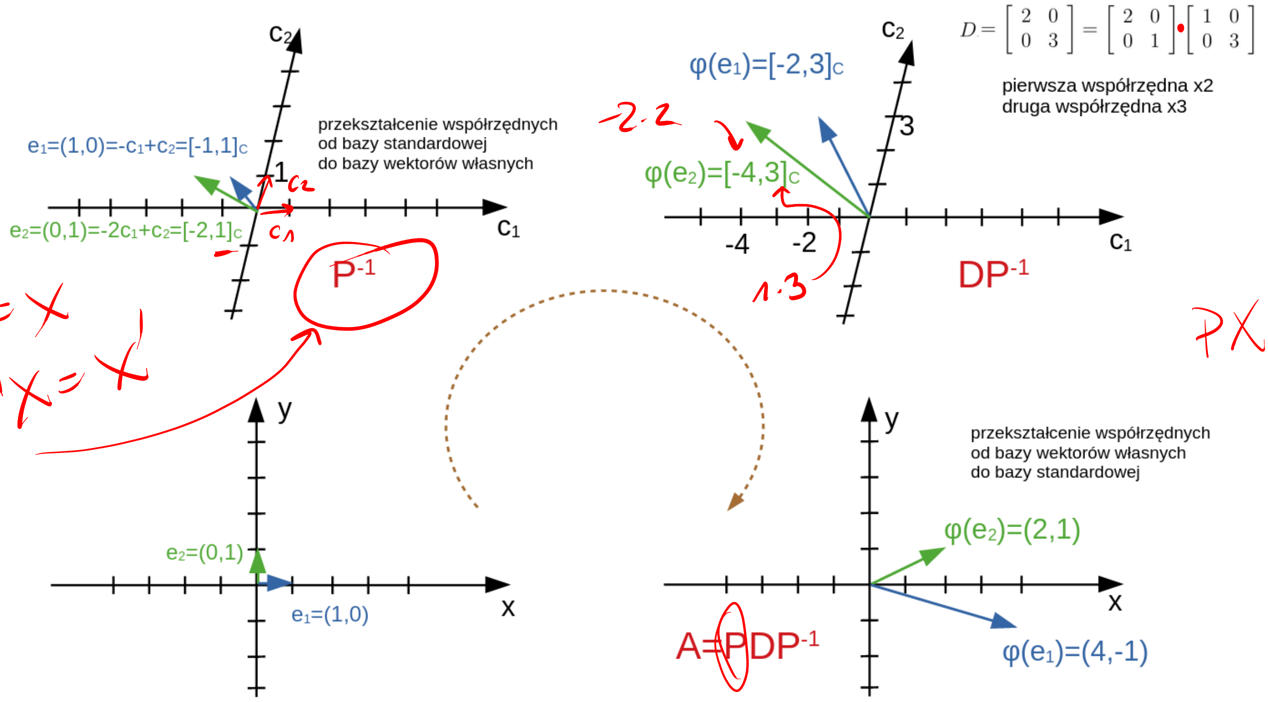
$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



$Px' = x$

$P^{-1}x = x'$

$Px' = x$

8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n-wymiarową oraz niech $\varphi \in End(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V. Jeśli wektory własne $v_1 \ldots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = (v_1 \ldots, v_n)$ przestrzeni V, to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$\mathcal{C}$ - baza wektorów wł

$M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$

do diagonalizacji

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = PD^rP^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\varphi^r - \varphi\circ\ldots\circ\varphi$ r-razy!

Dowód. Niech $\boxed{A = M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{B})}$, $\boxed{D = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})}$ oraz $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C},\mathcal{C})$. Ponadto $\boxed{D = P^{-1}AP}$, skąd $\boxed{A = PDP^{-1}}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{r-razy} = PD(\underbrace{P^{-1}P}_{I})D\ldots(\underbrace{PP^{-1}}_{I})DP^{-1} = PD^rP^{-1}$. $\square$

mnożenie macierzy jest łączne

$\boxed{A^r = PD^rP^{-1}}$

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i

$\varphi^r \sim A^r$

U nas $A' = D$

$\boxed{A' = P^{-1}AP}$

$PA' = AP$

$A = M_\varphi(\mathcal{B},\mathcal{B})$

$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$

$A' = M_\varphi(\mathcal{C},\mathcal{C})$

$PAD^{-1}=A$

wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P. Oblicz $\varphi^{101}(1,2,3)$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (4x-2y+2z, 2x+2z, y+z-x)$$

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{w_2+2w_3}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \overset{k_2+k_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = \boxed{(2-t)^2(1-t)}$$

$Spec\varphi = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\dim E_1 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 2$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

"=" ?

$$\dim E_2 = 3 - r(A-2I) = 3 - r\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

$\dim \mathbb{R}^3 - r(\varphi - 2\cdot id)$

zatem φ jest diagonalizowalny.

TAK jest diagonalizow.

Wyznaczymy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_1 = 1$

$$(A-I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = y = -2z, z \in \mathbb{R}}$$

c_1

$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2,-2,1)\}$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{-x+y-z=0} \Rightarrow z = y - x$, $x, y \in \mathbb{R}$ c_2 c_3

$E_2 = \{(x, y, y-x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = (v_1 = (-2,-2,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1))$

$$D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \to \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c_1 c_2 c_3

Obliczymy $\varphi^{101}(1,2,3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D. Niech $v := (1,2,3) = [a,b,c]_\mathcal{C}$.

$$\boxed{PX' = X}$$

$P^{-1}X = X'$

$P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

Wówczas $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, skąd $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$ oraz $v = [2,5,6]_{\mathcal{C}}$.

