = \sqrt{5}, ||c_2|| = \sqrt{46}, ||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

9.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 9.4.1. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \ \langle v, x\rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru* S w przestrzeni euklidesowej V. Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora* $x \in V$.

Twierdzenie 9.4.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrznią liniową.

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

Przykład 9.4.3. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : \ x, y, t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 9.4.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni* U i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 9.4.5. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $\langle w, b_i\rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U, u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_\mathcal{B}$ mamy $\langle w, u\rangle = \alpha_1\langle w, b_1\rangle + \ldots + \alpha_n\langle w, b_n\rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 9.4.6. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \mathrm{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$
$\langle w, 1\rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x\big|_0^1 = 0$
$\langle w, x\rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2\big|_0^1 = 0$ Zatem $w \perp U$.

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 9.4.7. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^{\perp} \subset U_1^{\perp}$,

ii) $U^{\perp} = (\mathrm{lin}U)^{\perp}$,

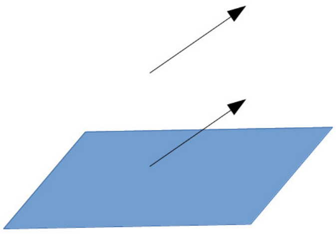
iii) $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$.

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 9.4.8. Operator liniowy $\pi \in End(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V \ \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad v - u \perp U,$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U. Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U.



Twierdzenie 9.4.9 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego)**.** Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U.

i) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U, wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \langle v, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k\rangle \end{bmatrix}. \tag{1}$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U, wówczas

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2} b_2 + \ldots + \frac{\langle v, b_k\rangle}{||b_k||^2} b_k.$$

iii) Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U, wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \ldots + \langle v, b_k\rangle b_k.$$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów $\big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$.

Wniosek 9.4.10. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_k\big)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni U, zaś $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy $\mathcal{B}$. Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U.

Przykład 9.4.11. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \mathrm{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U, bowiem $r\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2.$

METODA I
$u := \pi_U(v) =?,\quad w := v - u \perp U \;\Leftrightarrow\; w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$
$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas
$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$

Otrzymujemy układ dwóch równań
$0 = \langle w, b_1\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha,$
$0 = \langle w, b_2\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta.$
Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz
$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \big(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\big) - \big(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\big) = \big(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\big)$

METODA II
Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.
Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 9.2.10 mamy
$u = \Big[\frac{\langle u, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle u, b_2\rangle}{||b_2||^2}\Big]$. Ale $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$, zatem $u = \Big[\frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2}\Big]$. Obliczamy
$\langle v, b_1\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4$, $\langle v, b_2\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1$ oraz $||b_1||^2 = 10$, $||b_2||^2 = 11$. Stąd $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}$.

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U. Normalizujemy bazę $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2'\}$, gdzie $b_1' = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,1,2), b_2' = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3,0)$. Niech $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}$. Macierzą projekcji jest $AA^T = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. Stąd $AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta

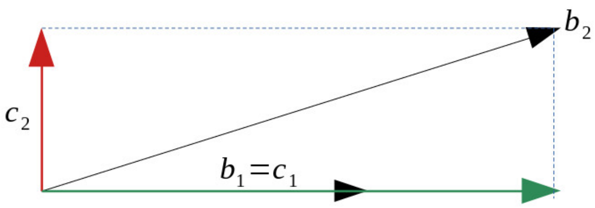
Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

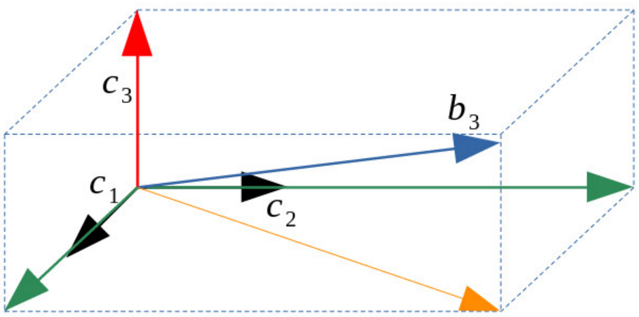
KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 = b_2 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_1)$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{||c_2||^2} c_2 = b_3 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\mathrm{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\mathrm{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



9.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 9.5.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmienić ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawią powyższe wielkości niezmienione.

Definicja 9.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $A^T A = A^T A = I_n$.

Przykład 9.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

Twierdzenie 9.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 9.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1.

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

iii) Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(AA^T) = (\det A)^2$. $\square$

Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, skończenie wymiarową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 9.5.6. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy

i) *ortogonalnym*, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną,

ii) *izometrią liniową*, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad ||\varphi(u) - \varphi(v)|| = ||u - v||.$$

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

Uwaga 9.5.7. Niech $\varphi \in End(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.

ii) $Spec(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

Twierdzenie 9.5.8. Niech $\varphi \in End(V)$. Następujące warunki są równoważne.

i) φ jest izometrią liniową.

ii) φ *zachowuje normę* tzn. $\forall v \in V \ ||\varphi(v)|| = ||v||$.

iii) φ *zachowuje iloczyn skalarny* tzn. $\forall u, v \in V \ \langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle$.

iv) φ jest operatorem ortogonalnym

Wniosek 9.5.9. Izometrie liniowe *zachowują kąty*, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α, to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α.

