$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$ $\vec{a} = [1, 2)$ $\vec{b} = [-2, 1)$ $\vec{a} \perp \vec{b}$

że $c = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ lub też $c = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha$, $d = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad lub \quad A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

$\det A = 1$ $\pi/2$ 1 $3/2\pi$ 2 $\det A = -1$

1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r\cos\beta, r\sin\beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

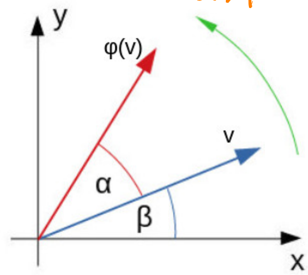
$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

obrót

bez zmian

o kąt α

Mamy do czynienia z *rotacją* (*obrotem*) *o kąt* α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.



Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

$A^T A = I$

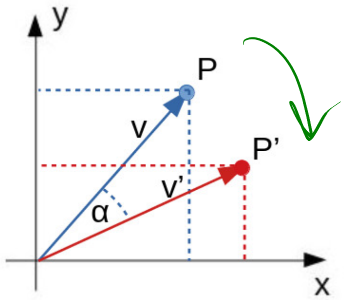
$A^{-1} = A^T$

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

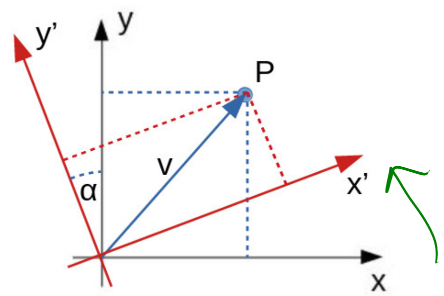
Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a-t)^2 + b^2$ i $Spec(A) = \varnothing$. Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto *rotacja nie zmienia orientacji* układu współrzędnych.

STOP

Uwaga 9.5.12. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.

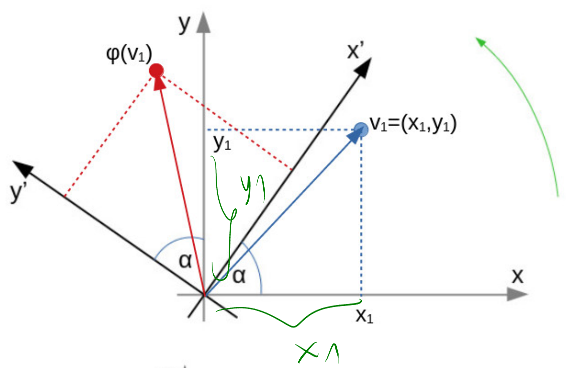


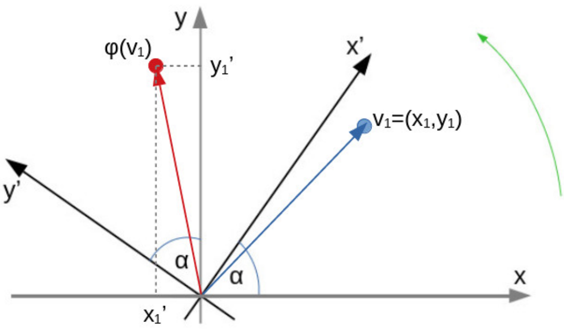
Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

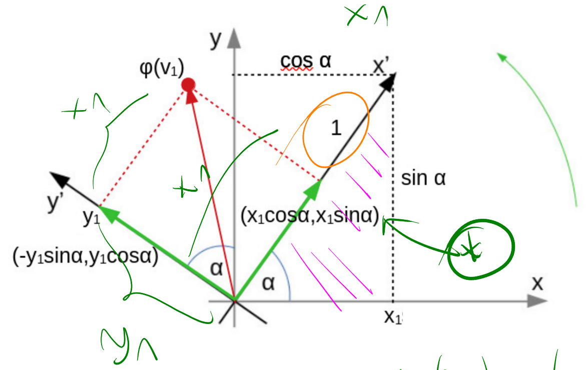
Współrzędne punktu P' w “starej bazie” (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w “nowej bazie” (rysunek po prawej).

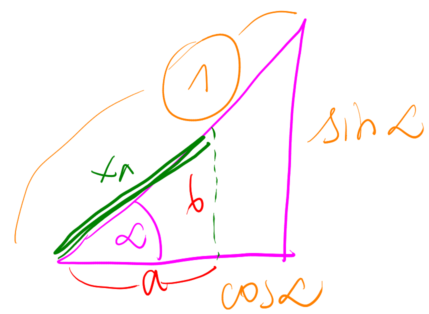
Podejście geometryczne

Obrotem układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.









$$\varphi(v_1) = (x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$$ *

$\varphi(v_1) = (x_1\cos\alpha, x_1\sin\alpha) + (-y_1\sin\alpha, y_1\cos\alpha)$

$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{x_1}{1}$

$a = x_1\cos\alpha$

$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{x_1}{1}$

$b = x_1\sin\alpha$

Przykład 9.5.13.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ identyczność, tj. rotacja o kąt miary 0

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ rotacja o kąt miary $\frac{\pi}{2}$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ rotacja o kąt miary π

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ rotacja o kąt miary $\frac{3}{2}\pi$

Przykład 9.5.14. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$A \cdot A^T = I$

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

$\det A = 1$

$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Ponieważ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$.