$\varphi^{101} \sim$

$$D^{101}\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{101} & 0\\ 0 & 0 & 2^{101}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\5\cdot 2^{101}\\6\cdot 2^{101}\end{bmatrix}$$

wynik w bazie C

$D = M_\varphi(C, C)$

$\varphi^{101}(v) = [2, 5\cdot 2^{101}, 6\cdot 2^{101}]_{\mathcal{C}} = 2c_1 + 5\cdot 2^{101}c_2 + 6\cdot 2^{101}c_3 =$
$= (-4 + 5\cdot 2^{101}, -4 - 6\cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$

METODA II: Obliczamy

$$A^{101}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = PD^{101}P^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{101} & 0\\ 0 & 0 & 2^{101}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}3\cdot 2^{101}-2 & 2-2^{102} & 2^{102}-2\\ 2^{102}-2 & 2-2^{101} & 2^{102}-2\\ 1-2^{101} & -1+2^{101} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+5\cdot 2^{101}\\ -4-6\cdot 2^{101}\\ 2+2^{101}\end{bmatrix}$$

Relacje rekurencyjne

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 8.3.3. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zdefiniowanym następująco
i) $a_1 = r_1, a_2 = r_2, \ldots, a_k = r_k$, gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_k \in K$, $k \geq 1$.
ii) $a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k}$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in K$, $p_k \neq 0$, $n \geq k+1$.
Równanie ii) nazywamy *jednorodną liniową relacją rekurencyjną rzędu k*, zaś równania i) nazywamy *warunkami początkowymi rekurencji.*

Niech $X_n = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}]^T$. Wówczas powyższy układ równań można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\\\vdots\\a_{n-k+1}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0\end{bmatrix}}_{A_k}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\\a_{n-3}\\\vdots\\a_{n-k}\end{bmatrix},$$

$a_{n-1} = a_{n-1}$
$a_{n-2} = a_{n-2}$

czyli $\boxed{X_n = A_k X_{n-1}}$, dla $n \geq k+1$.

$A_k \cdot A_k \cdot X_{n-2}$

Zauważmy, że $X_n = A_k X_{n-1} = A_k^2 X_{n-2} = A_k^3 X_{n-3} = \ldots = A_k^{n-k} X_k$, czyli

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-k} \begin{bmatrix} r_k \\ r_{k-1} \\ r_{k-2} \\ \vdots \\ r_1 \end{bmatrix}.$$

a_k ⋮ a_2 a_1 } dane!

OBSERWACJA: Aby znaleźć wzór ogólny a_n, należy wyznaczyć potęgę macierzy A_k. Jeśli A_k jest diagonalizowalna, możemy wykorzystać metodę z poprzedniego przykładu.

Przykład 8.3.4. Znajdziemy n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie $a_1 = 0, a_2 = 8$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

$n \geq 3$ $\quad k=2 \quad 2\times 2 \quad n-k$

Otrzymujemy układ $\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diagonalizujemy macierz $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Obliczamy $\det(A_2 - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$.

$Spec(A_2) = \{-1, 3\}$ widmo proste, macierz diagonalizowalna

Wybieramy bazę wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = -1$.

$(A_2 + I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = (-1, 1)$

Rozważmy $\lambda_2 = 3$.

$(A_2 - 3I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = (3, 1)$

Macierz diagonalizująca to $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Stąd $\quad D^{n-2} \quad P^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{P}{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1} \\ 2 \cdot (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

Zatem $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1}$.

8.4 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie 8.4.1 (Cayleya-Hamiltona)**.** Każda macierz kwadratowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych spełnia swoje równanie charakterystyczne.

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3)$

Przykład 8.4.2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wiemy, że $\chi_A(t) = t^2 - 2t - 3$.

Popraw!

Na mocy powyższego twierdzenia $A^2 - 2A + 3I = \mathbf{0}$. Sprawdzimy to rachunkiem.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OK

UWAGA: $D = P^{-1} A P$ $\quad P$ – nieosobliwa

$\det D = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A$ ~~det~~

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 3\}$ $\quad A^{-1} / A^2 - 2A - 3I = 0$ $\quad D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

$0 \notin \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ $\quad A - 2I - 3A^{-1} = 0$ $\quad A - 2I = 3A^{-1}$ $\quad \mathrm{Det}\, D = 0 \Rightarrow \det A = 0$

Wniosek 8.4.3. Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Niech $\chi_A(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A.

$c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 \cdot \underbrace{I}_{A^0} = 0 \quad / : c_n$

i) Jeśli A jest odwracalna, to wówczas
$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(c_n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + c_2 A + c_1 I)$

ii) $A^n = -\frac{1}{c_n}(c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I)$

iii) Dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia n można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$.

Przykład 8.4.4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy macierz odwrotną A^{-1}. $\quad A^{-1} = ?$

det$A = -5 \neq 0$ macierz jest odwracalna

wielom. char

$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 4A - 5I = 0$

Tw. C-H

$A^{-1}(A^2 - 4A - 5I) = A - 4I - 5A^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I)} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$

$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Przykład 8.4.5. Dana jest macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy B^9.