Przykład 9.5.10. Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznaczmy macierz A endomorfizmu φ w tejże bazie.
Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Uwaga 9.5.11. Jeśli rozpatrujemy niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$, to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

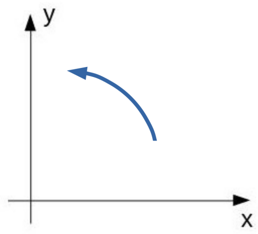
$\boxed{\mathbf{n = 1}}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest linowe, zatem $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$
φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.
Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

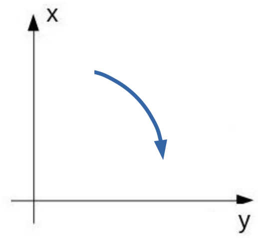
$\boxed{\mathbf{n = 2}}$

Orientacja płaszczyzny

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny (zorientowany dodatnio)*, a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny



układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podejście algebraiczne
Z założenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest linowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.
Z równości $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$
otrzymujemy układ równań $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$.
Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α,
że $a = \cos\alpha$ oraz $b = \sin\alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $ab + cd = 0$ mamy,

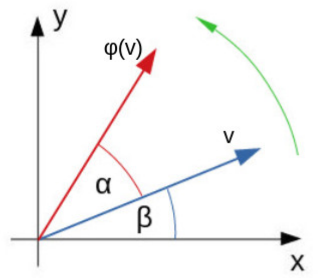
że $c = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ lub też $c = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \textit{lub} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r\cos\beta, r\sin\beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Mamy do czynienia z *rotacją (obrotem) o kąt* α wokół punktu $(0,0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.

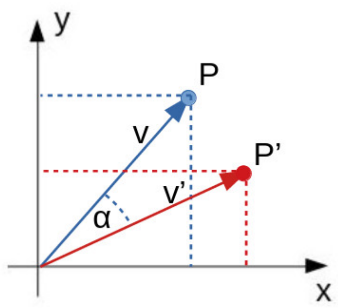


Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

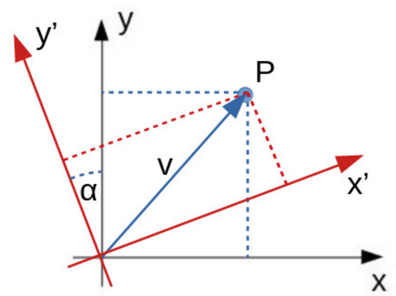
$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a-t)^2 + b^2$ i $Spec(A) = \varnothing$.
Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto *rotacja nie zmienia orientacji* układu współrzędnych.

Uwaga 9.5.12. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.

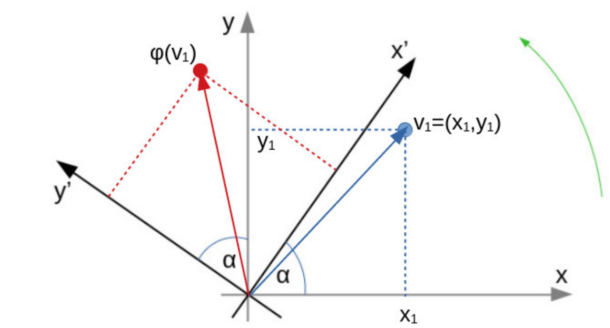


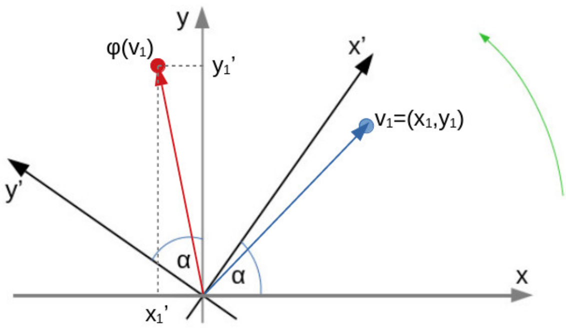
Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

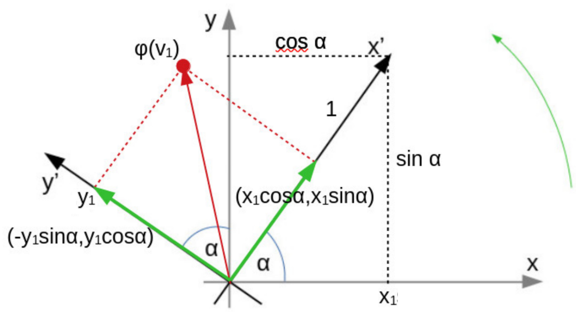
Współrzędne punktu P' w "starej bazie" (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w "nowej bazie" (rysunek po prawej).

<u>Podejście geometryczne</u>

Obrotem układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.







$$\varphi(v_1) = (x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)$$

Przykład 9.5.13.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ identyczność, tj. rotacja o kąt miary 0

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ rotacja o kąt miary $\frac{\pi}{2}$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ rotacja o kąt miary π

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ rotacja o kąt miary $\frac{3}{2}\pi$

Przykład 9.5.14. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

Ponieważ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$.