Przykład 9.5.15. Wyznaczymy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$, $y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')$. Wstawiając do równania $y = mx$, otrzymujemy $-x'+y' = m(x'+y')$. Zatem $(1-m)y' = (1+m)x'$. Równaniem prostej obróconej jest $(m+1)x + (m-1)y = 0$.

2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & -a-t \end{vmatrix} = -(a-t)(a+t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $Spec(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Mamy do czynienia z *symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej* $y = 0$. $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$. Jaka to prosta?

Podejście algebraiczne

Przypuśćmy, że l jest prostą o równaniu $y = \mathrm{tg}\beta \cdot x$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l, a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos\beta, \sin\beta)$, $b_2 = (-\sin\beta, \cos\beta)$. Istnieją skalary $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1b_1 + c_2b_2$. Obliczamy

$$v^T = c_1\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\cos\beta - c_2\sin\beta \\ c_1\sin\beta + c_2\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1b_1 - c_2b_2$.

$$\varphi(v)^T = c_1\begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} - c_2\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\cos\beta + c_2\sin\beta \\ c_1\sin\beta - c_2\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

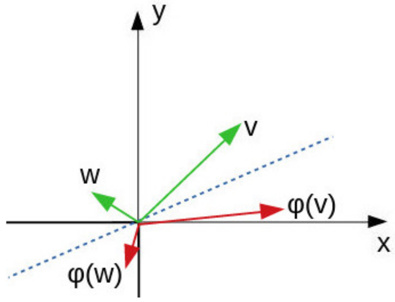
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Stąd

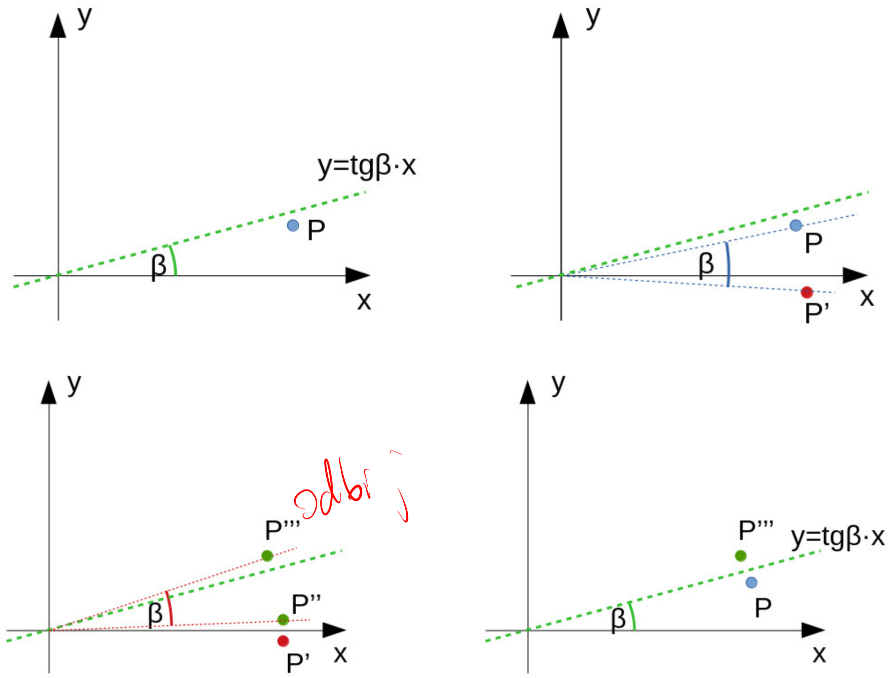
$$\varphi(v)^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} v^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T$$

Czyli $\alpha = 2\beta$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $y = \boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot x$.



<u>Podejście geometryczne</u>



$-\beta$

β

1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$.

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = A^T$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

odbicie od Ox $y=0$

3) Obracamy punkt o kąt β. $\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

4) Otrzymujemy $\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$

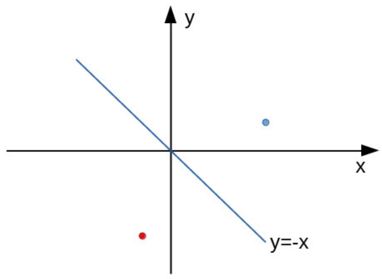
składanie $\varphi_3\, \varphi_2\, \varphi_1$

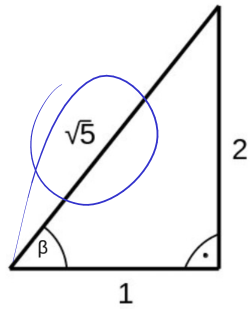
$A_3 A_2 A_1$

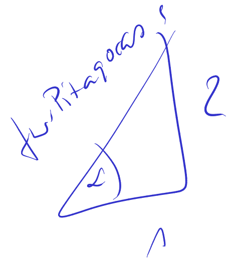
$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}.$$

Wniosek 9.5.16. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0,0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 9.5.17. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y = -x$ jest macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.