Obliczamy $\boxed{\chi_B(t)} = \det(B - tI) = \begin{vmatrix} -t & 2 & 6 \\ 2 & -8-t & -26 \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix} \overset{w_1 - w_3, w_2 + w_3}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & -18-t \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix}$

$\overset{k_3 - 3k_2}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & 2t \\ -2 & 2 & 2-t \end{vmatrix} \overset{w_3 + w_1}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & 2t \\ -t & 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (2-t)(6+t)t - 4t(2-t) = \boxed{-t^3 + 4t}.$

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona $\boxed{B^3 = 4B}$, skąd

$B^9 = \underbrace{4^3 B^3}_{4^3 \cdot 4B} = 4^4 B = 256 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$

$(B^3)^3 = (4B)^3$

Przykład 8.4.6. Dana jest macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczymy $C^5 + C^3$ oraz C^{50}. $\quad \chi_C(t) = (1-t)^2$

Oznaczmy $p(t) = t^5 + t^3$. Obliczamy $\chi_C(t) = (1-t)^2$. Dzielimy wielomian p przez wielomian χ_C (na ogół z resztą). Zatem istnieją wielomiany q_1, r_1 takie że $p(t) = q_1(t)\chi_C(t) + r_1(t)$ oraz $\deg(r_1) < \deg(\chi_C)$. Wykonując dzielenie, otrzymujemy $q_1(t) = t^3 + 2t^2 + 4t + 6$, $r_1(t) =$

$(t^5 + t^3) = (t-1)^2(t^3 + 2t^2 + 4t + 6) + (8t - 6)$

$8t-6$.

$p(t) = t^5 + t^3$

$p(C) = C^5 + C^3$

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona

$p(C) = \cancel{\chi_C(C)q_1(C)} + r_1(C) = r_1(C) = 8C - 6I = 8\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

st3 st2 st3 st1

Oznaczmy $w(t) = t^{50}$. Istnieją wielomiany q_2, r_2 takie że $\boxed{w(t) = q_2(t)\chi_C(t) + r_2(t)}$ oraz $\deg(r_2) < \deg(\chi_C) = 2$. Oznaczmy $\boxed{r_2(t) = at + b,}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Różniczkując obustronnie otrzymujemy $w'(t) = q_2'(t)\chi_C(t) + q_2(t)\chi_C'(t) + r_2'(t)$. Do układu równań
$\left\{\begin{array}{rcl} t^{50} & = & q_2(t)(1-t)^2 + at + b \\ 50t^{49} & = & q_2'(t)(1-t)^2 - 2q_2(t)(1-t) + a \end{array}\right.$ podstawiamy $t = 1$.

Stąd $\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & a + b \\ 50 & = & a \end{array}\right.$. Zatem $r_2(t) = 50t - 49$ oraz $C^{50} = 50C - 49I = \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

TEMAT: *Przestrzenie euklidesowe*

9.1 Iloczyn skalarny i norma

!

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.1. Funkcję $s : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy *iloczynem skalarnym (iloczynem wewnętrznym)*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$, liniowa na pierwszej zmiennej

ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$, symetria

ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$.

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*. Bywa ona oznaczana symbolem E. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$.

$\mathbb{R}^n$

(u, v)
(u/v)
$\langle u/v \rangle$
$\langle u, v \rangle$

Przykład 9.1.2. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w* $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taką, że $\forall u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$
Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \boxed{\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx}$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x) dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle ., . \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$,
$\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ liczby ustalone

$-1 \quad 0 \quad 1$

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.
Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Nie oznacza to jeszcze, że p jest wielomianem zerowym.

Niech $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Załóżmy, że $\langle p, p \rangle = 0$. Wówczas $p(x_0) = p(x_1) = \ldots = p(x_n) = 0$, skąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & \ldots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ukł. ozn. → jedyne rozw. to rozw. zerowe

Wyznacznik główny W tego układu, to wyznacznik macierzy Vandermonde'a. $W = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$, bowiem $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zatem jest to układ oznaczony jednorodny, jego jedynym rozwiązaniem jest $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, co oznacza, że p jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\quad \langle .,. \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$

ślad (suma elementów na przekątnej)

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 9.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w)$, liniowość na drugą zmienną

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0$,

iii) $\forall u, v \in V \quad \big(s(u, v)\big)^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v)$ *nierówność Schwarza*

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.4. Funkcję $||.|| : V \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad ||v|| \geq 0 \quad \wedge \quad ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$,

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$, moduł w $\mathbb{R}$

iii) $\forall u, v \in V \quad ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$. tzw. warunek trójkąta

$\mathbb{R}^3 \quad |\vec{u}|$

$V \quad ||\vec{u}||$

Liczbę $||v|| \geq 0$ nazywamy *normą (lub długością) wektora* v. Parę $(V, ||.||)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Twierdzenie 9.1.5. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $||.||_s : V \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \boxed{||v||_s = \sqrt{s(v, v)}}$$

$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \circ \vec{u}$

jest normą w przestrzeni V. Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny.*

Przykład 9.1.6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mamy $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 9.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

$\vec{u} = (1, 2, 3)$

$\vec{u} \circ \vec{u} = (1, 2, 3) \circ (1, 2, 3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = |\vec{u}|^2$

9.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy *unormowanym* lub *wersorem*. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v.
Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{||v||}$ jest wersorem, bowiem $||\hat{v}|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \left|\frac{1}{||v||}\right| \cdot ||v|| = \frac{1}{||v||} \cdot ||v|| = 1$.