Przykład 9.5.15. Wyznaczymy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$, $y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')$. Wstawiając do równania $y = mx$, otrzymujemy $-x'+y' = m(x'+y')$. Zatem $(1-m)y' = (1+m)x'$. Równaniem prostej obróconej jest $(m+1)x + (m-1)y = 0$.

2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & -a-t \end{vmatrix} = -(a-t)(a+t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $Spec(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Mamy do czynienia z *symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej* $y = 0$. $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$. Jaka to prosta?

Podejście algebraiczne

Przypuśćmy, że l jest prostą o równaniu $y = \mathrm{tg}\beta \cdot x$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l, a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos\beta, \sin\beta)$, $b_2 = (-\sin\beta, \cos\beta)$. Istnieją skalary $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1b_1 + c_2b_2$. Obliczamy

$$v^T = c_1\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\cos\beta - c_2\sin\beta \\ c_1\sin\beta + c_2\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1b_1 - c_2b_2$.

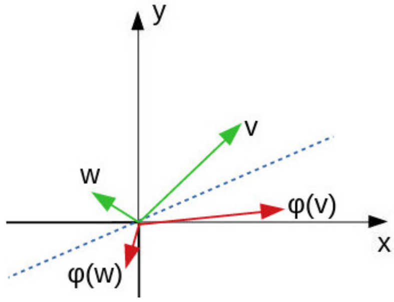
$$\varphi(v)^T = c_1\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} - c_2\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\cos\beta + c_2\sin\beta \\ c_1\sin\beta - c_2\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Stąd

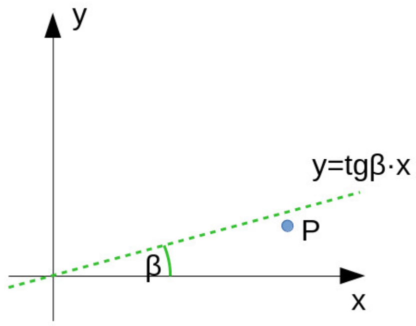
$$\varphi(v)^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} v^T =$$

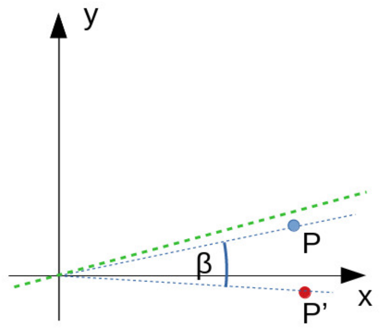
$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T$$

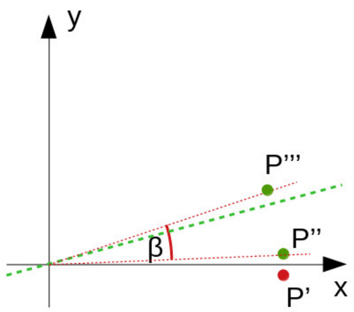
Czyli $\alpha = 2\beta$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $y = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot x$.

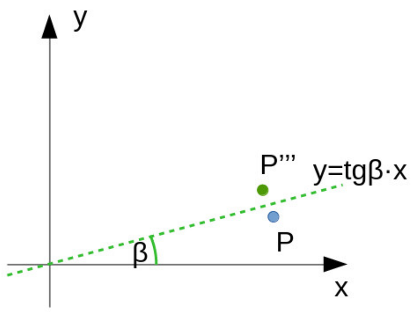


Podejście geometryczne









1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$.

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

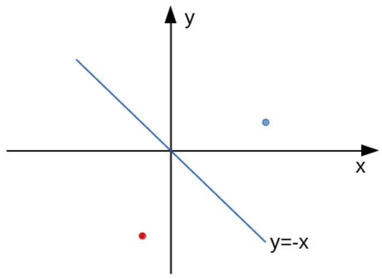
3) Obracamy punkt o kąt β. $\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

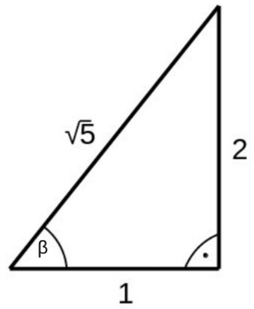
4) Otrzymujemy $\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}.$$

Wniosek 9.5.16. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0,0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 9.5.17. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y=-x$ jest macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.





Przykład 9.5.18. Wyznaczymy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y=2x$.

METODA I: Jeśli $\mathrm{tg}\beta = 2$, to wówczas $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y=0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.5.19. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obrotowi/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 9.5.20. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
Obliczając wyznacznik $\det A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y) spełniające równanie $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 3x + 4y & = & -5x \\ -4x + 3y & = & 5y \end{cases}$.

Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.

Uwaga 9.5.21. Symetria ortogonalna φ jest *inwolucją*, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ, to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

n – dowolne

Twierdzenie 9.5.22. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ macierz obrotu w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest macierzą ortogonalną o wyznaczniku równym 1. I odwrotnie, jeśli macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą ortogonalną o wyznaczniku równym 1, to A jest macierzą obrotu.