Przykład 9.5.18. Wyznaczymy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.

METODA I: Jeśli $\mathrm{tg}\beta = 2$, to wówczas $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$$? = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

To samo!

METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y = 0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

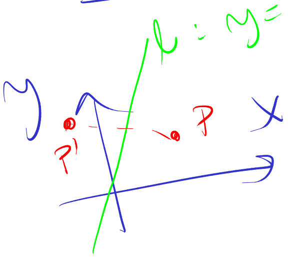
$A \circ B$ odbi obrót $A^T = A^{-1}$

Uwaga 9.5.19. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obrotowi/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 9.5.20. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

$l: y = mx$?



$m = 2$

Sp. $A \cdot A^T = I$

izom. liniowa

$\det A = 1$ rotacja

$\det A = -1$ symetria

Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y) spełniające równanie $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$Av = v \quad v \in V$

Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 3x + 4y &= -5x \\ -4x + 3y &= 5y \end{cases}$.

Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.

Uwaga 9.5.21. Symetria ortogonalna φ jest *inwolucją*, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ, to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

n – dowolne

odtąd nie obowiązuje!

~~**Twierdzenie 9.5.22.** Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ macierz obrotu w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest macierzą ortogonalną o wyznaczniku równym 1. I odwrotnie, jeśli macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą ortogonalną o wyznaczniku równym 1, to A jest macierzą obrotu.~~

~~Istnieje zatem wzajemnie jednoznaczna korespondencja pomiędzy obrotami a macierzami ortogonalnymi o wyznaczniku równym 1.~~

Twierdzenie 9.5.23. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ zbiór macierzy ortogonalnych stopnia n o wyznaczniku równym 1 wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę. Grupę tę nazywamy *specjalną grupą ortogonalną* lub *grupą obrotów właściwych* i oznaczamy symbolem $SO(n)$.

Wniosek 9.5.24. Złożenie rotacji jest rotacją. Ponadto odwzorowanie odwrotne do rotacji jest rotacją.

Twierdzenie 9.5.25.

i) Grupa $SO(2)$ jest abelowa.

ii) Dla $n \geq 3$ grupy $SO(n)$ są nieprzemienne.

Przykład 9.5.26. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Ponieważ $\det A = \det B = 1$, są to macierze obrotów. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.5.27. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących je macierzy (w pewnej ustalonej bazie). Oznacza to, że osie obrotu traktujemy jako *niezmienne*, z góry zadane. Przykładowo, jeśli $\varphi, \psi \in End(\mathbb{R}^3)$ to odpowiednio rotacja o kąt γ wokół prostej l i rotacja o kąt α wokół prostej k, zaś $A, B \in SO(3)$ to reprezentujące je

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Algebra
Wykład nr 10
Data: ....

TEMAT: *Przestrzenie unitarne*

10.1 Definicja przestrzeni unitarnej i podstawowe własności

K $K=\mathbb{R} \vee K=\mathbb{C}$

Niech $V = (V, +, \mathbb{C}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$, jeśi $\alpha = x + iy$, $x, y, \in \mathbb{R}$, to wówczas $\overline{\alpha} = x - iy$.

Definicja 10.1.1. Funkcję $s : V \times V \to \mathbb{C}$ nazywamy *iloczynem skalarnym (iloczynem hermitowskim)*, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

różnica

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$,

ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = \overline{s(v, u)}$, ! symetria hermitowska

ii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$.

Parę (V, s) nazywamy wówczas *przestrzenią unitarną*. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $\langle u, v \rangle$.

Uwaga 10.1.2. i) $\forall v \in V \; s(v, v) \in \mathbb{R}$, zatem warunek $s(v, v) \geq 0$ ma sens. ok

$s(v,v) = \overline{s(v,v)} \Downarrow s(v,v) \in \mathbb{R}$

ii) Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unitarną.

Twierdzenie 10.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią unitarną. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad s(u, v + w) = s(u, v) + s(u, w)$,

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad s(u, \alpha v) = \overline{\alpha} s(u, v)$,

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0 = s(\mathbf{0}_V, v)$,

różnica

$s(u, \alpha v) \overset{ii}{=} \overline{s(\alpha v, u)} \overset{i}{=} \overline{\alpha \cdot s(v,u)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{s(v,u)} = \overline{\alpha} \cdot s(u,v)$

Przykład 10.1.4. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w* $\mathbb{C}^n$ nazywamy $s : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ taką, że $\forall u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n \quad s(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + \ldots + x_n \overline{y_n}$.