Miara kąta między wektorami
W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy
$|\langle u,v \rangle| \leq \sqrt{\langle u,u \rangle}\sqrt{\langle v,v \rangle} = ||u|| \cdot ||v|| \;\Rightarrow \frac{|\langle u,v \rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$
Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α. Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

wystarczy!

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}, \quad \measuredangle(u,v) = \arccos \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 9.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle .,. \rangle)$, gdzie $\langle p,q \rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)$. Wyznaczymy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$$\begin{aligned}
&\langle u,v \rangle = u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18\\
&||u|| = \sqrt{\langle u,u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}\\
&||v|| = \sqrt{\langle v,v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}\\
&\measuredangle(u,v) = \arccos \frac{18}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}}
\end{aligned}$$

Definicja 9.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \ldots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad i \neq j \;\Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

wersory

$$\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Uwaga 9.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

$\vec{u} \circ \vec{0} = 0$

szereg Fouriera

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Przykład 9.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R}),\langle .,.\rangle)$, gdzie $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdzimy, czy wektory $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\big(-1-(-1)\big) = 0$

$\langle f,f\rangle = ||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne. !

baza ortonormalna
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$

ortogonalność

Twierdzenie 9.2.5 (Pitagorasa)**.** Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u,v\in V \quad u\perp v \Leftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2+||v||^2.$$

Dowód. $||u+v||^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \overset{\langle u,v\rangle=0}{=} ||u||^2+||v||^2$ □

Twierdzenie 9.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Układ wersorów ortogonalny

Wniosek 9.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 9.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną (ortonormalną)* tej przestrzeni.

Przykład 9.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,1)$.

TAK

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

$\mathbb{R}^3 \ni v = (1,2,3)$

$v\circ\hat{i} = 1 \quad v\circ\hat{j} = 2 \quad v\circ\hat{k} = 3$

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$
baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = \big(\hat{i}=(1,0,0), \hat{j}=(0,1,0), \hat{k}=(0,0,1)\big)$
Dla dowolnego wektora $v=(v_x,v_y,v_z)$ mamy $v_x = v\circ\hat{i}$, $v_y = v\circ\hat{j}$, $v_z = v\circ\hat{k}$.
Z dokładnością do znaku skalary v_x,v_y,v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox,Oy,Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x\cdot\hat{i}, v_y\cdot\hat{j}, v_z\cdot\hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox,Oy,Oz odpowiednio.

Łatwo wyliczyć współrzędne w bazie ortogonalnej

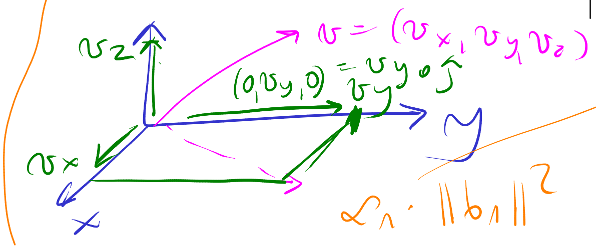
Twierdzenie 9.2.10. Niech $\mathcal{B}=\big(b_1,b_2,\dots,b_n\big)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V,\langle .,.\rangle)$. Niech $v\in V$, $v=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i\in\{1,2,\dots,n\} \quad \boxed{\alpha_i = \frac{\langle v,b_i\rangle}{||b_i||^2}}.$$

Skąd?

Ponadto

$$\forall u,w\in V \quad \langle u,w\rangle = \frac{\langle u,b_1\rangle\langle w,b_1\rangle}{||b_1||^2} + \frac{\langle u,b_2\rangle\langle w,b_2\rangle}{||b_2||^2} + \dots \frac{\langle u,b_n\rangle\langle w,b_n\rangle}{||b_n||^2}.$$



$\alpha_1\cdot||b_1||^2 = \langle v,b_1\rangle = v\circ b_1 = (\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n)\circ b_1$
$= \alpha_1\cdot \overset{||b_1||^2}{b_1\circ b_1} + \alpha_2 \overset{0}{b_2\circ b_1} + \dots + \alpha_n \overset{0}{b_n\circ b_1}$

$u = \sum_1^m \alpha_i b_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{||b_i||^2} \cdot b_i$ $\quad w = \sum_1^n \frac{\langle w, b_i \rangle}{||b_i||^2} b_i$

Wniosek 9.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$||b_i|| = 1$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \ldots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

$w = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 9.2.10 przyjąć $||b_i|| = 1$. $\square$

WAŻNE

Wniosek 9.2.12. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \ldots + \alpha_n \beta_n$. ! WAŻNE

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i^n \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$. $\square$

9.3 Metody ortogonalizacji

$\{b_1, \ldots, b_m\}$ baza podprzestrzeni ✓

Twierdzenie 9.3.1. Niech $(V, \langle ., . \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \ldots b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \ldots c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \ldots b_m\} = \text{lin}\{c_1, \ldots c_m\}$.