Istnieje zatem wzajemnie jednoznaczna korespondencja pomiędzy obrotami a macierzami ortogonalnymi o wyznaczniku równym 1.

Twierdzenie 9.5.23. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ zbiór macierzy ortogonalnych stopnia n o wyznaczniku równym 1 wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę. Grupę tę nazywamy *specjalną grupą ortogonalną* lub *grupą obrotów właściwych* i oznaczamy symbolem $SO(n)$.

Wniosek 9.5.24. Złożenie rotacji jest rotacją. Ponadto odwzorowanie odwrotne do rotacji jest rotacją.

Twierdzenie 9.5.25.

i) Grupa $SO(2)$ jest abelowa.

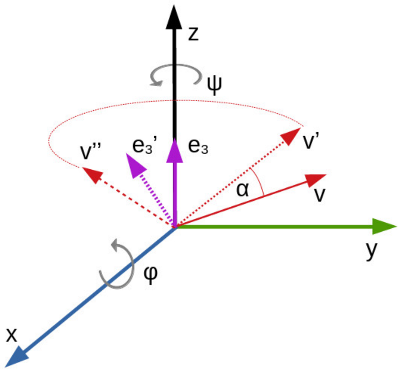
ii) Dla $n \geq 3$ grupy $SO(n)$ są nieprzemienne.

Przykład 9.5.26. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ponieważ $\det A = \det B = 1$, są to macierze obrotów. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.5.27. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących je macierzy (w pewnej ustalonej bazie). Oznacza to, że osie obrotu traktujemy jako *niezmienne*, z góry zadane. Przykładowo, jeśli $\varphi, \psi \in End(\mathbb{R}^3)$ to odpowiednio rotacja o kąt γ wokół prostej l i rotacja o kąt α wokół prostej k, zaś $A, B \in SO(3)$ to reprezentujące je macierze (w bazie kanonicznej $\mathcal{B}^3_k$), to wówczas AB reprezentuje złożenie $\varphi \circ \psi$. Dany punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ zostanie najpierw obrócony wokół osi k. Otrzymamy punkt P_0'. Kolejno P_0' zostanie obrócony wokół osi l (l nie została obrócona, pozostaje niezmienna). Otrzymamy punkt P_0''. Mnożąc $AB \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ wyznaczymy współrzędne punktu P_0'' w bazie $\mathcal{B}^3_k$.



k - oś Ox, l - oś Oz

Orientacja rzeczywistej przestrzeni wektorowej

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie różne uporządkowane bazy przestrzeni V. Każda baza wyznacza orientację przestrzeni V. Niech $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wyznaczają *tę samą orientację* lub są *zgodnie zorientowane*, jeśli $\det P > 0$. Gdy $\det P < 0$, bazy są *przeciwnie zorientowane*.

Własność posiadania tej samej orientacji jest relacją równoważności w zbiorze reprerów bazowych przestrzeni V. Istnieją dokładnie dwie klasy abstrakcji. Mówimy o *orientacji dodatniej i ujemnej*. Wybór orientacji polega na wyborze repera bazowego (jego klasy abstrakcji). Przyjmujemy, że baza kanoniczna $\mathbb{R}^n$ jest zorientowana dodatnio.

Definicja 9.5.28. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Mówimy, że automorfizm $\varphi \in Aut(V)$ *zachowuje orientację*, jeśli dla dowolnej bazy $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ przestrzeni V zorientowanej dodatnio (ujemnie), baza $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots, \varphi(b_n))$ również jest zorientowana dodatnio (ujemnie). W przeciwnym wypadku mówimy, że φ *odwraca orientację*.

Oznacza to w szczególności, że w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ układy prawoskrętne przechodzą na układy prawoskrętne. Łatwo zauważyć, że φ zachowuje orientację (odwraca orientację) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania φ ma *dodatni (ujemny) wyznacznik*.

Twierdzenie 9.5.29. Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową n wymiarową. Dla każdego operatora ortogonalnego $\varphi \in End(V)$ istnieje taka baza ortonormalna przestrzeni V, w której macierz operatora jest macierzą blokowo-diagonalną postaci

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & & & \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\alpha_r & -\sin\alpha_r & & \\ & & & \sin\alpha_r & \cos\alpha_r & & \\ & & & & & I_k & \\ & & & & & & -I_l \end{bmatrix}, \quad k + l + 2r = n.$$

Rotacje Givensa

Macierz ortogonalna postaci

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & k_i & & & k_j & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & c & & & s & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & -s & & & c & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

gdzie $c^2 + s^2 = 1$ reprezentuje rotację w płaszczyźnie Ox_ix_j w $\mathbb{R}^n$. Rotacje te nazywamy *rotacjami Givensa.*

$$P_{ij} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ cx_i + sx_j \\ \vdots \\ -sx_i + cx_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ w_i \\ \\ w_j \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Jeśli $x_i^2 + x_j^2 \neq 0$, to przyjmując $c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}$, $s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}$, otrzymujemy

$$P_{ij}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{x_i^2+x_j^2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_i \\ \\ w_j \\ \\ \\ \end{array}.$$