2) Niech l^2 będzie zbiorem ciągów $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ liczb zespolonych takich, że ciąg $a_n = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ $= z_1^2 + \ldots + z_n^2$ jest zbieżny. Granicę ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oznaczamy symbolem $\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2$. l^2 jest przestrzenią

wektorową ze zwykłymi działaniami dodawania ciągów po współrzędnych i mnożenia przez liczbę. Definiujemy iloczyn hermitowski

krzywe na płaszczyźnie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\langle (z_i)_{i\in\mathbb{N}}, (w_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} z_i \overline{w_i}.}$$

$\mathbb{C}$

3) Niech $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \,|\, f\text{−ciągła}\}$. Jest to przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{C}$, tj. *zespolona* przestrzeń wektorowa. Jej elementami są funkcje postaci $f(t) = u(t) + iv(t)$, gdzie $u, v \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Na przykład $f(t) = t + it^3$, $t \in [-1,1]$. Definiujemy iloczyn hermitowski

$\mathcal{C}: x = x(t), y = y(t)$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

$\boxed{z(t) = x(t) + i y(t)}$

4) Zdefiniujemy iloczyn skalarny w przestrzeni macierzy $M_n(\mathbb{C})$. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}} = \mathrm{tr}(A^T\,\overline{B})$$

Definicja 10.1.5. Macierz sprzężona do macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, której każdy element jest liczbą sprzężoną do odpowiadającego mu elementu macierzy A, tj. $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Oznaczamy ją symbolem $\overline{A}$.

Przykład 10.1.6. Niech $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ -3 & 7-5i & i \\ -1-i & 1+i & 1 \end{bmatrix}$. Wówczas $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 0 \\ -3 & 7+5i & -i \\ -1+i & 1-i & 1 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 10.1.7.

i) $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \implies \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

ii) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), a \in \mathbb{C} \implies \overline{a\cdot A} = \overline{a}\cdot\overline{A}$

iii) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \wedge B \in M_{n\times p}(\mathbb{C}) \implies \overline{A\cdot B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$

iv) $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$ dla macierzy odwracalnej A

v) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \implies \overline{A} = A$

vi) $\det\overline{A} = \overline{\det A}$ dla $A \in M_n(\mathbb{C})$

$\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$

$\sqrt{\langle v, v\rangle}$

Wiele stwierdzeń jest analogicznych jak w przypadku przestrzeni euklidesowych.

Można udowodnić, że jeśli $(V, \langle .,. \rangle)$ jest przestrzenią unitarną, to odwzorowanie $||.|| : V \to \mathbb{R}$ dane wzorem $\forall v \in V \quad ||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, jest normą w przestrzeni V. Zachodzi również *nierówność Schwarza* $\forall u, v \in V \quad \langle u, v\rangle \le ||u|| \cdot ||v||$.

Przykład 10.1.8. Rozważamy w $\mathbb{C}^3$ standardowy iloczyn skalarny. Dla danego wektora $(p,q,r) \in \mathbb{C}^3$ mamy $||(p,q,r)|| = \sqrt{p\overline{p} + q\overline{q} + r\overline{r}} = \sqrt{|p|^2 + |q|^2 + |r|^2}$. Obliczymy normę wektora $u = (3, 4i, 0) \in \mathbb{C}^3$.

$$||(3-i, 4i, 0)|| = \sqrt{(3-i)(3+i) - 16i^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$z = x + iy$

$\overline{z} = x - iy$

$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = |z|^2$

Wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$. Układ wektorów $\{v_1, \dots v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \ \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

Każdy ortonormalny układ wektorów jest liniowo niezależny. Jeśli przestrzeń wektorowa jest skończenie wymiarowa, to każdy ortonormalny układ wektorów można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \dots, b_n\big)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni unitarnej $(V, \langle ., . \rangle)$, zaś $v, w \in V$, to wówczas $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i$ oraz $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle \langle b_i, w \rangle$.

Zatem jeśli $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, \dots, b_n\big)$ jest bazą przestrzeni unitarnej $(V, \langle ., . \rangle)$, zaś $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2} \dots + \alpha_n \overline{\beta_n}$.

10.2 Macierze hermitowskie i unitarne

Definicja 10.2.1. *Sprzężeniem hermitowskim* macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ taką, że $B = \overline{A}^T$, $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Oznaczamy ją symbolem A^*. Stosuje się również oznaczenia A^H, $A^\dagger$.

Przykład 10.2.2. Niech $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ -3 & 7-5i & i \end{bmatrix}$. Wówczas $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & -3 \\ 2 & 7+5i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 10.2.3. Niech $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), C \in M_{n \times k}(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Wówczas

i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

ii) $(AC)^* = C^* A^*$

iii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

iv) $(A^*)^* = A$

v) Jeśli $n = m$, to $\det A^* = \overline{\det A}$ oraz $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$.

vi) Jeśli $n = m$ oraz $\alpha \in Spec(A)$, to $\overline{\alpha} \in Spec(A^*)$.