Wniosek 9.3.2. i) Każda skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{\mathbf{0}\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Przykład 9.3.3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$, tj. $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dana jest baza $\mathcal{B} = (b_1 = (1, -2, 0), b_2 = (5, 5, 1), b_3 = (5, 4, 4))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B}$.

Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = (1, -2, 0)$. Wówczas oczywiście $\text{lin}\{c_1\} = \text{lin}\{b_1\}$.

$c_2 \in \text{lin}\{b_1, b_2\}$

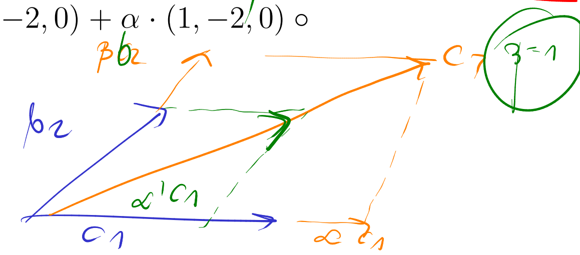
II KROK: Aby zagwarantować, że $\text{lin}\{c_1, c_2\} = \text{lin}\{b_1, b_2\}$, poszukujemy c_2 w postaci $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzemy α w taki sposób, by $c_2 \circ c_1 = 0$.

$c_2 = \alpha \cdot c_1 + \beta b_2$

Obliczamy $c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1)$.

Aby $c_2 \circ c_1 = 0$, wystarczy przyjąć $\alpha = -\frac{b_2 \circ c_1}{c_1 \circ c_1}$.

W naszym przykładzie $0 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (5, 5, 1) \circ (1, -2, 0) + \alpha \cdot (1, -2, 0) \circ$



$1 \cdot b_2$

$c_2 = b_2 + \alpha c_1 = b_2 + 1 \cdot c_2$ $\quad \alpha = 1$

$(1, -2, 0) = -5 + 5\alpha$, skąd $\alpha = 1$. Zatem $c_2 = b_2 + c_1 = (6, 3, 1)$.

III KROK: Aby zagwarantować, że $\mathrm{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathrm{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$, poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzemy β_1, β_2 w taki sposób, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.
Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (\underbrace{c_1 \circ c_1}_{=||c_1||^2}) + \beta_2 (\underbrace{c_2 \circ c_1}_{=0}) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2$, skąd $\beta_1 = -\frac{b_3 \circ c_1}{||c_1||^2}$. Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (\underbrace{c_1 \circ c_2}_{=0}) + \beta_2 (\underbrace{c_2 \circ c_2}_{=||c_2||^2}) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2$, skąd $\beta_2 = -\frac{b_3 \circ c_2}{||c_2||^2}$.

W naszym przykładzie $\begin{cases} 0 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 ||c_1||^2 = (5, 4, 4) \circ (1, -2, 0) + \beta_1 (1 + 4 + 0) = -3 + 5\beta_1 \\ 0 = b_3 \circ c_2 + \beta_2 ||c_2||^2 = (5, 4, 4) \circ (6, 3, 1) + \beta_2 (36 + 9 + 1) = 46 + 46\beta_2 \end{cases}$.
Skąd $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = -1$.
Zatem $c_3 = b_3 + \frac{3}{5} c_1 - c_2 = (5, 4, 4) + \frac{3}{5}(1, -2, 0) - (6, 3, 1) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)$.
$\mathcal{C} = \big(c_1 = (1, -2, 0), c_2 = (6, 3, 1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\big)$ jest bazą ortogonalną.

Ponieważ $||c_1|| = \sqrt{5}$, $||c_2|| = \sqrt{46}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$, zatem bazą ortonormalną jest
$\mathcal{C}' = \Big(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, -2, 0), c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot (6, 3, 1), c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \sqrt{\frac{5}{46}} \cdot (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 3)\Big)$.

Wniosek 9.3.4. Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle ., . \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = \big(c_1, c_2, \ldots, c_n\big)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \qquad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 \qquad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{||c_2||^2} c_2 \quad \ldots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{||c_i||^2} c_i$$

tak definiuję iloczyn skalarny

Przykład 9.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = \big(1, x, x^2\big)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem
$\langle b_1, b_3 \rangle =$ $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$. $\quad \langle b_1, b_3 \rangle = \langle 1, x^2 \rangle$
Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

$\mathrm{lin}(b_1, b_2) = \mathrm{lin}(c_1, c_2)$

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

$c_2 \in \mathrm{lin}(c_1, b_2)$

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$. $\quad c_2 = ?$ $\alpha = ?$
Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1 + 1 + 1) = 3\alpha = 0$
$\langle x, 1 \rangle + \alpha \langle 1, 1 \rangle$
Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

$c_2 \perp c_1$ tzn. $b_1 \perp b_2$

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy β_1, β_2 tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

$\mathrm{lin}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathrm{lin}\{b_1, b_2, b_3\} = \mathrm{lin}\{c_1, c_2, b_3\}$

wyrażają się od c_1, c_2

$\beta_1 = -\frac{b_3\circ c_1}{||c_1||^2}$

$||c_1||^2$ 0 $\langle x^2, 1\rangle + \beta_1\langle 1, 1\rangle$

Mamy $0 = c_3\circ c_1 = (b_3+\beta_1 c_1+\beta_2 c_2)\circ c_1 = b_3\circ c_1+\beta_1(c_1\circ c_1)+\beta_2(c_2\circ c_1) = b_3\circ c_1+\beta_1||c_1||^2 = 0$
$(1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1)+\beta_1\cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.
Analogicznie $0 = c_3\circ c_2 = (b_3+\beta_1 c_1+\beta_2 c_2)\circ c_2 = b_3\circ c_2+\beta_1(c_1\circ c_2)+\beta_2(c_2\circ c_2) = b_3\circ c_2+\beta_2||c_2||^2 = (1\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1)+\beta_2\cdot((-1)^2+0^2+1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.
Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.
$\mathcal{C} = \left(c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3}\right)$ jest bazą ortogonalną.