Zatem poprzez obrót w płaszczyźnie możemy *wyzerować wybrane współrzędne.*

Wniosek 9.5.30. Dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ i dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieje macierz $P \in O(n)$ taka, że $Px^T = ||x||e_i^T$, gdzie $P = P_{in}P_{i,n-1}\dots P_{i,i+1}P_{i,i-1}\dots P_{i2}P_{i1}$

Przykład 9.5.31 (Konstruowanie bazy ortonormalnej zawierającej dany wersor). Wykorzystując rotacje Givensa, skonstruujemy bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$, zawierającą wersor $x = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Obliczamy $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $P_{12}x^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Niech $w = (w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, 0, 1)$. Wówczas $\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2+w_3^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{w_3}{\sqrt{w_1^2+w_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oraz

$$P_{13}P_{12}x^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1^T.$$

Macierz $P = P_{13}P_{12}$ jest ortogonalna, zatem $x^T = P^{-1}e_1^T = P^Te_1^T = P_{12}^TP_{13}^Te_1^T$.

Kolumny macierzy $P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ tworzą bazę ortonormalną. W pierwszej kolumnie znajdują się współrzędne wektora x.

$\boxed{\mathbf{n = 3}}$

Wniosek 9.5.32. Dla każdego operatora ortogonalnego $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ istnieje taka baza ortonormalna przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz operatora jest macierzą postaci $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$, gdzie A jest reprezentacją macierzową izometrii liniowej płaszczyzny $\mathbb{R}^2$.

Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ będzie bazą ortonormalną taką, że $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$. Możliwe są następujące przypadki.

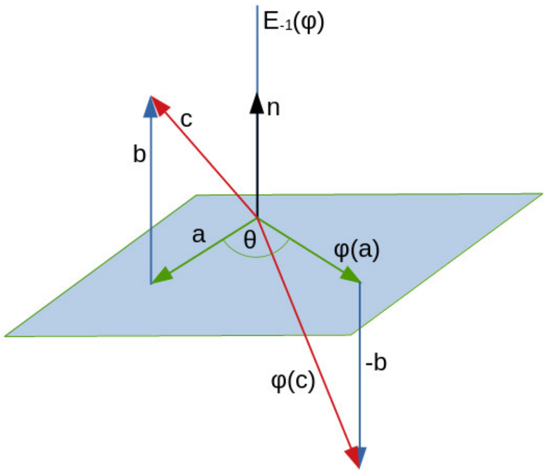
i) Jeśli $\varphi(b_3) = b_3$, zaś A jest macierzą rotacji, wówczas φ jest *obrotem wokół osi* Ob_3.

ii) Jeśli $\varphi(b_3) = b_3$, zaś A jest macierzą odbicia względem prostej l leżącej w płaszczyźnie Ob_1b_2, wówczas φ jest *odbiciem względem płaszczyzny* zawierającej b_3 i prostą l. W szczególności, gdy b_2 leży na prostej l wówczas $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i φ jest odbiciem względem płaszczyzny Ob_2b_3.

iii) Jeśli $\varphi(b_3) = -b_3$, zaś A jest macierzą rotacji na płaszczyźnie Ob_1b_2, wówczas φ jest *złożeniem obrotu wokół osi* Ob_3 *i odbicia względem płaszczyzny prostopadłej do osi* Ob_3.

iv) Jeśli $\varphi(b_3) = -b_3$, zaś A jest macierzą odbicia, wówczas można tak dobrać bazę, by macierz odwzorowania φ miała postać $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wówczas φ jest *obrotem o kąt* π *wokół osi* Ob_3.

Gdy $\det M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B}) > 0$, mamy do czynienia z obrotem, a gdy $\det M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B}) < 0$, mamy do czynienia z odbiciem lub złożeniem obrotu wokół prostej i odbicia względem płaszczyzny ortogonalnej do osi obrotu (kolejność składania nie ma znaczenia). Rozróżnienie między odbiciem a złożeniem obrotu i odbicia możliwe jest poprzez analizę wartości własnych φ (które nie zależą od wyboru bazy). Dla odbicia wartościami własnymi są $1, 1, -1$, zaś dla złożenia obrotu i odbicia wartości własne to $-1, -1, -1$ lub -1 jest jedyną rzeczywistą wartością własną.



Jeśli -1 jest jedyną rzeczywistą wartością własną, zaś n odpowiadającym jej wektorem własnym, wówczas $\varphi(n) = -n$. Ponadto dla dowolnego wektora u leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do n i przechodzącej przez początek układu współrzędnych wektor $\varphi(u)$ otrzymujemy poprzez obrót wektora u o kąt θ. Dowolny wektor c jest sumą wektora b równoległego do n i wektora a prostopadłego do n. Mamy $\varphi(c) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a) - b$.