$\det(A^*) = \det(\overline{A}^T) = \det(\overline{A}) = \overline{\det A}$

Definicja 10.2.4. Macierz kwadratową A nazywamy macierzą

i) *hermitowską*, jeśli $A = A^*$,

ii) *antyhermitowską*, jeśli $A = -A^*$,

$\mathbb{R}$ $\quad \overline{A} = A \quad A^* = \overline{A}^T = A$

$A = A^T$ symetryczne

$\mathbb{R}$ $\quad A = -A^T$ antysymetryczne

$\mathbb{R}$ $A \cdot A^T = A^T A = 1$ ortogonalna

iii) *normalną*, jeśli $AA^* = A^*A$,

iv) *unitarną*, jeśli $AA^* = A^*A = I$ lub równoważnie $A^{-1} = A^*$.

Uwaga 10.2.5. i) Każda macierz rzeczywista symetryczna (traktowana jako macierz nad ciałem $\mathbb{C}$) jest hermitowska, a każda macierz rzeczywista antysymetryczna (traktowana jako macierz nad ciałem $\mathbb{C}$) jest antyhermitowska.

ii) Macierz rzeczywista ortogonalna (traktowana jako macierz nad ciałem $\mathbb{C}$) jest macierzą unitarną.

iii) Macierze hermitowskie, antyhermitowskie, unitarne są macierzami normalnymi.

iv) Każdą macierz zespoloną kwadratową można zapisać jako sumę macierzy hermitowskiej i macierzy antyhermitowskiej.

Przykład 10.2.6.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$, $A^* = A$, $AA^* = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{bmatrix} = 3A$

Macierz jest hermitowska (a zatem normalna), ale nie unitarna.

$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, $B^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, $BB^* = I$

Macierz nie jest hermitowska, ani antyhermitowska, ale jest unitarna (a zatem normalna).

$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ -i\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $C = C^*$, $CC^* = I$

Macierz jest hermitowska i unitarna (a zatem normalna).

$D = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{bmatrix}$, $D^* = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$, $DD^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 13 \end{bmatrix}$

Macierz nie jest hermitowska, ani antyhermitowska, ani normalna, ani unitarna.

$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E^* = E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $EE^* = E^*E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Macierz nie jest hermitowska, ani antyhermitowska, ani unitarna, ale jest normalna.

$I = A \cdot A^*$ $\quad 1 = \det I = \det(A \cdot A^*) = \det A \cdot \det A^*$

Twierdzenie 10.2.7. Jeśli macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ jest unitarna, to wówczas $\boxed{|\det A| = 1.}$

$\det A \cdot \det A$

Wyznacznik macierzy unitarnej to liczba zespolona o module równym 1, tj. leżąca na okręgu jednostkowym. W szczególności oznacza to, że macierze unitarne są *nieosobliwe*.

$|\det A|$

Twierdzenie 10.2.8. i) Zbiór macierzy unitarnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą unitarną* i oznaczamy symbolem $U(n)$. Macierze te reprezentują izometrie liniowe przestrzeni V.

$\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R}$

ii) Zbiór macierzy unitarnych stopnia n o wyznaczniku równym 1 wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę. Grupę tę nazywamy *specjalną grupą unitarnych* i oznaczamy symbolem $SU(n)$.

iii) Niech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ będą dwiema bazami ortonormalnymi przestrzeni unitarnej $(V, \langle .,. \rangle)$. Macierz przejścia $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ jest macierzą unitarną. I odwrotnie, dowolna macierz unitarna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

10.3 Unitarna diagonalizacja macierzy hermitowskich

$A = A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$

$A \in M_n(\mathbb{C})$ t.że

Twierdzenie 10.3.1. i) Wartości własne macierzy hermitowskiej (lub rzeczywistej symetrycznej) są liczbami rzeczywistymi.

wielomian char. – wsp. z $\mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy hermitowskiej (lub rzeczywistej symetrycznej) są wzajemnie ortogonalne.

ii) Każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k macierzy hermitowskiej (lub rzeczywistej symetrycznej) odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych.

Twierdzenie 10.3.2 (Twierdzenie spektralne dla macierzy hermitowskich)**.** Dla każdej macierzy hermitowskiej $A \in M_n(\mathbb{C})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz unitarna $P \in U(n)$ takie, że

$$P^{-1}AP = P^*AP = D.$$

Oznacza to, że dla danego operatora liniowego $\varphi \in End(V)$ (reprezentowanego przez macierz A) istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(V, \langle .,. \rangle)$, w której macierz operatora φ jest diagonalna (i elementy na diagonali są liczbami rzeczywistymi). Mówimy wówczas, że macierz A jest *unitarnie diagonalizowalna*.

Wniosek 10.3.3 (Twierdzenie spektralne dla rzeczywistej macierzy symetrycznej)**.** Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz ortogonalna $P \in O(n)$ takie, że

$$P^{-1}AP = P^TAP = D.$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest *ortogonalnie diagonalizowalna*.

są unormal-

są ortogonalne

Diagonalizacja macierzy za pomocą macierzy unitarnych:

1) Znajdujemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

2) Normalizujemy wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym o krotności algebraicznej równej 1.