$C_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 + 0\cdot c_2 = b_3 - \frac{2}{3}c_1$

$= \sqrt{\langle c_1,c_1\rangle}$ $= \sqrt{\langle c_2,c_2\rangle}$ $= \sqrt{\langle c_3,c_3\rangle}$

$||c_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $||c_2|| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$, $||c_3|| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Bazą ortonormalną jest układ wektorów
$\mathcal{C}' = \left(c_1' = \frac{c_1}{||c_1||} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2' = \frac{c_2}{||c_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c_3' = \frac{c_3}{||c_3||} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Unormować wektory

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.6. Niech $u_1, \ldots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$. Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \ldots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T|A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G|A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

$AX = B$
$[A|B]$
macierz blokowa

Przykład 9.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1,-2,0), b_2 = (5,5,1), b_3 = (5,4,4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

A - nie musi być kwadratowa

AA^T będzie kwadratowa

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.
Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1\circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 1 & 5 & 5 \\ & & & -2 & 5 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 5 & 1 & -5 & 51 & 49 \\ 5 & 4 & 4 & -3 & 49 & 57 \end{array} \qquad A\cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

Nie wolno zmieniać kolejności wierszy!

A

$$[A\cdot A^T|A] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+\frac{3}{5}w_1]{w_2+w_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow c_1 \\ \leftarrow c_2 \\ \leftarrow c_3 \end{array}$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1,-2,0), c_2 = (6,3,1), c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.
Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha\cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $||c_1||^2, ||c_2||^2, ||c_3||^2$.
Zatem $||c_1|| = \sqrt{5}, ||c_2|| = \sqrt{46}, ||c_3|| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

9.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 9.4.1. Zbiór $S^{\perp} := \{v \in V : \forall x \in S \ \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru* S w przestrzeni euklidesowej V. Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^{\perp}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora* $x \in V$.

Twierdzenie 9.4.2. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, to wówczas $U^{\perp}$ również jest podprzestrznią liniową.

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

($\mathbb{R}^4$ + stand. il. skalarny)

Przykład 9.4.3. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

$\{u\}^{\perp} = ?$

$(1,0,1,0) \circ (x,y,z,t)$

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^{\perp} = \{(x, y, -x, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

generatory

Definicja 9.4.4. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jeśli $w \in U^{\perp}$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni* U i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 9.4.5. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U, u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \ldots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

$\{ax^2+bx+c\}$

Przykład 9.4.6. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $\boxed{w \perp U?}$

$a=0$ $\quad$ $w \notin U$

$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$

$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x\Big|_0^1 = 0$

$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 0 \quad$ Zatem $w \perp U$.

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 9.4.7. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,

ii) $U^\perp = (\text{lin}U)^\perp$,

iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.

$U_1 = \{a\}$

$U_2 = \{a, b\}$

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

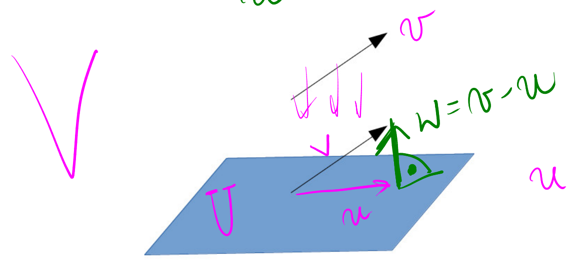
Definicja 9.4.8. Operator liniowy $\pi \in End(V)$ dany wzorem

$w \in U^\perp$

$$\forall v \in V \;\; \pi(v) = u, \quad \text{gdzie} \quad \boxed{\overbrace{v - u}^{w} \perp U,}$$

nazywamy *rzutowaniem ortogonalnym* lub *projekcją ortogonalną* na podprzestrzeń U. Obraz wektora v poprzez π nazywamy *rzutem ortogonalnym* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U.

u



$\Pi_U(v)$ $\quad$ proj(v)

$u = \Pi(v)$ $\quad$ proj$_U(v)$

Twierdzenie 9.4.9 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego)**.** Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U.

i) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U, wówczas $u = \pi(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \langle v, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k\rangle \end{bmatrix}. \tag{1}$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U, wówczas

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2} b_2 + \ldots + \frac{\langle v, b_k\rangle}{||b_k||^2} b_k.$$

Rzutujemy v
v - znane!
u - rzut
u - szukane?

