Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA Zadanie domowe nr 4
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
listopad 2024r.

Zadanie domowe nr 4 - Przestrzenie wektorowe

Zadanie 1. *Czy U jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V? Odpowiedź uzasadnij.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) : x = 4y^2\}$
b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^4 = 0\}$
c) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) : \ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0\}$
d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(2x, x + y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$
e) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0 \text{ lub } 3x - 2y = 0\}$
f) $V = \mathbb{R}[x]$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f = 11\}$

Zadanie 2. *a) Dla jakich wartości $p \in \mathbb{R}$ układ wektorów $\{u, v, w\}$ jest liniowo niezależny?*

$$u = (1, 0, 2, 1, 2), v = (2, 1, 1, 2, 1), w = (5, 1, 7, 5, p) \in \mathbb{R}^5$$

b) Wyznacz bazę przestrzeni liniowej

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 5y - z + 4t = x - 6y + z + 5t = 0\}.$$

c) Układ wektorów $\{u_1, u_2\}$ uzupełnij do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

$$u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (2, 4, 7, 0)$$

d) Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni U. Czy $v = (4, 10, 9, 4) \in U$? Jesli tak, określ współrzędne v w znalezionej uprzednio bazie przestrzeni U.

$$U = \operatorname{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$$

Zadanie 3. *a) Uzasadnij, że zbiór $U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : -3p(1) + 2p(0) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$. Podaj zbiór generatorów, bazę oraz wymiar U.*

b) Dana jest podprzestrzeń liniowa W przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$. Określ $\dim W$.

$$W = \operatorname{lin}\{p = x^3 + x - 1,\ q = 2x^3 + x^2 + 5x - 2,\ r = x^3 + 3x - 5,\ s = x^2 + 2x + 2\}$$

c) Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ układ wektorów $p = x^2 - 2x + 3$, $q = 2x^2 - x + 1$, $r = x^2 + ax + a$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

Zadanie 4. *Niech*

$$p = 1 + x, \quad q = 2 - 3x, \quad r = 3 - x + 5x^2.$$

a) Uzasadnij, że układ $\mathcal{B}' = (p, q, r)$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Wyznacz macierz przejścia od bazy standardowej $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ do bazy $\mathcal{B}'$.
c) Wyznacz współrzędne wektora $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x - 5x^2$ w tejże bazie.

Zadanie 5. *Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.*

a) *Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.*

b) *Dowolna baza przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_5[x]$ jest pięcioelementowa.*

c) $\dim M_{3\times 5}(\mathbb{R}) = 15$