3) Wektory własne odpowiadające wartości własnej o krotności algebraicznej większej niż 1 dobieramy w taki sposób, by były ortogonalne i następnie normalizujemy.

Przykład 10.3.4. Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ jest symetryczna, a zatem ortogonalnie diagonalizowalna. Obliczamy $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -t(t-6)^2$.
$Spec(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6\}$, przy czym $k_1 = 1, k_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Zatem $E_0 = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\}$.
Wybieramy wektor własny $u = (1, -2, 1)$ i normalizujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. wersor

$$(A - \lambda_2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Zatem $E_6 = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.
Wybieramy wektory własne $v = (2, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Oczywiście $\langle u, v\rangle = 0$ oraz $\langle u, w\rangle = 0$.
Zauważmy, że $\langle v, w\rangle = -2 \neq 0$, zatem v i w nie są do siebie ortogonalne. Zortogonalizujemy układ $\{v, w\}$ metodą Grama-Schmidta.

Niech $c_1 := v$. Poszukujemy $c_2 = w + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $\langle c_2, c_1\rangle = 0$.
Obliczamy $\langle c_2, c_1\rangle = \langle w + \alpha c_1, c_1\rangle = \langle w, c_1\rangle + \alpha\langle c_1, c_1\rangle = (-2 + 0 + 0) + \alpha(4 + 1 + 0)$.
Skąd $5\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = \frac{2}{5}$ oraz $c_2 = w + \frac{2}{5}v = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Mamy $\langle c_1, c_2\rangle = 0$. Normujemy wektory $\hat{c_1} = \frac{c_1}{|c_1|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $\hat{c_2} = \frac{c_2}{|c_2|} = \sqrt{\frac{5}{6}}(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Rozważamy bazę $(\hat{u}, \hat{c_1}, \hat{c_2})$. Macierz diagonalizująca ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. wersory ortogonalne ⇓ $P^{-1} = P^T$

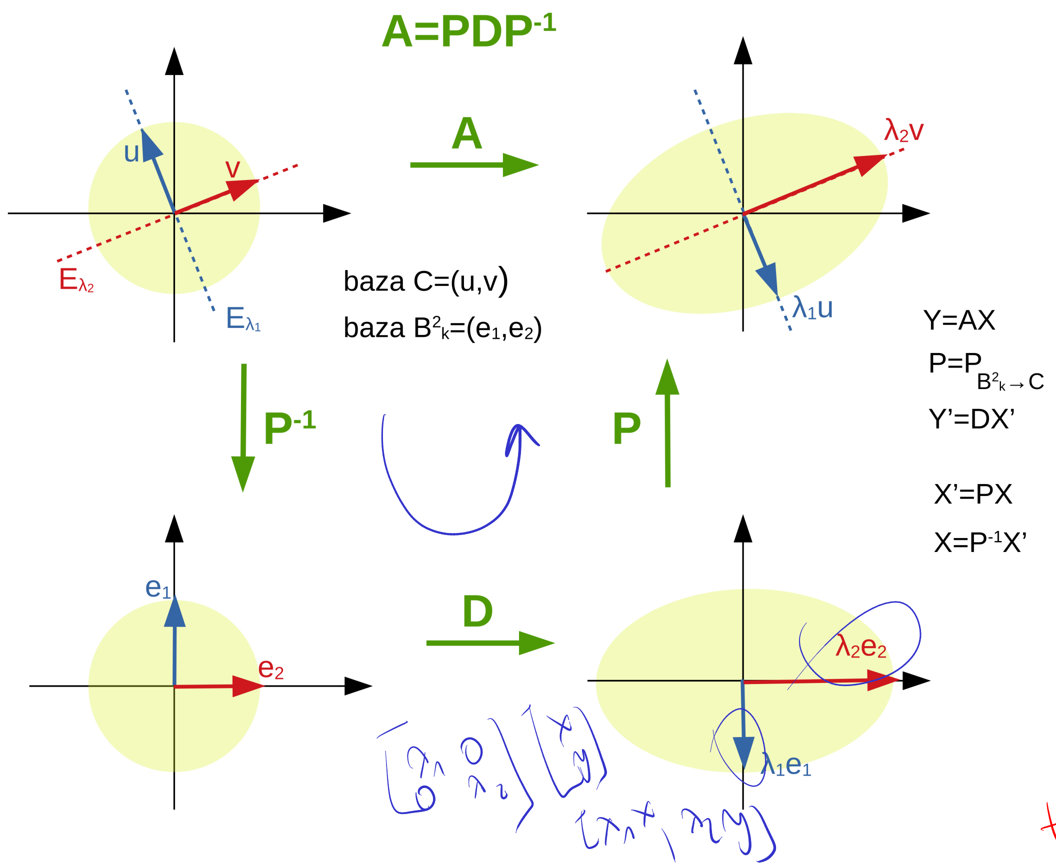
Można sprawdzić, że $PP^T = I$, zatem $P \in O(3)$ oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