$\mathbb{R}^3$ $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ $v = (1,2,3)$ $2 = v \circ \hat{j}$

iii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U, wówczas

$\|b_i\|^2 = 1$

$W = v - u \perp U$

$U = \mathrm{lin}(b_1, \ldots, b_k)$

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \ldots + \langle v, b_k\rangle b_k.$$

1. wsp. współrzędna

$u = \langle u, b_1\rangle b_1 + \ldots + \langle u, b_k\rangle b_k$

$w \perp b_i$

$w \circ b_i = 0$

$(v-u) \circ b_i = 0$

$v \circ b_i - u \circ b_i = 0$

Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \ldots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \ldots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \ldots & & \ldots & \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \ldots & \langle b_k, b_k\rangle \end{bmatrix}$ występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy *macierzą Grama* układu wektorów $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

$\langle u, b_1\rangle = \langle v, b_1\rangle$

PRAWDA

$v \circ b_i = u \circ b_i$

Wniosek 9.4.10. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni U, zaś $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy $\mathcal{B}$. Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U.

$\mathbb{R}^n$ + stand. il. skalarny

Przykład 9.4.11. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \mathrm{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U, bowiem $r\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I

rzut v

$u := \pi_U(v) =?$, $\boxed{w := v - u \perp U}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{w \perp b_1}$ $:= (2, 1, 1, 2)$ $\wedge$ $\boxed{w \perp b_2}$ $:= (1, 1, -3, 0)$

$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas

$u = ?$

$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$

$\alpha = ?$

$\beta = ?$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$0 = \langle w, b_1\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha,$ $= 0$

$0 = \langle w, b_2\rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta.$ $= 0$

Stąd $\boxed{\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}}$ oraz

$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$ B_U

(b_1, b_2)

METODA II

$**$

Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.

Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 9.2.10 mamy $u = \left[\frac{\langle u, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle u, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Ale $\langle v, b_i\rangle = \langle u, b_i\rangle$, zatem $u = \left[\frac{\langle v, b_1\rangle}{||b_1||^2}, \frac{\langle v, b_2\rangle}{||b_2||^2}\right]$. Obliczamy $\langle v, b_1\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4$, $\langle v, b_2\rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1$ oraz $||b_1||^2 = 10$, $||b_2||^2 = 11$. Stąd $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}$.

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

ORTONORMALNA $M_{\Pi}(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ AA^T

~~ortogonalna~~

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U. Normalizujemy bazę $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2'\}$, gdzie $b_1' = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,1,2)$, $b_2' = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3,0)$. Niech $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}$. Macierzą projekcji jest $AA^T = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. Stąd $AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

NN.9.4.10

Interperatacja geometryczna metody Grama-Schmidta

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

$$c_1 := b_1$$

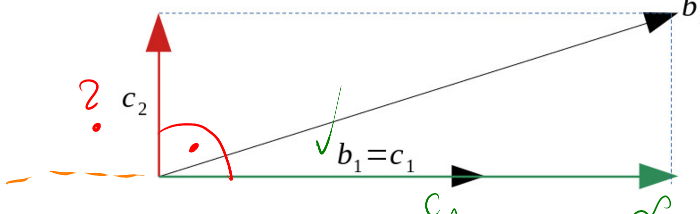
$\text{lin}\{c_1\}$

c_1 - baza

KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_1)$$

α



RYSUNEK

$c_2 + \alpha c_1 = b_2$

$c_2 = b_2 - \alpha c_1$

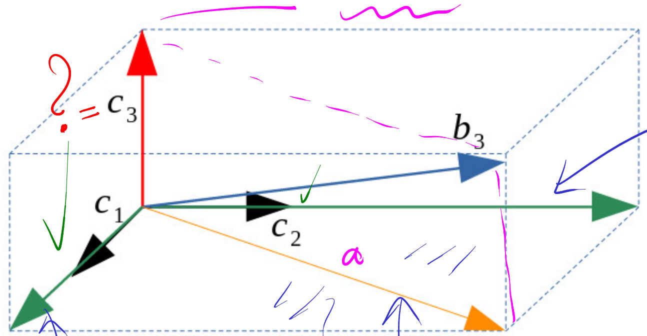
$\alpha \cdot c_1$

rzut b_2 na $\text{lin}\{c_1\}$

PROSTA $\text{lin}\{c_1\}$

KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{||c_1||^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{||c_2||^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1,c_2\}}(b_3)$$

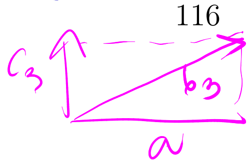


rzut b_3 na $\text{lin}\{c_2\}$

rzut b_3 na $\text{lin}\{c_1\}$

a - rzut b_3 na $\text{lin}\{c_1, c_2\}$

RYSUNEK



$b_3 = c_3 + a$

$c_3 = b_3 - a$

$\pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) + \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = \pi_{\text{lin}\{c_1,c_2\}}(b_3)$

9.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

φ – liniowe
φ(v) = ?

Przykład 9.5.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Wektor $(1,0,0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1,6,0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmienić ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawią powyższe wielkości niezmienione.

kwadratowa

Definicja 9.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $AA^T = A^TA = I_n$.

$A \cdot A^T = \frac{1}{9} B \cdot B^T$

Przykład 9.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

B

-1 2 2
2 -1 2
długość do 2

Twierdzenie 9.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 9.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1.

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (względem standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

UWAGA!!!

iii) Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

det A = ?

