Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

ALGEBRA Zadanie domowe nr 6
WFiIS, fizyka techniczna, I rok
grudzień 2024r.

Zadanie domowe nr 6 - Diagonalizacja endomorfizmu

Zadanie 1. *Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni (krotność geometryczną). Czy podany endomorfizm jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.*

$$a)\quad \varphi \in End(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x,y,z) = (x+2y-2z, x+3z, x+3y)$$

$$b)\quad \varphi \in End(\mathbb{C}^3), \quad \varphi(z_1,z_2,z_3) = (iz_1 - z_1 + 2z_2 + z_3, 2iz_2 + 3z_3, iz_3 - z_3)$$

Zadanie 2. *Zbadaj diagonalizowalność endomorfizmu φ.*

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi(p)(x) = 3xp''(x) + (x^2-1)p(1) + xp(2)$$

Zadanie 3. *Dany jest $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ taki, że*

$$\varphi(1,0,0) = (1,0,0),\ \varphi(1,1,0) = (-1,-1,0),\ \varphi(1,1,1) = (0,0,0).$$

Oblicz $\varphi^{100}(3,6,9)$.

Zadanie 4. *a) Czy $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?*
Czy $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

b) Czy macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

c) Liczba $\lambda = 0$ jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A. Czy A jest diagonalizowalna?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

d) Dla jakich wartości $p \in \mathbb{R}$ macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & p & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna?

Zadanie 5. *Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.*

Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *endomorfizmu* $\varphi \in End(\mathbb{R}^4)$ *w bazach kanonicznych.*

a) *Można tak dobrać* $p \in \mathbb{R}$, *by* φ *miał dwuwymiarową podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej* $\lambda = 7$.

b) $\det(\frac{1}{\sqrt{7}} A^T) = \frac{196}{\sqrt{7}}$

c) *Dla dowolnego* $p \in \mathbb{R}$ *odwzorowanie* φ *jest izomorfizmem.*

Zadanie 6. *Dana jest macierz* $A \in M_3(\mathbb{C})$, *o której wiadomo, że* $\operatorname{tr}(A) = 2$ *oraz* $\lambda_1 = 7$ *to jej wartość własna, której odpowiadają wektory własne* $v = (1, 2, 1)$ *oraz* $w = (1, 1, 0)$. *Oblicz* $\det A$.

Zadanie 7. *Korzystając z diagonalizowalności macierzy, wyznacz wzór ogólny ciągu* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \end{cases}$$

Zadanie 8. *Dane są macierze* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *oraz* $B \in M_2(\mathbb{C})$. *Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznacz* $A^5 - A^4$, B^{-1} *oraz* B^{77}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$