$P^T P = I$

Uwaga 10.3.5. i) Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ i dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ prawdziwa jest równość $\langle Au^T, v^T\rangle = \langle u^T, A^Tv^T\rangle$, gdzie u^T, v^T oznaczają odpowiednie wektory kolumnowe. W przypadku macierzy symetrycznej otrzymujemy równość postaci $\langle Au^T, v^T\rangle = \langle u^T, Av^T\rangle$

ii) Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznej może być widziana jako *rotacja osi układu współrzędnych* w taki sposób, *aby były one równoległe do wektorów własnych.* Zobacz tutaj.

iii)



tylko $\lambda \in \mathbb{R}$

Uwaga 10.3.6. i) Wektory własne macierzy hermitowskiej na ogół są zespolone, zatem unitarna macierz diagonalizująca jest na ogół macierzą zespoloną.

ii) Rzeczywista macierz symetryczna jest macierzą hermitowską, zatem jej wartości własne są rzeczywiste. Ponieważ wartości własne i sama macierz są rzeczywiste, więc wektory własne można wybrać jako rzeczywiste, a w konsekwencji macierz diagonalizująca jest rzeczywistą macierzą ortogonalną.

iii) Macierze unitarne oraz rzeczywiste macierze ortogonalne można zdiagonalizować przy pomocy macierzy unitarnej. Ponieważ wartości własne i wektory własne są na ogół zespolone, macierz diagonalizująca jest macierzą unitarną, nie zaś ortogonalną.

Przykład 10.3.7. Macierz obrotu jest rzeczywistą macierzą ortogonalną. W ogólności może być zdiagonalizowana przez zespoloną macierz unitarną.

niesymetryczna!

Niech $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ ustalone.

P - unitarna

$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - t & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\big((\cos\alpha - t)^2 + \sin\alpha^2\big) =$

elementy z $\mathbb{C}$

$(1-t)(1 - 2t\cos\alpha + t^2) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad 1 - 2t\cos\alpha + t^2 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = 4i^2\sin^2\alpha, \quad t = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

$Spec(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \lambda_3 = \cos\alpha - i\sin\alpha\}$

$$(A - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(\cos\alpha - 1) + y\sin\alpha = 0 \\ -x\sin\alpha + (\cos\alpha - 1)y = 0 \end{cases}$$

Jeśli $\cos\alpha = 1$, wówczas $\sin\alpha = 0$ oraz $A = I$ (postać diagonalna).
Załóżmy, że $\cos\alpha \neq 1$. Wówczas $\sin\alpha \neq 0$ oraz $y = -\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}x$.
Stąd $x\sin\alpha + \frac{(\cos\alpha-1)^2}{\sin\alpha}x = \frac{\sin^2\alpha + (\cos\alpha - 1)^2}{\sin\alpha}x = \frac{2\cos\alpha - 2}{\sin\alpha}x = 0 \Rightarrow x = 0$.
W konsekwencji $y = 0$, zaś $z \in \mathbb{C}$ dowolne. Wybieramy wektor własny $u = (0, 0, 1)$.

$$(A - \lambda_2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -i\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos\alpha - i\sin\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $x\sin\alpha + yi\sin\alpha = 0$. Jeśli $\sin\alpha = 0$, wówczas $\cos\alpha = \pm 1$ oraz A ma postać diagonalną. Załóżmy, że $\sin\alpha \neq 0$. Wówczas $y = ix$ oraz $z = 0$. Wybieramy wektor własny $v = (1, i, 0)$.

$$(A - \lambda_3 I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\sin\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & i\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $x\sin\alpha - yi\sin\alpha = 0$. Jeśli $\sin\alpha = 0$, wówczas $\cos\alpha = \pm 1$ oraz A ma postać diagonalną. Załóżmy, że $\sin\alpha \neq 0$. Wówczas $y = -ix$ oraz $z = 0$. Wybieramy wektor własny $w = (-1, i, 0)$.
Układ (u, v, w) jest bazą wektorów własnych. Normujemy wektory bazowe $\hat{u} = u, \hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{2}}v, \hat{w} = \frac{w}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{2}}w$. Zauważmy, że układ $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ jest układem ortonormalnym.
Istotnie $\langle\hat{u}, \hat{v}\rangle = \langle\hat{u}, \hat{w}\rangle = 0$ oraz $\langle\hat{v}, \hat{w}\rangle = 1\cdot(-1) + i\cdot\bar{i} = -1 + 1 = 0$.