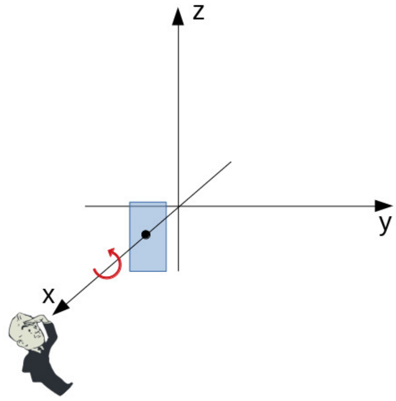
Odbicie φ jest inwolucją, tzn. $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ, to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

Jeśli $AA^T = I$, $\det A = 1$ oraz $A^2 = I$, to mamy do czynienia z rotacją o kąt π i macierz A jest symetryczna, tj. $A = A^T$.

Obroty podstawowe (elementarne) w $\mathbb{R}^3$

Zakładamy, że mamy do czynienia z układem prawoskrętnym. Rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny.

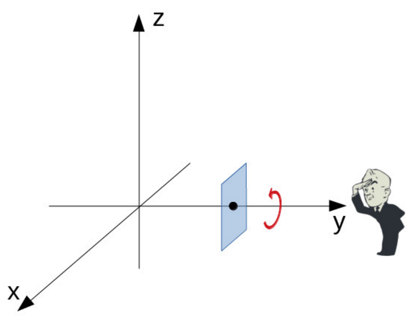
I. **Obrót o kąt α względem osi Ox (w płaszczyźnie Oyz)** jest reprezentowany przez macierz



$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

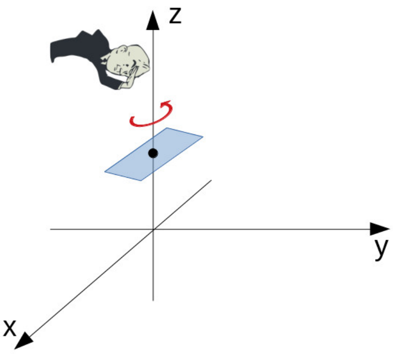
$$R_x(\alpha)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, R_x(\alpha)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, R_x(\alpha)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

II. **Obrót o kąt β względem osi Oy (w płaszczyźnie Oxz)** jest reprezentowany przez macierz



$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

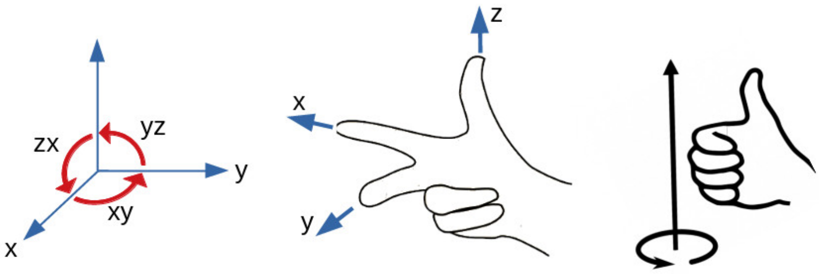
III. **Obrót o kąt γ względem osi Oz (w płaszczyźnie Oxy)** jest reprezentowany przez macierz



$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Powyższe trzy przykłady są przykładami *rotacji planarnej*, tj. endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będącego rotacją w pewnej płaszczyźnie $W \subset \mathbb{R}^n$ i pozostawiającego wektory należące do $W^\perp$ niezmienione.

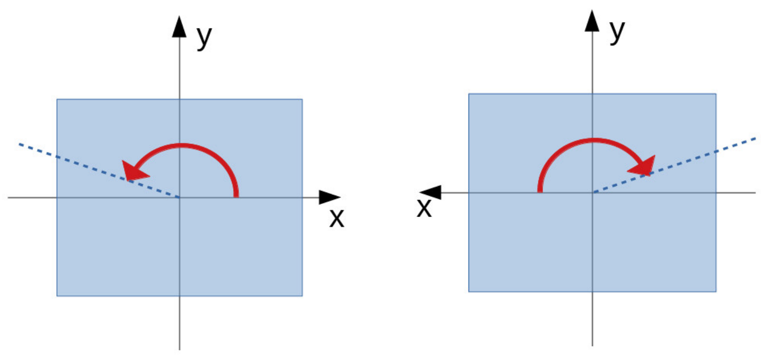
Uwaga 9.5.33. Odmienny układ znaków w macierzy $R_y(\beta)$ wynika z faktu, że obrót odbywa się w płaszczyźnie zgodnie z ruchem wskazówek zegara (widok przy osi obrotu skierowanej ku nam).



Obroty w $\mathbb{R}^3$ o dowolny kąt wokół dowolnej osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych

Symbolem $R_u(\alpha)$ będziemy oznaczać macierz rotacji w $\mathbb{R}^3$ wokół osi wyznaczonej przez wektor u o kąt α, stosując przy tym regułę prawej dłoni W szczególności

$$R_u(\alpha) = R_{-u}(-\alpha).$$



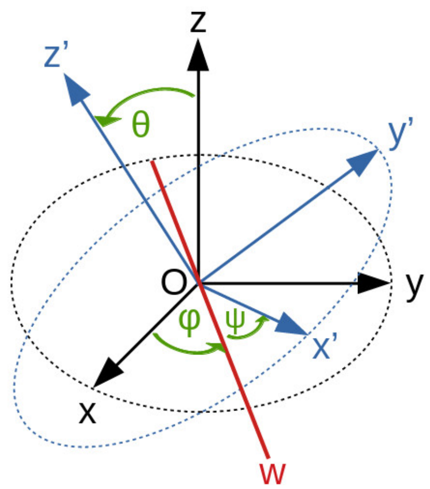
widok z dodatniej półosi Oz widok z ujemnej półosi Oz