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(AA^T) = (\det A)^2$. $\square$

Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, skończenie wymiarową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Endomorfizm

Definicja 9.5.6. Operator liniowy $\varphi \in End(V)$ nazywamy

i) *ortogonalnym*, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną,

ii) *izometrią liniową*, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad ||\varphi(u) - \varphi(v)|| = ||u - v||.$$

↓
izometria
+
odwz. liniowe

Translacja
– to izometria
ale nie izometria liniowa

Iloczyn macierzy ortogonalnych jest m. ortogonalną | GRUPA / działanie wewn. $A' = P^{-1}AP$ P – macierz przejścia

P – ortogonalna GRUPA P^{-1} ortogonalna

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

$\|\varphi(v)\| = \|v\| = 1 \cdot \|v\| = |1| \cdot \|v\| =$

Uwaga 9.5.7. Niech $\varphi \in End(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem. tzn. jądro $\ker\varphi = \{0\}$

ii) $\boxed{Spec(\varphi) \subset \{-1, 1\}}$

$v \in \ker\varphi$ $\varphi(v) = 0$

$0 = \|0\| = \|\varphi(v)\| \overset{izom}{=} \|v\| \Rightarrow v = 0$

Twierdzenie 9.5.8. Niech $\varphi \in End(V)$. Następujące warunki są równoważne.

i) φ jest izometrią liniową.

ii) φ *zachowuje normę* tzn. $\forall v \in V$ $||\varphi(v)|| = ||v||$.

iii) φ *zachowuje iloczyn skalarny* tzn. $\forall u, v \in V$ $\langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.

iv) φ jest operatorem ortogonalnym

Macierze ortogonalne reprezentują izometrie liniowe

Wniosek 9.5.9. Izometrie liniowe *zachowują kąty*, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α, to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α.

Przykład 9.5.10. Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznaczmy macierz A endomorfizmu φ w tejże bazie.
Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Uwaga 9.5.11. Jeśli rozpatrujemy niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$, to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

X

$\boxed{\mathbf{n = 1}}$

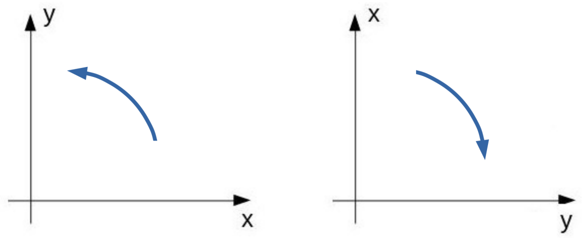
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest linowe, zatem $\varphi(x) = \boxed{ax}, a \in \mathbb{R}$
φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.
Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

Vd   -Vd

$\boxed{\mathbf{n = 2}}$

Orientacja płaszczyzny

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny (zorientowany dodatnio)*, a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny   układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podejście algebraiczne
Z założenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest linowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.

A^T A $ac+bd$

Z równości $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & \cancel{ab + cd} \\ \cancel{ab + cd} & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$

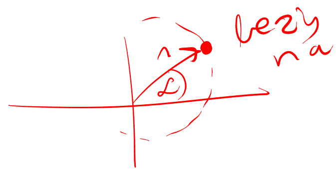
$[a, b]$
$[c, d]$

otrzymujemy układ równań $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ \cancel{ab + cd =} 0 \end{cases}$ WERSORY $ac+bd$

$ac+bd=0$ są do siebie $\perp$

Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α, że $a = \cos \alpha$ oraz $b = \sin \alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $\cancel{ab + cd =} 0$ mamy,

$ac+bd=0$



$(a,b) \circ (c,d) = 0$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$ $\vec{a} = [1, 2)$ $\vec{b} = [-2, 1)$ $\vec{a} \perp \vec{b}$

że $c = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ lub też $c = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad lub \quad A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

$\pi/2$ $3/2\pi$

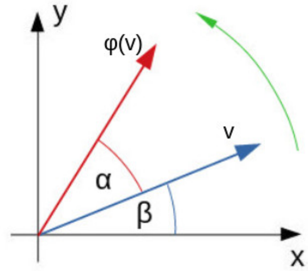
1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r\cos\beta, r\sin\beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

obrót

o kąt α

Mamy do czynienia z *rotacją (obrotem) o kąt* α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.



Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

$A^TA = I$

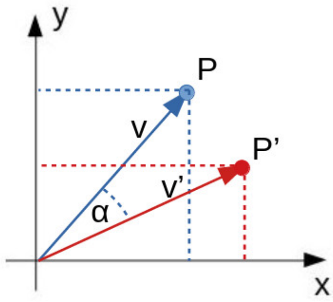
$A^{-1} = A^T$

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

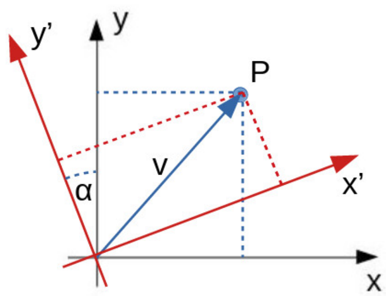
Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a-t)^2 + b^2$ i $Spec(A) = \varnothing$. Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto *rotacja nie zmienia orientacji* układu współrzędnych.

STOP

Uwaga 9.5.12. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.



Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.