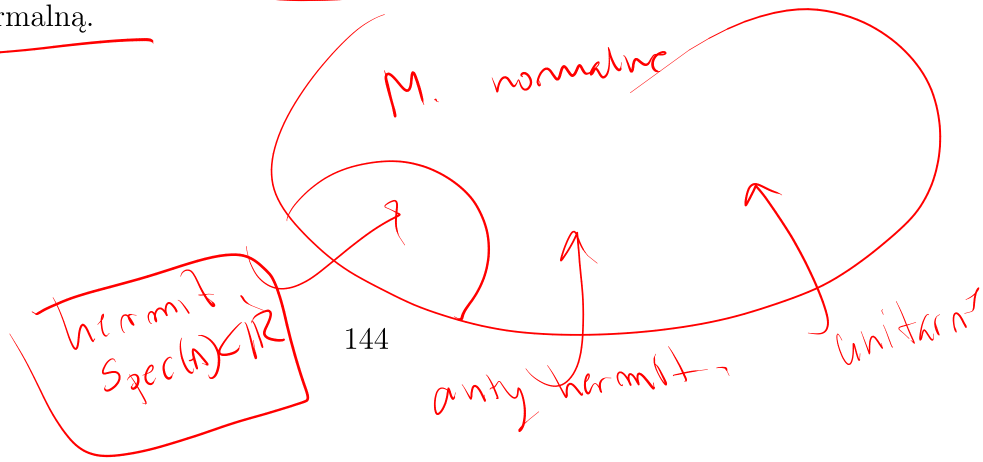
Macierz $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U(3)$, zatem $P^{-1} = P^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}$ oraz

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}$$

D – unitarna $\quad P^{-1}DP = A$

Twierdzenie 10.3.8. Macierz jest unitarnie diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą normalną.



PODSUMOWANIE

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in V, v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ oraz $A = [a_{ij}], U \in M_n(K)$

$K = \mathbb{R}$	$K = \mathbb{C}$
iloczyn skalarny $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$	iloczyn hermitowski $\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + \ldots + u_n\overline{v_n}$
transponowanie $A^T : [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$	sprzężenie hermitowskie $\overline{A}^T =$ $A^* : [a_{ij}]^* = [\overline{a_{ji}}]$
$\det A^T = \det A$	$\det A^* = \overline{\det A}$
macierz ortogonalna $UU^T = U^TU = I$	macierz unitarna $UU^* = U^*U = I$
$\det U = \pm 1$	$\lvert\det U\rvert = 1$ $\det M \in \mathbb{C}$
macierz symetryczna $A = A^T$	macierz hermitowska $A = A^*$
Macierz może nie mieć wartości własnych.	Każda macierz ma n wartości własnych (licząc z krotnościami).
Macierz symetryczna ma n rzeczywistych wartości własnych.	Macierz hermitowska ma n rzeczywistych wartości własnych.

10.4 Równoczesna diagonalizacja pary macierzy

Jeśli macierze $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ są *równocześnie diagonalizowalne*, tzn. istnieje $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ taka, że macierze $P^{-1}AP$ oraz $P^{-1}BP$ są diagonalne, to wówczas macierze A i B *komutują*, tj. $AB = BA$. Istotnie, ponieważ macierze diagonalne komutują, otrzymujemy

$$AB = (PP^{-1})A(PP^{-1})B(PP^{-1}) = P(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)P^{-1} = P(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)P^{-1} = BA.$$

$AB = BA$

Twierdzenie 10.4.1. Jeżeli macierze hermitowskie (lub unitarne) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ komutują, to istnieje macierz unitarna $P \in U(n)$ oraz macierze diagonalne $D_A, D_B \in M_n(\mathbb{R})$ takie, że $P^{-1}AP = D_A$ oraz $P^{-1}BP = D_B$.

Przykład 10.4.2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
Są to rzeczywiste macierze symetryczne, a zatem każda z nich jest ortogonalnie diagonalizowalna.
$AB = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = BA$, więc istnieje $P \in O(3)$ taka, że macierze $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ są diagonalne.
Znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy A.
$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$
$Spec(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3\}$ widmo proste

$(A - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y = 0$
Wybieramy wektor własny $u = (1, -1)$ i normujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

$(A - \lambda_2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0$
Wybieramy wektor własny $v = (1, 1)$ i normujemy go $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Stąd $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ponadto $P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Obliczamy $P^{-1}BP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.
Widzimy, że $Spec(B) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5\}$.

10.5 Rozkład Schura

Twierdzenie 10.5.1. Niech (V, s) będzie przestrzenią unitarną nad ciałem $\mathbb{C}$. Niech $\varphi \in End(V)$. Wówczas istnieje taka baza ortonormalna przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą trójkątną górną.

Wniosek 10.5.2. Dowolna macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ może być przedstawiona w postaci $A = UTU^*$, gdzie $T \in M_n(\mathbb{C})$ jest macierzą trójkątną górną, zaś $U \in M_n(\mathbb{C})$ jest macierzą unitarną.

Powyższe przedstawienie A nazywamy *rozkładem Schura* dla macierzy A.

Uwaga 10.5.3. Nawet jeśli elementy macierzy A będą rzeczywiste, to na ogół elementy macierzy T oraz U są zespolone.

Twierdzenie 10.5.4. Niech $(V, \langle .,. \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\varphi \in End(V)$. Jeśli φ ma n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami), to wówczas istnieje taka baza ortonormalna przestrzeni V, że macierz operatora φ w tejże bazie jest macierzą trójkątną górną.

Wniosek 10.5.5. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$, która posiada n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami), może być przedstawiona w postaci $A = PTP^T$, gdzie $T \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną, zaś $P \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą ortogonalną.