

## Zadanie domowe nr 2 - Macierze i układy równań liniowych

**Zadanie 1.** Czy prawdziwe jest poniższe stwierdzenie? Odpowiedź uzasadnij.

Zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych stopnia  $n$  o elementach z  $\mathbb{R}$  tworzy z działaniem mnożenia macierzy grupę nieprzemianną.

**Zadanie 2.** a) Dana jest macierz  $A \in M_6(\mathbb{R})$ , spełniająca równanie  $A^3 - 4A^T = \mathbf{0}$ . Podaj możliwe wartości wyznacznika macierzy  $A$ .

b) Dane są macierze  $B, C \in M_4(\mathbb{R})$ , o których wiadomo, że  $\det B = 16$ , zaś  $C$  powstaje z macierzy  $B$  poprzez wykonanie następujących operacji: zamiany miejscami kolumny pierwszej z kolumną czwartą, pomnożenia trzeciego wiersza przez  $\frac{1}{4}$  oraz dodania do wiersza drugiego wiersza pierwszego. Oblicz wyznacznik macierzy  $C$ .

c) Dane są macierze  $D, E \in M_3(\mathbb{R})$ , o których wiadomo, że  $\det D = 5$  oraz  $\det(DE) = 3$ . Oblicz wyznacznik macierzy  $F = E^{-1}D^{-1}2D^T$ .

**Zadanie 3.** Rozwiąż równanie macierzowe  $(X + I)^T \cdot A = 2A - I$ , gdzie  $A \in M_4(\mathbb{R})$  jest taka, że

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & ; i = j \\ 3 & ; i \neq j \end{cases}.$$

**Zadanie 4.** Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 4w = 4 \\ 4x + 5y + 6z + 3w = 5 \\ 5x + 3y + 9z + 9w = -9 \end{cases}$$

**Zadanie 5.** Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od parametru  $p \in \mathbb{R}$ . W przypadku układu nieoznaczonego określ liczbę parametrów.

$$\begin{cases} 3px_1 + 6x_2 + 3x_3 = 6 \\ px_1 + (p+1)x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ px_1 + 2x_2 + (p-1)x_3 + x_4 = 1 \\ 2px_1 + 4x_2 + 2x_3 + (p-3)x_4 = 2p-2 \end{cases}.$$

**Zadanie 6.** Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.

Dany jest układ równań  $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = a \\ x + y = a \end{cases}$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  jest parametrem.

a) Dla każdego  $a < -2$  układ jest sprzeczny.

b) Jeśli układ jest oznaczony, to  $a = 1$  lub  $a = -\frac{3}{2}$ .

c) Można tak wybrać wartość  $a$ , by otrzymać układ nieoznaczony.