Rotacja *nie zmienia orientacji* układu współrzędnych, a zatem *zachowuje iloczyn wektorowy*, tzn. długości i zwroty wektorów, jak również kąty między nimi pozostają niezmienione. Inaczej mówiąc, dla dowolnej rotacji φ i dla dowolnych wektorów v, w zachodzi

$$\varphi(v \times w) = \varphi(v) \times \varphi(w).$$

Kąty Eulera

Dowolnie zorientowany układ współrzędnych $Ox'y'z'$ można otrzymać z danego układu $Oxyz$ (o tej samej skrętności) przez złożenie trzech obrotów wokół osi układu.



PRZYPADEK I:
Obrót nie zachowuje zwrotu ani kierunku osi Oz (osie Oz i Oz' nie są równoległe).

Każdemu obrotowi układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$, nie zachowującemu zwrotu ani kierunku osi Oz, można wzajemnie jednoznacznie przypisać uporządkowaną trójkę kątów $(\varphi, \psi, \theta) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

Aby dokonać obrotu układu współrzędnych $Oxyz$ tak, by otrzymać nowy układ $Ox'y'z'$ postępujemy następująco:

i) Wyznaczamy prostą w prostopadłą do płaszczyzny Ozz' i przechodzącą przez punkt O. Prosta w jest nazywana *osią węzłów*.

ii) Rozpatrujemy kąty Eulera.

φ – kąt mierzony od osi Ox do osi węzłów w kierunku wyznaczonym osią Oz
θ – kąt mierzony od osi Oz do Oz' w kierunku wyznaczonym osią węzłów
ψ – kąt mierzony od osi węzłów do osi Ox' w kierunku wyznaczonym osią Oz'

iii) Wykonujemy w podanej kolejności trzy obroty.

1) Obracamy układ wokół osi Oz o kąt φ. Oś Ox staje się osią węzłów.
Istnieją dwa takie obroty o kąty różniące się o π, nadające osi Ox przeciwne zwroty. Wybieramy zwrot zgodny ze zwrotem iloczynu wektorowego wersorów osi Oz i Oz' (przyjmując go za zwrot osi węzłów).

2) Obracamy układ wokół osi węzłów (nowa oś Ox) o kąt θ. Oś Oz pokrywa się z osią Oz'. Zauważmy, że będzie to obrót o kąt z zakresu $(0, \pi)$.

3) Obracamy układ wokół osi Oz' o kąt ψ. Oś węzłów pokrywa się z osią Ox' , oś Oy pokrywa się z osią Oy'.

Macierz A rotacji będącej złożeniem trzech powyższych obrotów ma postać

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

PRZYPADEK II:
Osie Oz i Oz' są równoległe (identyczne lub o przeciwnych zwrotach).

Płaszczyzna Ozz' i linia węzłów nie są wówczas jednoznacznie określone. Możliwe jest przekształcenie osi Oz na oś Oz' poprzez obrót wokół dowolnej prostej przechodzącej przez punkt O i leżącej w płaszczyźnie $Oxy = Ox'y'$. Będzie to obrót o kąt 0 gdy osie są identyczne lub o kąt π, gdy mają przeciwny zwrot. Stąd $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$. Ponadto suma lub różnica kątów φ i ψ wyznacza jednoznacznie ustawienie osi Ox' oraz Oy'.

Uwaga 9.5.34. Niekiedy zachodzi potrzeba rozkładu danego obrotu na złożenie trzech obrotów podstawowych. Możliwe są inne trzykrotne złożenia, niż to przedstawione powyżej. Wybór najczęściej podyktowany jest zastosowaniami. Jeśli znamy macierz danego obrotu, możliwe jest odczytanie z niej kątów Eulera. Zobacz tutaj i tutaj.

Obliczanie osi i kąta obrotu na podstawie macierzy

Na mocy twierdzenia 3.1.14 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zachodzi równość $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Jeśli zatem P jest macierzą nieosobliwą stopnia n, to wówczas $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{tr}A$.

Twierdzenie 9.5.35. Dla dowolnego obrotu $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ liczba 1 jest wartością własną. Ponadto jeśli $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, to wówczas wektor własny odpowiadający wartości własnej 1 jest wektorem kierunkowym osi obrotu.

Przykład 9.5.36. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Niech
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie kanonicznej.
Jest to izometria liniowa, ponieważ macierz $A \in O(3)$. Istotnie

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I = A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy $\det A = 1$. Mamy zatem do czynienia z obrotem. Znajdziemy oś obrotu i kąt obrotu.

Oś obrotu

Wiemy, że 1 jest wartością własną φ.

$$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x=y=z$$

Zatem $E_1 = \mathrm{lin}\{(1,1,1)\}$ i osią obrotu jest prosta $x=y=z$.

Kąt obrotu

METODA I: Zauważmy, że $(1,1,1)\circ(x,y,z)=0$, gdy $x+y+z=0$. Zatem $\pi_1 : x+y+z = 0$ jest płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu. Ponadto jeśli $(1,1,1)\circ(x,y,z) = 0$, to $(1,1,1)\circ\varphi(x,y,z) = (1,1,1)\circ(z,x,y) = z+x+y = 0$. Zatem φ jest rotacją w płaszczyźnie π_1. Weźmy $w = (1,1,-2) \in \pi_1$. Obliczamy

$$\cos\measuredangle(w,\varphi(w)) = \frac{w\circ\varphi(w)}{|w|\cdot|\varphi(w)|} = \frac{(1,1,-2)\circ(-2,1,1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Zatem $\measuredangle(w,\varphi(w))$ ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $-\frac{2}{3}\pi$. A ponieważ $w\times\varphi(w) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3,3,3)$, więc mamy do czynienia z rotacją o kąt $\frac{2}{3}\pi$.

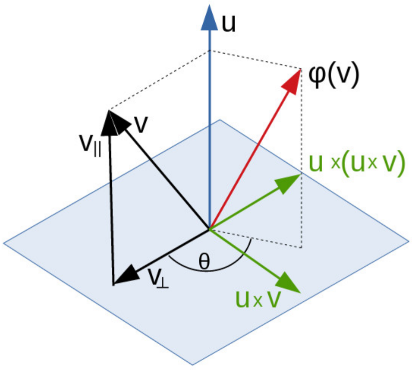
METODA II: A jest macierzą obrotu o pewien kąt α, zatem $\boxed{\mathrm{tr}A = 1+2\cos\alpha}$ (ponieważ ślad nie zależy od wyboru bazy). Obliczamy $\mathrm{tr}A = 0$, skąd $1+2\cos\alpha = 0$. Czyli $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ jak powyżej.

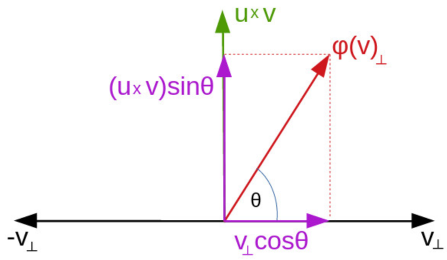
Uwaga 9.5.37. Dokonując obrotu zgodnie z regułą prawej dłoni, należy właściwe wybrać kąt, tak by odpowiadał wybranemu wersorowi osi obrotu. Jeśli u to wersor osi obrotu, zaś w dowolny wektor, to wektory $u, w\times\varphi(w)$ są równoległe. W szczególności pokrywają się (gdy mają ten sam zwrot) lub kąt między nimi ma miarę π radianów (gdy maja przeciwne zwroty). Aby rozstrzygnąć, z którym przypadkiem mamy do czynienia, możemy obliczyć iloczyn skalarny $u\circ(w\times\varphi(w))$. Wynik dodatni wskazuje ma kąt 0 (i obrót przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, tj. kąt dodatni), zaś wynik ujemny na kąt π (i obrót przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, tj. kąt ujemny). Obrót w płaszczyźnie zawierającej w i $\varphi(w)$ odbywa się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, jeśli patrzymy tak, że wektor $w\times\varphi(w)$ skierowany jest ku nam.

Jak znaleźć macierz rotacji, gdy dane są oś i kąt obrotu?

Twierdzenie 9.5.38 (**Formuła Rodriguesa dla rotacji**)**.** Niech v będzie dowolnym wektorem w $\mathbb{R}^3$, zaś u wersorem wskazującym oś obrotu φ o kąt θ (zgodnie z regułą prawej dłoni). Wówczas

$$\varphi(v) = v\cos\theta + (u \times v)\sin\theta + u(u \circ v)(1-\cos\theta).$$





Formułę Rodriguesa dla rotacji można również zapisać w postaci macierzowej. Niech $u = (u_x, u_y, u_z), v = (v_x, v_y, v_z)$. Wówczas

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x) \text{ oraz}$$

$$\begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy oznaczenie $S_u = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas $u \times v = S_u v^T$ oraz $u \times (u \times v) = S_u(S_u v^T) = S_u^2 v^T$.

Ponadto zauważmy, że $u(u \circ v) = (v \circ u)u = (vu^T)u = v(u^T u)$ oraz $u(u \circ v) = v - v_\perp = v + u \times (u \times v)$.

Zatem $\boxed{R_u(\theta) = I\cos\theta + S_u \sin\theta + u^T u(1-\cos\theta)}$ lub $\boxed{R_u(\theta) = I + S_u \sin\theta + S_u^2(1-\cos\theta).}$

Przykład 9.5.39. Niech $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ oraz $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Znajdziemy macierz $R_u(\theta)$.

Obliczamy $\cos\theta = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $uu^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

oraz $S_u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Stąd

$$R_u(\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nasz rachunek możemy sprawdzić tutaj.

Przykład 9.5.40. Macierz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

reprezentuje złożenie rotacji o kąt α względem osi Ox (w płaszczyźnie Oyz) z odbiciem względem płaszczyzny Oyz.